ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №3, 2011 Механика

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ИЗБЕГАЮЩИХ СТОЛКНОВЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ЧАХМАХЧЯН Р.Э.

Ключевые слова: оптимальное управление, избегание столкновения
Keywords: optimal control, avoid collision

Չախմախչյան Ռ.Է.
Բախումից խուսափող երկու դինամիկ օբյեկտների օպտիմալ ուղղագիծ տեղափոխումները հարթության վրա

Դիտարկվում է մի խնդիր, որտեղ պահանջվում է որոշել երկու դինամիկ օբյեկտների կառավարման օրենքներն այնպես, որ ապահովվեն հարթության մեջ օբյեկտների տեղափոխումը ցանկացած իրարից տարբեր սկզբնական հանգստի վիճակներից տրված իրարից տարբեր վերջնական հանգստի վիճակներ նվազագույն ժամանակում և բացառվի դրանց բախումը համատեղ շարժման ընթացքում: Տրված է խնդրի լուծումը մեկ փոխանցման կետով կտոր առ կտոր հաստատուն և նվազագույն թվով ազատ պարամետրերով կառավարող այն ֆունկցիաների դասում, որոնց դեպքում օբյեկտները շարժվում են ուղիղ գծերով: Աշխատանքն հանդիսանում է [1-3]-ի շարունակությունը:

Chakhmakhchyan R.E.
Optimal plane rectilinear movements two dynamic objects avoiding collision

In this problem is considered the system from two dynamic objects, which realize flat motion and is required define limited operating forces providing transition of objects from any arbitrary initial difference states of rest in given final difference states of rest for minimum time and guaranteeing absence of collision of objects in process of the joint motion. The proof of resolvability of a problem in a class of piecewise constant managements with one switching and the minimum number of free parameters at which movements of objects occur on straight lines is given. Article develops researches [1-3].

Рассматривается задача определения законов ограниченных управляющих сил, обеспечивающих плоские перемещения двух динамических объектов из произвольных различных начальных состояний покоя в заданные не совпадающие состояния покоя за минимальное время и гарантирующих отсутствие столкновения объектов в процессе движения. Дано полное доказательство рарешимости задачи в классе кусочно-постоянных управлений с одним переключением и минимальным числом свободных параметров, при которых движения объектов происходят по прямым. Статья развивает исследования [1-3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему из двух точечных объектов X и Y, совершающих движения на плоскости. Уравнения движения объектов зададим в виде

$$X: \quad m_X \ddot{x} = F_X \, , \; Y: \quad m_Y \ddot{y} = F_Y . \tag{1.1}$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ – векторы координат объектов, $F_X = (F_{X1}, F_{X2})$, $F_Y = (F_{Y1}, F_{Y21})$ – векторы управляющих сил объектов, а m_X, m_Y – соответственно массы объектов X и Y.

Требуется определить управляющие вектор-функции $F_X(t)$ и $F_Y(t)$ с ограниченными компонентами

$$\left|F_{Xi}(t)\right| \le F_{Xi}^0, \qquad \left|F_{Yi}(t)\right| \le F_{Yi}^0, \qquad i = 1,2 \tag{1.2}$$

так, чтобы объекты (1.1) перешли из начальных состояний покоя в момент $t = 0$

$$x(0) = x^0, \; \dot{x}(0) = 0, \; y(0) = y^0, \; \dot{y}(0) = 0, \; x^0 \ne y^0, \tag{1.3}$$

