ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №3, 2011 Механика

УДК 531.36

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНО МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

ШАГИНЯН С.Г.

Ключевые слова: устойчивость движения, динамические системы, возмущения.
Key words: motion stability, dynamical systems, perturbation.

Շահինյան Ս.Գ.
Կայունության սահմանման մասին ինտեգրալով փոքր գրգռումների դեպքում

Ավելի քան քսան տարի ԵՊՀ մեխանիկայի ամբիոնում կատարվել է դինամիկ համակարգերի կայունության խնդիրների ուսումնասիրություն այն ենթադրությամբ, որ համակարգի վրա ժամանակի վերջավոր միջակայքում ազդում են ինտեգրալով փոքր գրգռող ուժեր: Տրվել է կայունության նոր սահմանում. «կայունություն ըստ ազդող ուժի»: Ստացվել են տեսական և կիրառական նշանակություն ունեցող արդյունքներ, որոնք տպագրվել են Հայաստանի և նախկին Խորհրդային Միության տարբեր գիտական հանդեսներում: Վերջին տարիների հետազոտությունների ու քննարկումների ընթացքում ցույց է տրվել, որ անհրաժեշտություն կա պարզաբանում մտցնելու տրված սահմանման մեջ:

Ներկայացվող աշխատանքը նվիրված է ըստ ազդող ուժի կայունության, սկզբում տրված և հեղինակի վերջին շրջանի աշխատանքներում բերվող սահմանումների պարզաբանմանը:

Shahinyan S.G.
About stability definition at integrally small indignations

The presented work is devoted to the clarification of definitions of stability in the current strength in the early works of the author and his works during the last period.

Задача устойчивости динамических систем при разных возмущающих факторах была рассмотрена многими авторами. Одним из первых, кто придал большое теоретическое и прикладное значение теории устойчивости при возмущающих факторах, был Н.Г.Четаев [1]. Затем появились работы И.Г.Малкина [2], Н.Н.Красовского [3], Х.Л.Массера [4] и др. В работе [1] рассмотрено влияние малых возмущающих сил на устойчивость движения динамической системы. В [2] доказана теорема об устойчивости при постоянно действующих малых возмущениях. В [3] определены достаточные условия, при которых решается задача устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем. В работах [5-7] изучается влияние структуры сил на устойчивость движения. Задача устойчивости при импульсных воздействиях рассматривается в работах [8-15].

За последние двадцать лет на кафедре теоретической механики ЕГУ начинается исследование задачи устойчивости движения динамических систем, когда на систему в конечном интервале времени действуют интегрально малые возмущающие силы. Предполагается, что возмущающие силы выбраны из довольно широкого класса функций, из класса обобщённых функций (они могут быть импульсными функциями).

Основой таких исследований является постановка задачи устойчивости динамических систем при интегрально малых возмущениях, поставленной доктором физ.-мат. наук, профессором М.С.Габриеляном. Дано новое определение устойчивости – «устойчивость по действующей силе». Во время выполнения исследований в этом направлении возникла необходимость изменить формулировку определения устойчивости по действующей силе.

Представляемая работа посвящена пояснению определений устойчивости по действующей силе в начальных работах автора и в его работах за последний период.

Необходимость в такого рода исследованиях диктуется практикой, когда приходится учитывать непрерывные возмущения, либо импульсные воздействия, способные качественно изменить поведение объекта. Особенность исследований заключается в том, что мы не станем следовать «букве» классического понятия устойчивости, а предложим видоизменение этого понятия, учитывающее специфику прикладных задач. Так мы допускаем возможность сильных возмущений объекта на конечном интервале времени. Если по истечении указанного промежутка времени возмущения в движении объекта окажутся малыми и сохранят свою малость в последующем, то указанные движения назовём устойчивыми при интегрально малых возмущениях. Очевидно, такое понятие устойчивости отличается от устойчивости по Ляпунову, так как допускает «флюктуационную» неустойчивость на некотором интервале. Однако эта неустойчивость не имеет фатального характера для работы объекта, так как на смену ей приходит устойчивый режим движения.

В первых работах [16,17], опубликованных в этом направлении, задача была поставлена следующим образом:

рассматривается система стационарных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(x_1,...,x_n), \quad (i = 1,2,...,n), \tag{1}$$

где $F_i(x_1,...,x_n)$ – непрерывные в R^n функции, удовлетворяющие условию Липшица в некоторой ограниченной области $G \subset R^n$ и $F_i(0,...,0) = 0,\ i = 1,2,...,n$.

Предполагается, что на систему (1) действуют возмущающие силы $\varphi_i(t)$:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1,...,x_n) + \varphi_i(t), \quad (i = 1,2,...,n), \tag{2}$$

причём,

$$\left\| \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\,dt \right\|_n = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{T} \varphi_i(t)\,dt \right)^2 \right]^{1/2} < \infty \tag{3}$$

и $\varphi_i(t) \equiv 0$ при $t > T,\ i = 1,...,n.$

Здесь t_0 – начальный момент времени, а $T > t_0$ – заданная величина.

