ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №3, 2011 Механика

**УДК 539.3**

# ВЗАИМНЫЕ ТРАНСФОРМАЦИИ МАГНИТОУПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РАЗНЫХ ПОЛЯРИЗАЦИЙ

**БЕЛУБЕКЯН М.В., ГЕВОРКЯН А.В., КАЗАРЯН К.Б.**

**Ключевые слова:** трансформация, «вакуумный слой», поляризация, волны.
**Key words:** transformation, «vacuum layer», polarization, waves.

**Բելուբեկյան Մ.Վ., Գևորգյան Ա.Վ., Ղազարյան Կ.Բ.**
**Տարաբևեռացած մագնիսաառաձգական մակերևութային ալիքների փոխադարձ փոխակերպումները**

Հետազոտված է մագնիսաառաձգական մակերևութային հորիզոնական և ուղղահայաց բևեռացված ալիքների տարածման հարցը «վակուումային շերտով» զատած վերջավոր հաղորդիչ կիսատարածություններում՝ բաժանման եզրին զուգահեռ արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայությամբ:

Ցույց է տրված, որ կիսատարածություններից մեկում հորիզոնական բևեռացված մագնիսաառաձգական մակերևութային ալիքների տարածումը «վակուումային շերտի» միջոցով մյուս կիսատարածությունում կարող է ի հայտ բերել մագնիսաառաձգական մակերևութային ուղղահայաց բևեռացված ալիքների տարածում և ընդհակառակը:

**Belubekyan M.V., Gevorgyan A.V., Ghazaryan K.B.**
**Mutual transformations of magnetoelastic surface waves of different polarizations**

The problem of the magnetoelastic surface horizontal and vertically polarized waves in a finitely conducting half-spaces separated by a «vacuum layer» with the presence of a constant external magnetic field parallel to the interface has been studied .

The implementation of mutual transformations of magnetoelastic surface waves of different polarization by a «vacuum layer» has been shown.

Исследуется вопрос распространения магнитоупругих поверхностных сдвиговых и вертикально поляризованныих волн в конечнопроводящих полупространствах, отделенных «вакуумным слоем», при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе раздела.

Показано, что посредством «вакуумного слоя» осуществляются взаимные трансформации магнитоупругих поверхностных волн разных поляризаций.

Исследуется вопрос распространения магнитоупругих поверхностных сдвиговых и вертикально поляризованных волн в конечнопроводящих полупространствах, отделенных «вакуумным слоем», при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе раздела.

Пусть упругие конечнопроводящие полупространства отнесены к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ : ось $x_1$ направлена вдоль границы, ось $x_2$ – вглубь одного из полупространств. Начальное магнитное поле $\vec{H}_0(H_0,0,0)$ направлено по оси $x_1$ .

Исходя из характера поставленной задачи, не нарушая общности, можно считать, что материалы полупространств являются одинаковыми.

Магнитная проницаемость материала полупространства принимается равной единице.

Учитывая, что в антиплоской деформации поле смещений и характеристики индуцированного электромагнитного поля в области $x_2 > 0$ имеют вид

$$\vec{u} \equiv [0,0,u_3(x_1,x_2,t)], \quad \vec{h} \equiv [0,0,h_3(x_1,x_2,t)], \; \vec{e} \equiv [e_1(x_1,x_2,t), e_2(x_1,x_2,t), 0],$$

из системы линеаризованных уравнений магнитоупругости, описывающей поведение электромагнитного поля и движение упругой проводящей среды, при пренебрежении током смещения относительно тока проводимости, получим следующую систему уравнений [1-3]

$$c_2^2\nabla^2 u_3 + \frac{H_0}{4\pi\rho}\partial_1 h_3 = \partial_t^2 u_3$$

$$\nabla^2 h_3 - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\partial_t h_3 = -\frac{4\pi\sigma}{c^2}H_0\partial_1\partial_t u_3 \;, \quad x_2 > 0 \tag{1}$$

где $c_2^2 = G/\rho$ – квадрат скорости поперечных волн среды, $G$ – модуль сдвига, $\rho$ – плотность материала полупространства, $\sigma$ – удельная электропроводимость, $c$ – электродинамическая постоянная.

Для «вакуумного слоя» в области $-h < x_2 < 0$ имеем уравнения Максвелла и вытекающее из них волновое уравнение

$$\mathrm{rot}\vec{h}^* = c^{-1}\partial_t\vec{e}^*, \mathrm{rot}\vec{e}^* = c^{-1}\partial_t\vec{h}^*, \mathrm{div}\vec{h}^* = 0, \nabla^2\vec{h}^* = c^{-2}\partial_t^2\vec{h}^*, \tag{2}$$

$$\vec{h}^* \equiv [h_1^*(x_1,x_2,t), h_2^*(x_1,x_2,t), h_3^*(x_1,x_2,t)],$$

$$\vec{e}^* \equiv [e_1^*(x_1,x_2,t), e_2^*(x_1,x_2,t), e_3^*(x_1,x_2,t)]$$

В области $x_2 < -h$ в случае плоской деформации поле смещений и характеристики индуцированного электромагнитного поля имеют вид:

