ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №4, 2011 Механика

**УДК 539.3**

# ВОЛНА РЭЛЕЯ В СЛУЧАЕ УПРУГО-СТЕСНЁННОЙ ГРАНИЦЫ

**БЕЛУБЕКЯН М.В.**

**Ключевые слова:** упругое полупространство, поверхностная волна, упруго-стеснённая граница.
**Keywords:** elastic half-space, surface wave, elastically restrained boundary.

**Բելուբեկյան Մ.Վ.**
**Ռելեյի ալիքները առաձգականորեն կաշկանդված եզրի դեպքում**

Ենթադրվում է որ կիսատարածության եզրը կամ նորմալի կամ շոշոփողի ուղղությամբ առաձգականորեն կաշկանդված է: Հաստատված է մակերևույթային ալիքների գոյության պայմանները կախված կաշկանդումը բնութագրող գործակցից և ալիքի երկարությունից:

**Belubekyan M.V.**
**The Rayleigh waves in the case of the elastically restrained boundary**

The boundary of the half-space is elastically restrained in the normal or in the tangential directions. The conditions of the surface wave existence in the dependence of restrained coefficient and wave length are established.

Предполагается, что граница полупространства упруго стеснена либо по направлению нормали, либо по касательному направлению. Установлены условия существования поверхностной волны в зависимости от коэффициента, характеризующего стеснение и от длины волны.

В отличие от классической задачи Рэлея, вместо граничных условий свободной поверхности для упругого изотропного полупространства рассматриваются два варианта усложнённых граничных условий. Предполагается, что либо нормальное напряжение стеснённо в направлении перпендикулярной к поверхности нормали, а касательное равно нулю, либо нормальное напряжение равно нулю, а касательное стеснённо. Устанавливаются условия, при которых поверхностная волна не может существовать.

**1.** Упругое изотропное полупространство в прямоугольной декартовой системе координат занимает область $-\infty < x < \infty, \quad 0 \le y < \infty, \ -\infty < z < \infty$.
Рассматривается задача плоской деформации

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t), \quad w = 0, \tag{1.1}$$

где $u, v, w$ – проекции упругих перемещений по направлению на координатные оси $x, y, z$ соответственно.

Известно, что при помощи преобразований

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{1.2}$$

система уравнений задачи плоской деформации приводится к автономным уравнениям [1]:

$$c_e^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad c_t^2\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{1.3}$$

На границе полупространства задаются граничные условия

$$\sigma_{22} = \alpha v,\ \sigma_{21} = 0\ \ (\alpha > 0)\ \text{ при }\ y = 0. \tag{1.4}$$

Условия (1.4) были предложены Миндлином [1,2] для исследования задачи отражения упругой волны от границы полупространства.

В частных случаях $\alpha = 0$ получаются условия свободной границы, $\alpha \to \infty$ – условия скользящего контакта. Необходимо отметить, что для условий скользящего контанка граничные условия для $\varphi$ и $\psi$ также отделяются $\left(\psi = 0,\ \partial\varphi / \partial y = 0\right.$ при $\left. y = 0\right)$.

С использованием закона Гука и преобразования (1.2) граничные условия (1.4) приводятся к виду:

$$\begin{gathered}(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \alpha\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,\\ 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Задача заключается в нахождении решений уравнений (1.3), удовлетворяющих граничным условиям (1.5) и условиям затухания

$$\lim_{y\to\infty}\varphi = 0,\quad \lim_{y\to\infty}\psi = 0. \tag{1.6}$$

Решения уравнений (1.3), удовлетворяющие условию затухания, имеют вид [1]:

$$\begin{gathered}\varphi = Ae^{-k\sqrt{1-\theta\eta}\,y}\exp i\left(\omega t - kx\right),\\ \psi = Be^{-k\sqrt{1-\eta}\,y}\exp i\left(\omega t - kx\right),\end{gathered} \tag{1.7}$$

где $A$ и $B$ – произвольные постоянные

$$\theta = \frac{1}{2}\frac{1-2v}{1-v}, \qquad \eta = \frac{\omega^2}{k^2c_t^2},\ o < \eta < 1. \tag{1.8}$$

Подстановка (1.7) в граничные условия (1.5) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных

$$\begin{gathered}\left(2 - \eta + \gamma\sqrt{1-\theta}\right)A - 2i\left(\sqrt{1-\eta} + 0{,}5\gamma\right)B = 0,\\ 2iA\sqrt{1-\theta\eta} + \left(2-\eta\right)B = 0.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Равенство нулю детерминанта системы (1.9) приводит к следующему уравнению относительно безразмерной характеристики квадрата фазовой скорости $\eta$:

$$R(\eta) \equiv (2-\eta)^2 - 4\sqrt{1-\theta\eta}\sqrt{1-\eta} - \gamma\eta\sqrt{1-\theta\eta} = 0, \gamma = \alpha / (\mu k), \tag{1.10}$$

уравнение (1.10) при $\gamma = 0$ совпадает с классическим уравнением Рэлея, при $\gamma \to \infty$ приводит к уравнению задачи с граничными условиями скользящего контакта, из которого следует невозможность поверхностной волны.