Определение устойчивости по действующей силе сформулировано следующим образом:

О п р е д е л е н и е 1. Скажем, что решение $x \equiv 0$ системы (1) устойчиво по действующей силе, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ системы (2) $\|x(t)\|_n < \varepsilon$ при $t \ge T$, если $\|x(t_0)\|_n < \delta$ и $\left\| \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\,dt \right\|_n < \delta$.

В противном случае решение $x = 0$ назовём неустойчивым по действующей силе.

Дальнейшие исследования и обсуждения полученных результатов показали, что в некоторых системах условие $\|x(t)\|_n < \varepsilon$ выполняется, начиная с момента T, а в других системах – начиная с некоторого момента $t_* > T$. Например, при изучении задачи устойчивости по действующей силе системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax \tag{4}$$

получается следующий результат:

1. Когда все корни характеристического уравнения

$$\left| A - \lambda E \right| = 0 \tag{5}$$

равны нулю и этому корню соответствуют простые элементарные делители, неравенство $\|x(t)\|_n < \varepsilon$ выполняется при $t \geq T$.

Действительно, если все корни уравнения (5) равны нулю ($\lambda = 0$ с кратностью n) и этому корню соответствуют простые элементарные делители, то при помощи неособого линейного преобразования $Z = Bx$ $(\det B \neq 0)$ систему $\dot{x} = Ax + \varphi(t)$ можно привести к виду

$$\dot{Z} = \psi(t) \ , \tag{6}$$

где $Z \in R^n$, $\psi(t) = B\varphi(t)$.

Интегрируя систему (6), получим

$$Z(t) = \begin{cases} Z(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau) d\tau \ \text{ при } \ t < T \\ Z(t_0) + \int\limits_{t_0}^{T} \psi(t) dt \ \text{ при } \ t \geq T \end{cases} .$$

Следовательно, при $t \geq T$ имеем

$$\|Z(t)\| = \left\| Z(t_0) + \int\limits_{t_0}^{T} \psi(t) dt \right\| \leq \|Z(t_0)\| + \left\| \int\limits_{t_0}^{T} \psi(t) dt \right\| < \delta + \delta = 2\delta.$$

Теперь, если для любого числа $\varepsilon > 0$ выбираем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, получим $\|Z(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq T$.

2. Когда корни уравнения (5) удовлетворяют условиям:

а) $\lambda_1 = 0$ (с кратностью r_1), причем этому корню соответствуют простые элементарные делители;

б) $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ при $i = 2, ..., l$, тогда неравенство $\|x(t)\|_n < \varepsilon$ выполняется при $t \geq t_* > T$ [16, 17], причём момент времени t_* выбирается в зависимости от ε и от класса возмущений $\varphi(t)$.

В последних работах [19, 20] задача была поставлена следующим образом: рассматривается система нестационарных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_1, ..., x_n) \ , \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{7}$$

где $F_i(t, x_1, ..., x_n) : R^{n+1} \to R^1$ – непрерывные функции, удовлетворяющие всем условиям существования и единственности решения системы (7) в области

$$x_i \in R^1; \quad t \in [t_0; +\infty) \tag{8}$$

и $F_i(t, 0, 0, ..., 0) \equiv 0; \quad i = 1, 2, ..., n.$

Пусть на систему (7) действуют возмущающие силы $\varphi_i(t)$, удовлетворяющие соотношениям (3).

Дифференциальные уравнения системы (7) при наличии возмущающих сил $\varphi_i(t)$ примут вид

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_1, ..., x_n) + \varphi_i(t), \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{9}$$

Предполагаем, что возмущения $\varphi_i(t)$ такие, что решения системы (9) также существуют при всех $t \geq t_0$.

Определение устойчивости по действующей силе дано для системы вида (7).

Но, исходя из сделанных выше рассуждений, необходимо сделать некоторые объяснения и обобщения.