заданные конечные состояния покоя

$$x(T)=x^1,\ \dot{x}(T)=0,\ y(T)=y^1,\ \dot{y}(T)=0\,,\ x^1\neq y^1 \tag{1.4}$$
за минимальное время $t=T$ и при их совместном движении не имело место столкновения, т.е. выполнялось условие
$$\left|x(t)-y(t)\right|\neq 0\,,\ t\in(0,T). \tag{1.5}$$
Если ввести безразмерные переменные по следующим формулам (с дальнейшим опусканием штрихов)
$$t'=t/\gamma\,,T'=T/\gamma\,,\gamma=(m_X\left|x_1^0-y_1^0\right|/F_{X1}^0)^{1/2} \tag{1.6}$$
$$x_1'=x_1/\xi_1\,,\ x_1'^{0,1}=x_1^{0,1}/\xi_1\,,\ \dot{x}_1'^{0,1}=\dot{x}_1^{0,1}/\xi_1\,,\ \xi_1=\left|x_1^0-y_1^0\right|$$
$$x_2'=x_2/\xi_2\,,x_2'^{0,1}=x_2^{0,1}/\xi_2\,,\dot{x}_2'^{0,1}=\dot{x}_2^{0,1}/\xi_2\,,\xi_2=(m_X\left|x_1^0-y_1^0\right|/F_{X2}^0)^{-1/2}$$
$$y_i'=y_i/\mu_i\,,\ y_i'^{0,1}=y_i^{0,1}/\mu_i\,,\ \dot{y}_i'^{0,1}=\dot{y}_i^{0,1}/\mu_i\,,\ \mu_i=(m_Y\left|x_1^0-y_1^0\right|/F_{Yi}^0)^{-1/2}$$
$$F_{Xi}'=F_{Xi}/F_{Xi}^0\,,\ F_{Yi}'=F_{Yi}/F_{Yi}^0\,,\ i=1,2,$$
то соотношения (1.1), (1.2) упростятся и получим
$$m_X=m_Y=1\,,\ F_{Xi}^0=F_{Yi}^0=1\,,\ i=1,2. \tag{1.7}$$
Введём обозначения
$$x_{i1}=x_i\,,\quad x_{i2}=\dot{x}_i\,,\ y_{i1}=y_i\,,\ y_{i2}=\dot{y}_i\,,\ i=1{,}2 \tag{1.8}$$
и представим уравнения (1.1), (1.7) в виде
$$X:\ \begin{matrix}\dot{x}_{i1}=x_{i2}\\ \dot{x}_{i2}=u_i\end{matrix}\,,\ i=1,2\,;\ Y:\ \begin{matrix}\dot{y}_{i1}=y_{i2}\\ \dot{y}_{i2}=\mathrm{v}_i\end{matrix}\,,\ i=1,2\ . \tag{1.9}$$
В обозначениях (1.8) начальные и конечные условия (1.3), (1.4), ограничения на управления (1.2), а также условие отсутствия столкновения (1.5) запишутся так:
$$x_{ij}(0)=x_{ij}^0,\ \ y_{ij}(0)=y_{ij}^0,\ \ x_{i2}^0=y_{i2}^0=0,\ \ \sum_{i=1}^{2}(x_{i1}^0-y_{i1}^0)^2\neq 0,\ \ i,j=1,2\,, \tag{1.10}$$
$$x_{ij}(T)=x_{ij}^1,\ \ y_{ij}(T)=y_{ij}^1,\ \ x_{i2}^1=y_{i2}^1=0,\ \sum_{i=1}^{2}(x_{i1}^1-y_{i1}^1)^2\neq 0,\ i,j=1,2\,, \tag{1.11}$$
$$\left|u_i(t)\right|\le u_i^0\,,\ \left|\mathrm{v}_i(t)\right|\le \mathrm{v}_i^0\,,\ u_i^0=\ \mathrm{v}_i^0=1,\ i=1,2\,, \tag{1.12}$$
$$\left|x^{(1)}(t)-y^{(1)}(t)\right|\neq 0\ \ t\in(0,T)\,, \tag{1.13}$$
$$x^{(1)}(t)-y^{(1)}(t)=(x_{11}(t)-y_{11}(t),\quad x_{21}(t)-y_{21}(t))^T\,.$$
Определим управления $u_i^*(t)$, $\mathrm{v}_i^*(t)$ так, чтобы система (1.9) перешла из начального состояния (1.10) в заданное конечное состояние (1.11) и при этом удовлетворялись условия (1.12), (1.13).

2. Построения оптимальных управлений без учета фазовых ограничений. Решение задачи об оптимальном по быстродействию управлении для каждой из систем (1.9) известно [4] и имеет вид
$$u_i^*=u_i^0\mathrm{sign}[(\tau_{xi}-t)\Delta x_{i1}]\,,\ \tau_{xi}=T_{xi}/2\,,\ T_{xi}=2(\left|\Delta x_{i1}\right|/u_i^0)^{1/2} \tag{2.1}$$
$$v_i^*=v_i^0\mathrm{sign}[(\tau_{Yi}-t)\Delta y_{i1}]\,,\ \tau_{Yi}=T_{Yi}/2\,,\ T_{Yi}=2(\left|\Delta y_{i1}\right|/v_i^0)^{1/2}$$
$$\Delta x_{i1}=x_{i1}^1-x_{i1}^0\,,\ \Delta y_{i1}^1=y_{i1}^1-y_{i1}^0\,,\ i=1,2$$
Пользуясь соотношениями (2.1), построим оптимальные по быстродействию управления для системы (1.9), (1.12) при граничных условиях (1.10), (1.11) без учета

ограничения (1.13). Сначала вычислим T_{xi}, T_{yi}, $i=1,2$ согласно (2.1) и заметим, что искомое время быстродействия равно $T=\max\{T_{x1},T_{x2},T_{y1},T_{y2}\}$. Не нарушая общности, положим, что $\Delta x_{i1},\Delta y_{i1}>0,\ \ i=1,2$ и

$$T=T_{x1},\ \Delta x_{11}>\max\{\Delta x_{21},\Delta y_{i1}\},\ i=1,2. \tag{2.2}$$

Тогда управление $u_1(t)$ определяется однозначно: $u_1(t)=u_1^*(t)$ (2.1) . В выборе управлений $u_2(t)$, $\mathrm{v}_1(t)$, $\mathrm{v}_2(t)$ имеется произвол, связанный с возможностью более раннего приведения координат x_{21}, y_{11}, y_{21} в требуемые состояния (по сравнению с координатой x_{11}). В этом случае зададим управления $u_2(t),\mathrm{v}_1(t),\mathrm{v}_2(t)$ соответственно с двумя свободными параметрами τ_{x2},u_2', τ_{y1},v_1', τ_{y2},v_2' в следующих формах:

$$u_2^*(t)=u_2'\mathrm{sign}(\tau_{x2}-t),\ 0\le u_2'\le u_2^0,\ t\in[0,T] \tag{2.3}$$

$$\mathrm{v}_i^*(t)=\mathrm{v}_i'\mathrm{sign}(\tau_{yi}-t)\ ,\ 0\le \mathrm{v}_i'\le \mathrm{v}_i^0,\ i=1,2,\ t\in[0,T]$$