$$\vec{u} \equiv [u_1(x_1,x_2,t), u_2(x_1,x_2,t), 0], \quad \vec{h} \equiv [h_1(x_1,x_2,t), h_2(x_1,x_2,t), 0],$$

$$\vec{e} \equiv [0,0,e_3(x_1,x_2,t)]$$

Из системы линеаризованных уравнений магнитоупругости, при пренебрежении током смещения относительно тока проводимости получим следующую систему уравнений:

$$c_1^2\partial_1^2 u_1 + c_2^2\partial_2^2 u_1 + (c_1^2 - c_2^2)\partial_1\partial_2 u_2 = \partial_t^2 u_1$$

$$c_2^2\partial_1^2 u_2 + c_1^2\partial_2^2 u_2 + (c_1^2 - c_2^2)\partial_1\partial_2 u_1 + \frac{H_0}{4\pi\rho}\partial_1 h_2 - \frac{H_0}{4\pi\rho}\partial_2 h_1 = \partial_t^2 u_2$$

$$Dh_1 = 4\pi\sigma c^{-2}H_0\partial_2\partial_t u_2 \qquad x_2 < -h \tag{3}$$

$$Dh_2 = -4\pi\sigma c^{-2}H_0\partial_1\partial_t u_2$$

$$D \equiv \nabla^2 - 4\pi\sigma c^{-2}\partial_t, \; \partial_m \equiv \frac{\partial}{\partial x_m}, \; \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial_t}, \; m = 1,2$$

$\nabla^2 \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2$, $c_1^2 = \dfrac{\lambda + 2G}{\rho}$ – квадрат скорости продольных волн среды.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\partial_2 u_3 = 0, \; h_3 = h_3^*, \; e_1 = e_1^*, \; x_2 = 0 \tag{4}$$

$$\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 = 0\,,\quad \partial_2 u_2 + (1-2\theta_*)\partial_1 u_1 = 0\,,\ \theta_* = c_2^2 \cdot c_1^{-2} < 1$$

$$h_1 = h_1^*\,,\ h_2 = h_2^*\,,\ e_3 = e_3^*\,, \qquad x_2 = -h\,. \tag{5}$$

Теперь решения уравнения (2) для «вакуумного слоя» построим так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

$$h_1^* = h_2^* = 0\,,\ x_2 = 0 \ \text{и}\ \ h_3^* = 0\,,\ x_2 = -h\,. \tag{6}$$

Решения уравнения (2) запишем в виде

$$h_r^* = \left(A_r^* e^{k\nu_* x_2} + B_r^* e^{-k\nu_* x_2}\right) e^{i(kx_1 - \omega t)},$$

$$\nu_* = \sqrt{1 + c_2^2 \cdot c^{-2} z^2} \approx 1\,,\ z = \frac{i\omega}{kc_2},\ \ r = 1,2,3.$$

Удовлетворяя условиям (6), получим

$$h_1^* = A^* \cdot \mathrm{sh}(k\nu_* x_2) \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} \tag{7}$$

$$h_2^* = B^* \cdot \mathrm{sh}(k\nu_* x_2) \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} \qquad -h < x_2 < 0 \tag{8}$$

$$h_3^* = C^* \cdot \mathrm{sh}(k\nu_* (x_2 + h)) \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} \tag{9}$$

В работе [4] показано, что в конечнопроводящем полупространстве могут распространяться магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны, а в случае внешнего постоянного магнитного поля, перпендикулярного к границе конечнопроводящего полупространства, такие волны отсутствуют [5].

В [4] решения системы (1) записаны в виде

$$u_3 = \left(B_+ \cdot e^{-k\lambda_+ x_2} + B_- e^{-k\lambda_- x_2}\right) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \tag{10}$$

$$h_3 = \left(\frac{ik\alpha z H_0}{\lambda_+^2 + \alpha z - 1} B_+ e^{-k\lambda_+ x_2} + \frac{ik\alpha z H_0}{\lambda_-^2 + \alpha z - 1} B_- e^{-k\lambda_- x_2}\right) e^{i(kx_1 - \omega t)} \tag{11}$$

$$\lambda_\pm = \left\{1 - \frac{1}{2}\alpha \cdot z + \frac{1}{2} z^2 \pm \left[\frac{1}{4} z^2 (z+\alpha)^2 + \alpha s z\right]^{1/2}\right\}^{1/2},$$

$$\mathrm{Re}\,\lambda_\pm > 0\,,\ z = \frac{i\omega}{kc_2},\ \alpha = \frac{4\pi\sigma c_2}{kc^2},\quad \nu_2^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}\,,\ s = \frac{\nu_2^2}{c_2^2}.$$

Подставляя выражения (9)-(11) в граничные условия (4), получим систему алгебраических однородных линейных уравнений для произвольных постоянных и из условия совместности этой системы получим дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- \left[1 - \nu_*^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot z \cdot \mathrm{th}(k\nu_* h)(\lambda_+ + \lambda_-) c_2^2 \cdot c^{-2}\right] + z^2 + 1 = 0. \tag{12}$$