В отличие от уравнения Рэлея, уравнение (1.10) дисперсионное, т.е решение уравнения зависит от волнового числа $\kappa$.

**2.** Уравнение (1.10), как и уравнение Рэлея, имеет корень $\eta = 0$. Нетрудно проверить, что этому корню соответствует тривиальное решение $u = v = 0$. Исключая корень $\eta = 0$, как это делается в [3], уравнение (1.10) приводится к виду

$$R_1(\eta) \equiv \eta - \frac{4(1-\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta}+\sqrt{1-\theta\eta}} - \gamma\sqrt{1-\theta\eta} = 0 . \tag{2.1}$$

Функция $R_1(\eta)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &R_1(0) = -2(1-\theta) - \gamma < 0 \quad (\gamma > 0), \\ &R_1(1) = 1 - \gamma\sqrt{1-\theta}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) имеет решение в интервале $0 < \eta < 1$ при выполнении условия

$$\gamma < (1-\theta)^{-1/2} . \tag{2.3}$$

При этом, решение будет единственным, т.к. легко проверить, что $dR_1 / d\eta > 0$, т.е. непрерывная функция $R_1(\eta)$ – монотонно возрастающая и на концах промежутка принимает значение разных знаков.

В табл.1 приводятся численные результаты, вычисленные по уравнению (2.10) для параметра $\eta$, характеризующего квадрат фазовой скорости поверхностной волны в зависимости от параметра $\gamma$, характеризующего степень стеснённости поверхности полупространства при $\theta = 0,33$.

Таблица 1

| $\gamma$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta$ | 0,8464 | 0,9005 | 0,9405 | 0,9686 | 0,9867 | 0,9966 |

**3.** Другой вариант условий стеснённой границы имеет вид:

$$\sigma_{22} = 0, \ \sigma_{21} = \beta u \ \text{ при } \ y = 0 \ (\beta > 0). \tag{3.1}$$

В этом случае при $\beta = 0$ опять получаются граничные условия свободного края, а при $\beta \to \infty$ – условия Навье.

С учётом закона Гука и преобразования (1.2) граничные условия (3.1) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} = 0, \\ &2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\beta}{\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

подстановка (1.7) в (3.2) дает

$$\begin{aligned} &(2-\eta)A - 2i\sqrt{1-\eta}B = 0, \quad \delta = \beta/(\mu\kappa), \\ &i\left(2\sqrt{1-\theta\eta} - \delta\right)A + \left(2 - \eta - \delta\sqrt{1-\eta}\right)B = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Равенство нулю детерминанта системы (3.3) приводится к виду

$$R(\eta) \equiv (2-\eta)^2 - 4\sqrt{1-\theta\eta}\sqrt{1-\eta} + \delta\eta\sqrt{1-\eta} = 0 , \tag{3.4}$$

уравнение (3.4) при $\delta = 0$ совпадает с уравнением Рэлея, а при $\delta \to \infty$ совпадает с уравнением, которое получается для задачи с граничными условиями Навье.

$$\eta\sqrt{1-\eta}=0\,. \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что в этом случае поверхностная волна не существует, но существует предельная волна с фазовой скоростью, определяемой из равенства $\eta=1$.

Исключая корень $\eta=0$, уравнение (3.4) приведём к виду

$$R_2(\eta)\equiv\eta-\frac{4(1-\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta}+\sqrt{1-\theta\eta}}+\delta\sqrt{1-\eta}=0\,. \tag{3.6}$$

Из следующих свойств функции

$$R_2(0)=-2(1-\theta)+\delta,\quad R_2(1)=1 \tag{3.7}$$

следует, что уравнение (3.6) имеет корень, удовлетворяющий условию $0<\eta<1$, если

$$\delta<2(1-\theta), \tag{3.8}$$

условие (3.8) есть условие существования поверхностной волны в случае стеснённой границы типа (3.1).

Таблица 2

| $\delta$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta$ | 0,8464 | 0,8132 | 0,7672 | 0,7013 | 0,6032 | 0,4532 | 0,2236 | 0,0697 |

В табл. 2 приводятся результаты численных расчётов по уравнению (3.6) для фазовой скорости в зависимости от коэффициента стеснения. Сравнение таблиц 1 и 2 показывает, что если стеснение типа (1.4) приводит к уменьшению степени локализации поверхностной волны (приводит к медленному затуханию амплитуды), то стеснение типа (3.1) приводит к увеличению локализации.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Miklowitz J. The theory of Elastic waves and Waveguides North-Holland. 1984. 618 p.
2. Mindlin R.D. Waves and Vibrations in Isotropic elastic Plates . In: «Structural Mechanics», J.N. Goodier and N.J. Hoff, eds, Pergamon Press, New York, 1960. P.199-232.
3. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. //В сб.: «Проблемы механики деформируемого твердого тела». Ереван: Институт механики НАН Армении, 1997. С.79-100.



<u>**Сведения об авторе**</u>:

**Белубекян Мелс Вагаршакович –** кандидат физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении
**Адрес:** 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24Б
Тел.: (+374 10) 52-15-03, (374 93) 58 00 96
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com



Поступила в редакцию 11.03.2011