Параметры u_2',v_i', $i=1,2$ из (2.3) выберем из условия приведения координат x_{21}, y_{11}, y_{21} в заданные терминальные положения в момент T. Тогда интегрируя уравнения (1.9) при управлениях $u_1^*(t)$ (2.1), $u_2^*(t),\mathrm{v}_i^*(t)$, $i=1,2$ (2.3) с краевыми условиями (1.10), (1.11) на интервале времени $[0,T]$, получим законы движения объектов X и Y

$$x_{11}(t)=\begin{cases} u_1^0t^2/2+x_{11}^0, & t\in[0,\tau_{x1}) \\ -u_1^0(T-t)^2/2+x_{11}^1, & t\in[\tau_{x1},\,T] \end{cases} \tag{2.4}$$

$$x_{21}(t)=\begin{cases} u_2't^2/2+x_{21}^0, & t\in[0,\tau_{x2}) \\ -u_2'(T-t)^2/2+x_{21}^1, & t\in[\tau_{x2},\,T] \end{cases}$$

$$u_2'=4\Delta x_{21}\,/\,T_{x1}^2,$$

$$y_{i1}(t)=\begin{cases} \mathrm{v}_i't^2/2+y_{i1}^0, & t\in[0,\tau_{yi}) \\ -\mathrm{v}_i'(T-t)^2/2+y_{i1}^1, & t\in[\tau_{yi},\,T] \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\mathrm{v}_i'=4\Delta y_{i1}\,/\,T^2,\quad i=1,2,$$

где

$$\tau_{xi}=\tau_{yi}=\tau=T/2,\ \tau=(\Delta x_{11}/u_1^0)^{1/2}. \tag{2.6}$$

Траектории движений объектов X и Y, соответствующие законам (2.4), (2.5), на плоскости (z_1,z_2) представляют собой прямолинейные отрезки:

$$\bar{X}((x_{11}^0,x_{21}^0),(x_{11}^1,x_{21}^1)):$$

$$z_2(z_1)=\begin{cases} u_2'(u_1^0)^{-1}(z_1-x_{11}^0)+x_{21}^0, & x_{11}^0\le z_1\le(x_{11}^0+x_{11}^1)/2 \\ u_2'(u_1^0)^{-1}(z_1-x_{11}^1)+x_{21}^1, & (x_{11}^0+x_{11}^1)/2\le z_1\le x_{11}^1 \end{cases} \tag{2.7}$$

и

$$\overline{Y}((y_{11}^0, y_{21}^0),(y_{11}^1, y_{21}^1)):$$

$$z_2(z_1) = \begin{cases} v_2' v_1'^{-1}(z_1 - y_{11}^0) + y_{21}^0, & y_{11}^0 \le z_1 \le (y_{11}^0 + y_{11}^1)/2 \\ v_2' v_1'^{-1}(z_1 - y_{11}^1) + y_{21}^1, & (y_{11}^0 + y_{11}^1)/2 \le z_1 \le y_{11}^1 \end{cases} \quad (2.8)$$

с начальными, конечными положениями $((x_{11}^0, x_{21}^0),(x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $((y_{11}^0, y_{21}^0),(y_{11}^1, y_{21}^1))$ соответственно.

Движение объектов X и Y по отрезкам (2.7) и (2.8) при управлениях $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ и $\mathrm{v}^*(t) = (\mathrm{v}_1^*(t), \mathrm{v}_2^*(t))$ происходит, соответственно, в направлении от начальных точек (x_{11}^0, x_{21}^0) и (y_{11}^0, y_{21}^0) к конечным (x_{11}^1, x_{21}^1) и (y_{11}^1, y_{21}^1) ускоренно на промежутке времени $0 < t \le \tau$, а на промежутке $\tau < t \le T$ – замедленно. При этом, как следует из (2.1)-(2.7), $t = \tau$ – время прохождения через точки

$$M_{\overline{X}} = (z_1^X, z_2^X)$$
$$z_1^X = (x_{11}^0 + x_{11}^1)/2, \quad z_2^X = (x_{21}^0 + x_{21}^1)/2 \quad (2.9)$$

$$M_{\overline{Y}} = (z_1^Y, z_2^Y)$$
$$z_1^Y = (y_{11}^0 + y_{11}^1)/2, \quad z_2^Y = (y_{21}^0 + y_{21}^1)/2 \quad (2.10)$$

середины отрезков (2.7), (2.8) – есть момент переключения управлений $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ и $\mathrm{v}^*(t) = (\mathrm{v}_1^*(t), \mathrm{v}_2^*(t))$.

Для заданных начальных (1.10) и конечных (1.11) значений решения $x_{11}(t), x_{21}(t), y_{11}(t), y_{21}(t)$ системы (1.9) при управлениях $u_1^*(t)$ (2.1), $u_2^*(t), \mathrm{v}_i^*(t)$, $i = 1, 2$ (2.3) не обязательно удовлетворяют наложенным ограничениям (1.13).

Получим условия на начальные и конечные координаты, обеспечивающие выполнение ограничения (1.13), т.е. отсутствия столкновения.