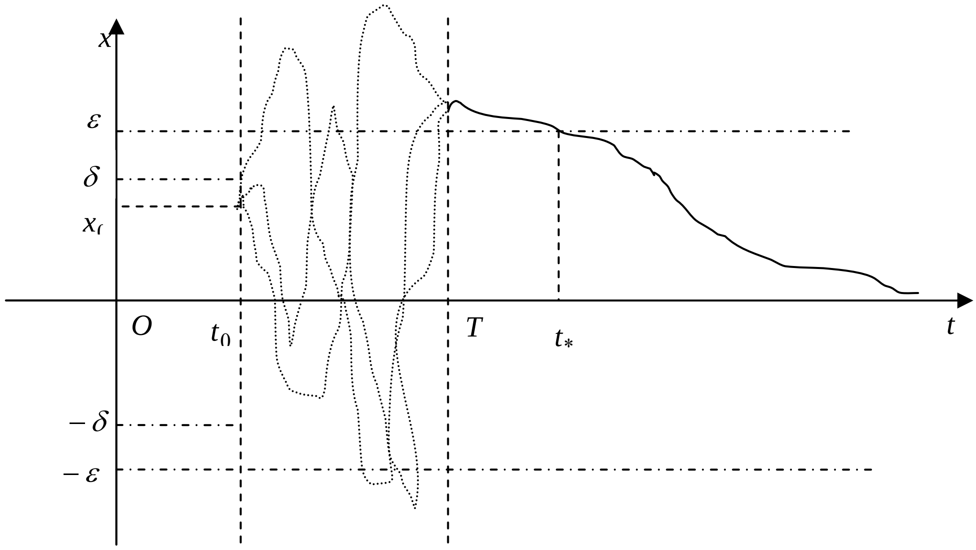
Обозначим через Φ некоторый класс возмущений $\varphi(t)$, удовлетворяющих соотношениям (3).

Назовём устойчивость в этом случае «устойчивостью при интегрально малых возмущениях» и сформулируем определение устойчивости следующим образом:

О п р е д е л е н и е 2. Решение $x = 0$ системы (7) называется устойчивым при интегрально малых возмущениях, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta > 0$ и момент времени $t_* \geq T$ такие, что для любого решения $x(t)$ системы (9)

$\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_*$, если $\|x(t_0)\| < \delta$ и $\left\| \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\, dt \right\| < \delta$,

где $\varphi(t) -$ любое возмущение из заданного класса Φ (фиг.1).



Фиг. 1.

Так как нас интересует поведение системы после действия на неё $\varphi(t)$ возмущений, то момент t_* (зависимо от исследуемой системы) может быть или больше T [18-20], или равно T.

Отметим, что доказанные в [16-20] теоремы и полученные нами результаты остаются верными и в такой формулировке определения устойчивости при интегрально малых возмущениях.

Отметим ещё, что идея следования, начиная с некоторого момента времени t_*, поведению решения системы, не нова в теории устойчивости. Об этом говорилось ещё в работах Левинсона Н. и Йосидзавы Т. (см. [21], стр. 289).

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 176с.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530с.
3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211с.
4. Massera J.L. On Lyapounoff's condition of stability, Ann. Of Math. 1949, vol.50, №3, p.705-721.
5. Матросов В.М. К вопросу устойчивости гироскопических систем с диссипацией // Тр. Казанского авиационного института. 1959. Вып. 45. С.63-76.
6. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 309с.
7. Байков А.Е., Красильников П.С. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе. // ПММ. 2010. Т.74. Вып. 1. С.74-88.
8. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224с.
9. Барбашин Е.А., Тавуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 299с.
10. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309с.
11. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 287с.
12. Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петербург, 1993. 266с.
13. Гургула С.И., Гургула С.И. Исследование устойчивости решений импульсных систем вторым методом Ляпунова. //Укр. мат. журнал. 1982. 34. №1. С.100-103.
14. Bainov D.D., Simeonov P.S. Systems with impulse effect. Stability, Theory and Applications, Chichester: Ellis horwood limited, 1989, 259 p.
15. Гладилина Р.И., Игнатьев А.О. Об устойчивости периодических систем с импульсным воздействием. //Мат.заметки. 2004. Т.76. №1. С.44-51.
16. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости. //Ученые записки ЕГУ. 1986. №2. С.39-46.
17. Габриелян М.С., Шагинян С.Г. О построении функции Ляпунова.// Ученые записки ЕГУ. 1987. №1. С.39-45.
18. Шагинян С.Г. Об устойчивости по действующей силе нелинейных нестационарных систем. //В сб. научных трудов международной конференции «Устойчивость и процессы управления». Санкт-Петербург: 2005. С.486-592.
19. Шагинян С.Г. Об устойчивости систем нелинейных нестационарных уравнений при интегрально малых возмущениях. //Труды ИПММ НАН Украины, Донецк. 2006. Вып.12. С.194-199.
20. Шагинян С.Г. Вопросы стабилизации не вполне управляемых систем при интегрально малых возмущениях. Проблемы нелинейного анализа в технических системах. Казань: 2008. Вып. 2(30). Т.14. С.53-69.
21. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472с.

Сведение об авторе:

Шагинян Смбат Григорьевич – кандидат физ-мат наук, доцент,
Ереванский Государственный Университет, факультет математики и механики.
shahinyan@ysu.am , тел. (010) 66-37-41, (091) 21-55-82

Поступила в редакцию 10.03.2009