3. Построения оптимальных управлений с учётом фазовых ограничений. Уравнения прямых, проходящих через заданные точки (x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1) и (y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1), имеют вид

$$L_X(z_1, z_2; x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1) = (z_1 - x_{11}^0)(x_{21}^1 - x_{21}^0) - (z_2 - x_{21}^0)(x_{11}^1 - x_{11}^0) = 0$$
$$L_Y(z_1, z_2; y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) = (z_1 - y_{11}^0)(y_{21}^1 - y_{21}^0) - (z_2 - y_{21}^0)(y_{11}^1 - y_{11}^0) = 0 \quad (3.1)$$

Отрезки $\overline{X}((x_{11}^0, x_{21}^0),(x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $\overline{Y}((y_{11}^0, y_{21}^0),(y_{11}^1, y_{21}^1))$ пересекаются в том и только в том случае, когда точки (y_{11}^0, y_{21}^0) и (y_{11}^1, y_{21}^1) находятся в разных сторонах от прямой L_X, а точки (x_{11}^0, x_{21}^0) и (x_{11}^1, x_{21}^1) – от прямой L_Y, т.е. удовлетворяются соответственно следующие неравенства :

$$Z_X(z^{0,1}) = L_X(y_{11}^0, y_{21}^0; x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1) L_X(y_{11}^1, y_{21}^1; x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1) < 0$$
$$Z_Y(z^{0,1}) = L_Y(x_{11}^0, x_{21}^0; y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) L_Y(x_{11}^1, x_{21}^1; y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) < 0 \quad (3.2)$$

где

$$z^{0,1} = (x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1, y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) \in R^8. \quad (3.3)$$

Неравенства (3.2) задают область

$$Z^+ = \{z^{0,1} \in R^8 : \ Z_X(z^{0,1}) < 0, \ \ Z_Y(z^{0,1}) < 0)\} \tag{3.4}$$

в пространстве начальных и конечных точек (3.3), для которых соответствующие отрезки $\overline{X}((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $\overline{Y}((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1))$ пересекаются. Через $M_{\overline{XY}} = (z_1^p, z_2^p)$ обозначим точку их пересечения.

Для выполнения условия нестолкновения (1.13) объектов X и Y при управлениях (2.1), (2.3) необходимо и достаточно, чтобы не выполнялись равенства

$$z_i(t, x_{i1}^0, x_{i1}^1, y_{i1}^0, y_{i1}^1) = (x_{i1}(t, x_{i1}^0, x_{i1}^1) - y_{i1}(t, y_{i1}^0, y_{i1}^1) = 0, \ t \in (0,T), \ i = 1,2, \tag{3.5}$$

где $x_{i1}(t; x_{i1}^0, x_{i1}^1)$ и $y_{i1}(t; y_{i1}^0, y_{i1}^1)$ определяются по формулам (2.4), (2.5).

Если $z^{0,1} \in Z^- = R^8 \setminus Z^+$, то отрезки $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ не пересекаются, следовательно, система (3.5) заведомо несовместима.

Пусть $z^{0,1} \in Z^+$, тогда для заданных начальных и конечных значений $z_i^{0,1} = (x_{i1}^0, x_{i1}^1, y_{i1}^0, y_{i1}^1)$, $i = 1,2$, (1.10), (1.11) введём обозначение

$$M^{(i)}(t, z_i^{0,1}) = \left\{ t \in (t_0, T) : \ \ z_i(t, z_i^{0,1}) = 0 \right\}, \ i = 1,2. \tag{3.6}$$

Тогда система (3.5) будет разрешимой на интервале $(0,T)$, если

$$z^{0,1} \in Z_0^+ \ Z_0^+ = \left\{ z^{0,1} \in Z^+ : \bigcap_{i=1}^{2} M^{(i)}(t, z_i^{0,1}) \neq \varnothing, \quad t \in (0, T) \right\} \qquad (3.\ 7)(a)$$

и будет неразрешимой, если

$$z^{0,1} \in Z^+ \setminus Z_0^+, \ Z^+ \setminus Z_0^+ = \left\{ z^{0,1} \in Z^+ : \bigcap_{i=1}^{2} M^{(i)}(t, z_i^{0,1}) = \varnothing, \quad t \in (0, T) \right\} \qquad (3.7)(b)$$

Определение. При условиях (3.2) отрезки $\overline{X}((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $\overline{Y}'((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1))$ назовём центрально-симметричными, если в точке пересечения эти отрезки делятся пополам

$$M_{\overline{XY}} = M_{\overline{X}} = M_{\overline{Y}}. \tag{3.8}$$

Из (3.8), (2.9) и (2.10) следует, что отрезки $\overline{X}((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $\overline{Y}'((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1))$ являются центрально-симметричными друг к другу в том и только в том случае, если координаты краевых точек удовлетворяют следующим соотношениям:

$$x_{11}^0 + x_{21}^0 = y_{11}^0 + y_{21}^0, \qquad x_{11}^1 + x_{21}^1 = y_{11}^1 + y_{21}^1. \tag{3.9}$$

Утверждение. Система (3.5) при управлениях (2.1), (2.3) разрешима, если отрезки (2.7) и (2.8) центрально-симметричны, т.е. выполняются условия (3.9).

Действительно, двигаясь при управлениях (2.1), (2.3) по центрально-симметричным отрезкам (2.7) и (2.8), для которых выполняются условия (3.9), объекты X, Y достигают точки пересечения $M_{\overline{XY}}$, являющейся также точкой середины каждой из отрезков (2.7) и (2.8) одновременно, в момент времени (2.6), т.е. система (3.5) совместима.

Пусть $\overline{Y}$ не является центрально-симметричным по отношению $\overline{X}$, т.е. пересекается с $\overline{X}$ в некоторой точке, не являющейся центром симметрии крайних точек обоих отрезков. Сделаем параллельный перенос отрезка $\overline{Y}$ так, чтобы точка $M_{\overline{Y}} = ((y_{11}^0 + y_{21}^0)/2, \ (y_{11}^1 + y_{21}^1)/2) -$ середина отрезки $\overline{Y} -$ перешла в точку

$M_{\overline{X}} = ((x_{11}^0 + x_{21}^0)/2,\ (x_{11}^1 + x_{21}^1)/2)$ – середины отрезка $\overline{X}$. Это можно осуществить с помощью следующих формул:

$$y'_{11} = y_{11} + \alpha,\ y'_{21} = y_{21} + \beta, \tag{3.10}$$

где

$\alpha = ((x_{11}^0 + x_{11}^1)/2 - (y_{11}^0 + y_{11}^1)/2)$, $\beta = ((x_{21}^0 + x_{21}^1)/2 - (y_{21}^0 + y_{21}^1)/2)$. При таком переносе $\overline{Y}$ перейдет к центрально-симметричному по отношению к $\overline{X}$ отрезку $\overline{Y}'$ со следующими начальными и конечными точками:

$$\begin{aligned} y'^0 &= (y'^0_{11},\ y'^0_{21}) = (y_{11}^0 + \alpha,\ y_{21}^0 + \beta) \\ y'^1 &= (y'^1_{11},\ y'^1_{21}) = (y_{11}^1 + \alpha,\ y_{21}^1 + \beta). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Теорема. Для того, чтобы система (3.5) при условиях (3.7)(а) и управлениях (2.1), (2.3) была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее соотношение:

$$(x_{11}^0 - y_{11}^0)(x_{21}^1 - y_{21}^1) = (x_{11}^1 - y_{11}^1)(x_{21}^0 - y_{21}^0). \tag{3.12}$$

Необходимость. Пусть в некоторый момент времени $t \in (0,\ T/2)$ система (3.5) разрешима. Тогда, пользуясь формулами (2.4)-(2.6), из (3.5) получим

$$\begin{cases} (u_1^0 - \mathrm{v}'_1)t^2/2 + x_{11}^0 - y_{11}^0 = 0 \\ (u'_2 - \mathrm{v}'_2)t^2/2 + x_{21}^0 - y_{21}^0 = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Так как $u_1^0 \neq \mathrm{v}'_1$ и $u'_2 \neq \mathrm{v}'_2$, то исключив время t из (3.13), найдём

$$(x_{11}^0 - y_{11}^0)(u_1^0 - \mathrm{v}'_1)^{-1} = (x_{21}^0 - y_{21}^0)(u'_2 - \mathrm{v}'_2)^{-1}$$

Отсюда, учитывая (2.4)-(2.6), после некоторых упрощений получим (3.12).

Достаточность. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при условии (3.12) начальная точка отрезка $\overline{Y}$ находится на отрезке, соединяющего начальные точки отрезка $\overline{X}$ и центрально-симметричному к отрезку $\overline{Y}'$ с концами (3.11). Действительно, уравнение отрезка, соединяющий начальные точки отрезков $\overline{X}$ и $\overline{Y}'$, следующее:

$$(z_1 - x_{11}^0)[(y_{11}^0 - x_{11}^0) + (x_{11}^1 - y_{11}^1)]^{-1} = (z_2 - x_{21}^0)[(y_{21}^0 - x_{21}^0) + (x_{21}^1 - y_{21}^1)]^{-1}$$

которое после подстановки $z_1 = y_{11}^0,\ z_2 = y_{21}^0$ и некоторых упрощений принимает вид (3.12).

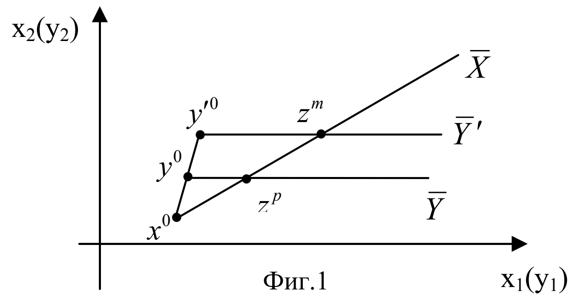
Покажем, что время движения объектов X и Y до точки пересечения $M_{\overline{XY}}$ совпадают. Для удобства введём следующие обозначения: $x^0 = (x_{11}^0, x_{21}^0)$, $y^0 = (y_{11}^0, y_{21}^0)$ – начальные точки объектов X и Y, $y'^0 = (y'^0_{11}, y'^0_{21})$ – начальная точка отрезка $\overline{Y}'$ (3.11), $z^p = M_{\overline{XY}} = (z_1^p, z_2^p)$ – точка пересечения отрезков $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, а $z^m = M_{\overline{X}} = (z_1^m, z_2^m)$ – точка середины отрезка $\overline{X}$, где $z_1^m = (x_{11}^0 + x_{21}^0)/2$, $z_2^m = (x_{11}^1 + x_{21}^1)/2$ (2.9).

Тогда при условии (3.12) на плоскости образуются подобные треугольники $\Delta x^0 y^0 z^p$ и $\Delta x^0 y'^0 z^p$ (фиг.1), для которых

$$\left|x^0 z^p\right| / \left|x^0 z^m\right| = \left|y^0 z^p\right| / \left|y'^0 z^m\right|$$

или, с учетом (3.10), (3.11),

$$\frac{((z_1^p - x_1^0)^2 + (z_2^p - x_2^0)^2)^{1/2}}{((z_1^m - x_1^0)^2 + (z_2^m - x_2^0)^2)^{1/2}} = \frac{((z_1^p - y_1^0)^2 + (z_2^p - y_2^0)^2)^{1/2}}{((z_1^m - y_1^0 - \alpha)^2 + (z_2^m - y_2^0 - \beta)^2)^{1/2}} \qquad (3.14)$$



Фиг.1

Полагая, что время движения объекта X до точки $z^p = M_{\overline{X}\overline{Y}}$ равно T_X, а для объекта Y – T_Y, и учитывая (2.4)-(2.6), а также, что время перемещения объектов X и Y из начальных точек $x^0 = (x_{11}^0, x_{21}^0)$ и $y'^0 = (y_{11}'^0, y_{21}'^0)$, соответственно, до точки пересечения $z^p = M_{\overline{X}\overline{Y}} = (z_1^p, z_2^p)$ одинаково (согласно утвердждению), из (3.14) получим

$$\frac{T_X^2((u_1^0)^2 + (u_2')^2)^{1/2}}{T^2((u_1^0)^2 + (u_2')^2)^{1/2}} = \frac{T_Y^2((\mathrm{v}_1')^2 + (\mathrm{v}_2')^2)^{1/2}}{T^2((\mathrm{v}_1')^2 + (\mathrm{v}_2')^2)^{1/2}}.$$

Отсюда следует равенство $T_X = T_Y$.

Аналогичным образом, если рассматривать (3.5) на интервале $(T/2, T)$, то после некоторых упрощений получим условие (3.12).

Если множество начальных и конечных точек (3.3), удовлетворяющих (3.12), (3.9), обозначить, соответственно, через

$$Z_0^+ = \left\{ z^{0,1} \in Z^+ : (x_{11}^0 - y_{11}^0)(x_{21}^1 - y_{21}^1) = (x_{11}^1 - y_{11}^1)(x_{21}^0 - y_{21}^0) \right\},$$

$$Z_1^+ = \left\{ z^{0,1} \in Z_0^+ : \ x_{11}^i + x_{21}^i = y_{11}^i + y_{21}^i,\ i = 0,1 \right\}, \qquad (3.15)$$

то получим следующие включения:

$$Z_1^+ \subset Z_0^+ \subset Z^+ \subset R^8. \qquad (3.16)$$

Следствие. Система (3.5) в области (3.4) и управлениях (2.1), (2.3) неразрешима, если точка пересечения $M_{\overline{X}\overline{Y}}$ является серединой только для одного из отрезков $\overline{X}$ или $\overline{Y}$ – $M_{\overline{X}\overline{Y}} = M_{\overline{X}} \neq M_{\overline{Y}}$, или $M_{\overline{X}\overline{Y}} \neq M_{\overline{X}} = M_{\overline{Y}}$, т.е.

$$z^{0,1} \in Z^+ \qquad (3.17)$$

Таким образом, в классе управлений с одним переключением (2.1), (2.3) объекты X и Y могут избегать от столкновения в случае, когда отрезки (2.7) и (2.8) не пересекаются – $z^{0,1} \in Z^-$ или в случае, когда отрезки (2.7), (2.8) пересекаются,, однако выполняется условие $z^{0,1} \in Z^+ \setminus Z_0^+$ (3.7) (b).

В случае $z^{0,1} \in Z_0^+$, чтобы избежать столкновения, необходимо изменить способы управления. Покажем, что в этом случае в качестве управления объектом $\overline{Y}$, обеспечивающее прямолинейное перемещение, можно, в частности, использовать управления в совокупности с четырьмя свободными параметрами τ_1, v_1'', v_2', v_2'', $0 \le v_1'', v_2', v_2'' \le v_i^0$ следующих структур:

$$v_1(t) = \begin{cases} v_1^0, & t \in [0, \tau_1) \\ -v_1'', & t \in [\tau_1, T] \end{cases}, \quad v_2(t) = \begin{cases} v_2', & t \in [0, \tau_1) \\ -v_2'', & t \in [\tau_1, T] \end{cases}, \tag{3.18}$$

где

$$\tau_1 = \frac{v_1''}{v_1'' + v_1^0} T, \quad v_1'' = \frac{2v_1^0 (y_{11}^1 - y_{11}^0)}{T^2 v_1^0 - 2(y_{11}^1 - y_{11}^0)}, \quad v_2' = \frac{v_1^0 (y_{21}^1 - y_{21}^0)}{y_{11}^1 - y_{11}^0}, \tag{3.19}$$

$$v_2'' = \frac{2v_1^0 (y_{21}^1 - y_{21}^0)}{T^2 v_1^0 - 2(y_{11}^1 - y_{11}^0)}.$$

Не нарушая общности, положим, что $y_1^1 - y_1^0 \ge y_2^1 - y_2^0$. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что управления (3.18) удовлетворяют наложенным ограничениям (1.12), т.е.

$v_1'' < v_1^0$, $v_2', v_2'' \le v_2^0$.

Тогда интегрируя уравнения движения объекта Y (1.9) с краевыми условиями (1.10), (1.11) при управлениях (3.18), (3.19), получим

$$y_{11}(t) = \begin{cases} v_1^0 t^2 / 2 + y_{11}^0, & t \in [0, \tau_1) \\ -v_1''(T - t)^2 / 2 + y_{11}^1, & t \in [\tau_1, T] \end{cases}, \tag{3.20}$$

$$y_{21}(t) = \begin{cases} v_2' t^2 / 2 + y_{21}^0, & t \in [0, \tau_1) \\ -v_2''(T - t)^2 / 2 + y_{21}^1, & t \in [\tau_1, T] \end{cases}.$$

На плоскости (z_1, z_2) траектория движения объекта Y (3.20), соответствующая управлениям (3.18), (3.19), также представляет собой прямую линию. Пусть T_X – время перемещения до точки $z^p = M_{\overline{XY}} = (z_1^p, z_2^p)$ объекта X, а T_Y – объекта Y. X проходит через середину отрезка $\overline{X}$ в момент $t = \tau_{x1} = T/2$, а Y – через середину отрезка $\overline{Y}$ в момент T', которое определяется из условия $y_{i1}(T') = \frac{y_{i1}^0 + y_{i1}^1}{2}, i = 1,2$. С учетом (3.20), после некоторых упрощений получим $T' = T - \sqrt{\frac{\Delta y_{i1}}{v_i''}} = T - \sqrt{(T^2 - 2\Delta y_{11})/2}$. Из (2.1) и (2.2) имеем $2\Delta y_{11} < T^2/2$ и следовательно, $T' < T/2$. А это значит, что если $z^{0,1} \in Z_1^+$, т.е отрезки $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ центрально-симметричны, то столкновение не происходит. Теперь рассмотрим $z^{0,1} \in Z_0^+ \setminus Z_1^+$. Покажем, что в этом случае тоже объекты избегают столкновения. Так как $\tau_1 < T/2$, то возможны следующие два случая: 1) $T_Y < \tau_1$ и 2) $\tau_1 < T_Y < T/2$.

В случае 1) используя подобие треугольников $\Delta x^0 y^0 z^p$ и $\Delta x^0 y'^0 z^p$ (фиг.1), из (3.14) получим

$$\frac{T_X^2\sqrt{(u_1^0)^2+(u_2'')^2}\ /\ 2}{T^2\sqrt{(u_1^0)^2+(u_2'')^2}\ /\ 8}=\frac{T_Y^2\sqrt{(\mathrm{v}_1^0)^2+(\mathrm{v}_2')^2}\ /\ 2}{\sqrt{(\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2}\ /\ 2}$$

или

$$\frac{T_X^2}{T^2/4}=\frac{T_Y^2\sqrt{(\mathrm{v}_1^0)^2+(\mathrm{v}_2')^2}}{\sqrt{(\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2}},$$

откуда следует, что равенство $T_X=T_Y$ имеет место, когда

$$\frac{1}{T^2/4}=\frac{\sqrt{(\mathrm{v}_1^0)^2+(\mathrm{v}_2')^2}}{\sqrt{(\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2}}=\frac{\sqrt{1+(\Delta y_2/\Delta y_1)^2}}{\sqrt{(\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2}}=\frac{1}{\Delta y_1},$$

которое невозможно, поскольку $\Delta y_1<\Delta x_1=\dfrac{T^2}{4}$.

В случае 2) из (3.14) получим

$$\frac{T_X^2\sqrt{(u_1^0)^2+(u_2'')^2}\ /\ 2}{T^2\sqrt{(u_1^0)^2+(u_2'')^2}\ /\ 8}=\frac{\sqrt{(\Delta y_1-\mathrm{v}_1''(T-T_Y)^2/2)^2+(\Delta y_2-\mathrm{v}_2''(T-T_Y)^2/2)^2}}{\sqrt{(\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2}\ /\ 2}$$

или

$$\frac{T_X^2}{T^2/2}=1-\frac{(T-T_Y)^2}{T^2-2\Delta y_1}.$$

Полагая здесь $T_X=T_Y$, разрешив последнее относительно Δy_1 и подставив найденное в неравенство $T^2-2\Delta y_1>T^2/2$, получим неравенство

$$(T-2T_Y)^2<0,$$

которое не имеет места ни при каком T_Y.

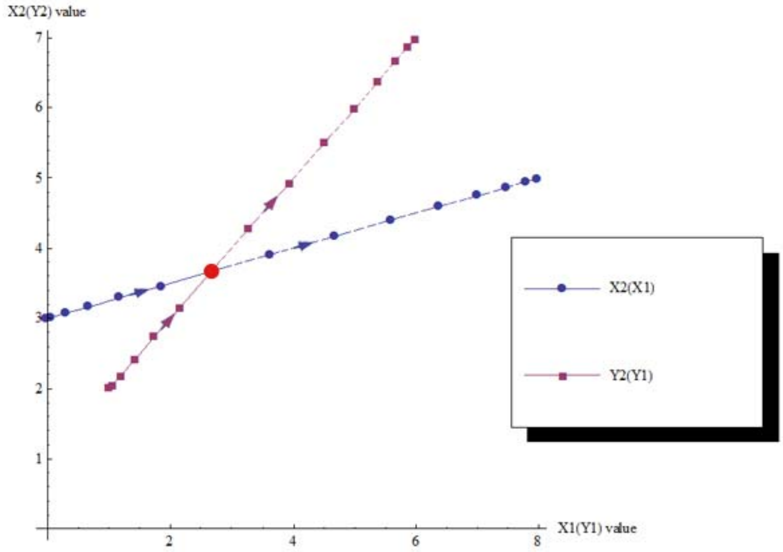
Таким образом, в классе управлений с одним переключением объекты X и Y избегают от столкновения при любом $z^{0,1}\in R^8$. В случае, когда отрезки (2.7) и (2.8) не пересекаются – $z^{0,1}\in Z^-$ или в случае, когда отрезки (2.7), (2.8) пересекаются, однако выполняется условие $z^{0,1}\in Z^+\setminus Z_0^+$ (3.7) (b), то используются управления (2.1), (2.3), а в случае, когда $z^{0,1}\in Z_0^+$ – (2.1), (2.3), (3.18), (3.19).

4. Расчётные результаты. В качестве иллюстрации приведём пример численной реализации описанного алгоритма управления объектами (1.9) при ограничениях (1.10)-(1.13). Начальные и конечные безразмерные данные задавались следующими:

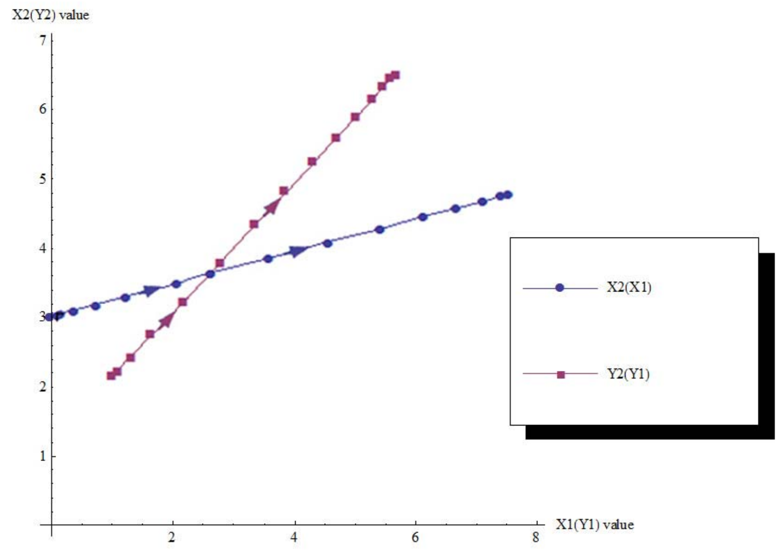
$$x^0=\begin{pmatrix}0 & 3\end{pmatrix},\ \dot{x}^0=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix},\ y^0=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix},\ \dot{y}^0=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$x^1=\begin{pmatrix}8 & 5\end{pmatrix},\ \dot{x}^1=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix},\ y^1=\begin{pmatrix}6 & 7\end{pmatrix},\ \dot{y}^1=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}.$$

Координатам (4.1) соответствует случай $z^{0,1}\in Z_0^+$ (3.15). Следовательно, при управлениях (2.1), (2.3) с параметрами $u_1'=u_1^0=1$, $u_2'=1/4$, $\mathrm{v}_1'=\mathrm{v}_2'=5/8$, $T=2\tau=4\sqrt{2}$ объекты сталкиваются (фиг.2). На фиг.2,3 сплошными линиями представлены траектории движения объектов на плоскости. Стрелками показаны направления движений точечных объектов X и Y. Значками (●) и (■) обозначены последовательные положения объектов X и Y в одинаковые моменты времени соответственно.



Фиг. 2



Фиг. 3

Во избежание столкновения, при тех же начальных и конечных положениях (4.1) объекты могут использовать управления (2.1), (2.3), (3.18), (3.19) с параметрами $u_1' = u_1^0 = 1$, $u_2' = 1/4$, $\tau = 2\sqrt{2}$ $\mathrm{v}_1' = \mathrm{v}_1^0 = 1, \mathrm{v}_1'' = 5/11$, $\mathrm{v}_2' = 1$, $\mathrm{v}_2'' = 5/11$, $\tau_1 = 5/2\sqrt{2}, T = 4\sqrt{2}$ (фиг. 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чахмахчян Р.Э. Управления движениями динамических объектов, уклоняющихся от столкновения //В сб. трудов международной школы – конференции молодых ученых "Механика": Агавнадзор, Армения, 24-28 сентября, 2009 г., с.337-342.
2. Аветисян В.В., Чахмахчян Р.Э. Ограниченные управления пространственными движениями двух динамических объектов, избегающих столкновения // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 4. С.59-70.
3. Аветисян В.В., Чахмахчян Р.Э. Оптимизация режимов управления двух динамических объектов, избегающих столкновения на плоскости //В сб.. научных трудов международной конференции: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Дилижан, 4-8 октября 2010г., с. 10-14.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392с.

Сведения об авторе:

Чахмахчян Рафаел Эдвардович, аспирант кафедры теории оптимального управления и приближённых методов, факультета математики и механики Ереванского государственного университета, (374 93) 28 52 24.

E-mail: rafayel.ch@gmail.com

Поступила в редакцию 25.03.2011