Принимая во внимание, что

$$\left|1 - \nu_*^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot z \cdot \mathrm{th}(k\nu_* h)(\lambda_+ + \lambda_-) c_2^2 \cdot c^{-2}\right| \approx 1,\ \nu_* \approx 1,\ \mathrm{th}(kh), < 1,$$

уравнение (12) переходит в уравнение

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- = -1 - z^2\,, \tag{13}$$

которое, в свою очередь, сводится к кубическому уравнению [4]

$$z^3 + \alpha \cdot z^2 + z + \alpha(1+s) = 0 \tag{14}$$

Алгебраическое уравнение (14) имеет одно действительное отрицательное решение, не соответствующее условиям задачи, и комплексно сопряженное решение с положительной действительной частью.

$$z_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{Q}+\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{Q}-\frac{q}{2}}\right) - \frac{\alpha}{3} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{Q}+\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{Q}-\frac{q}{2}}\right), \qquad (15)$$

$$Q = \frac{q^2}{4} + \frac{P^3}{27} = \frac{1+s}{27}\alpha^4 + \left(\frac{s^2}{4}+\frac{s}{3}+\frac{2}{27}\right)\alpha^2 + \frac{1}{27} > 0,$$

$$p = 1 - \frac{\alpha^2}{3}, \qquad q = \frac{2}{27}\alpha^3 + \left(\frac{2}{3}+s\right)\alpha > 0.$$

Предположим, что искомая волна распространяется по положительному направлению оси $x_1$, то есть в формуле (15) берется знак плюс. Тогда выражение смещения (10) запишется в виде:

$$u_3 = B_+ e^{-k\operatorname{Re}\lambda_+ x_2} \cdot e^{ik\left(x_1 - \operatorname{Im}\lambda_+ \cdot x_2 - \operatorname{Im} z_0 c_2 t\right)} \cdot e^{-kc_2 \operatorname{Re} z_0 \cdot t} +$$
$$+ B_- e^{-k\operatorname{Re}\lambda_- x_2} \cdot e^{ik\left(x_1 - \operatorname{Im}\lambda_- \cdot x_2 - \operatorname{Im} z_0 \cdot c_2 t\right)} \cdot e^{-kc_2 \operatorname{Re} z_0 t} \qquad (16)$$

Таким образом, в области $x_2 > 0$ в конечнопроводящем полупространстве распространяются затухающие магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны с волновыми векторами $\vec{k}_\pm\left(k, -k\operatorname{Im}\lambda_\pm, 0\right)$ с соответствующими фазовыми скоростями

$$\mathrm{v}_\pm = \frac{\operatorname{Im} z_0}{\sqrt{1+\left(\operatorname{Im}\lambda_\pm\right)^2}} \cdot c_2, \qquad (17)$$

а вдоль границы распространяется поверхностная затухающая волна с фазовой скоростью

$$\mathrm{v}_p = \operatorname{Im} z_0 \cdot c_2 . \qquad 18)$$

В области $x_2 < -h$ решения системы будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \cdot e^{k\lambda x_2} \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} . \qquad (19)$$

Подставляя (19) в (3), приходим в конечном итоге к характеристическому уравнению в следующем виде:

$$\eta^3 + a\eta^2 + b\eta + c_0 = 0, \quad \lambda^2 = \eta, \qquad (20)$$

$$a = -\left[\left(1+\theta_*\right)z^2 - \alpha\left(1-\theta_* s\right)z + 3\right],$$

$$b = \left(z^2+1\right)\left(\theta_* z^2 + 1\right) + \left(1-\alpha z\right)\left(\left(1+\theta_*\right)z^2 + 2\right) + \alpha s\left(1+\theta_* + \theta_*^{-1}\right)z,$$

$$c_0 = \left(\theta_* z^2 + 1\right)\left(\left(\alpha z - 1\right)\left(z^2+1\right) - \alpha s z\right).$$

Корни уравнения (20) будут

$$\lambda_3^2 = \eta_3 = I_1 + I_2 - \frac{a}{3},$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \eta_{1,2} = -\frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{a}{3} \pm \frac{I_1 - I_2}{2} \cdot i\sqrt{3},$$

$$I_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad I_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \; p = b - \frac{a^2}{3},$$

$$q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c_0, \quad Q = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Так как рассматриваются поверхностные волны, то из корней уравнения (20) выберем только те, которым соответствует уменьшение амплитуд волны с глубиной. Тогда решения системы (3) запишутся в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r \cdot e^{k\lambda_r x_r} \\ B_r \cdot e^{k\lambda_r x_r} \\ C_r \cdot e^{k\lambda_r x_r} \\ D_r \cdot e^{k\lambda_r x_r} \end{pmatrix} \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} \qquad r = 1,2,3 \tag{21}$$

(суммировать по $r$)

$\mathrm{Re}(\lambda_r) > 0$

$$B_m = -\frac{\lambda_m^2 - z^2 - \theta_*^{-1}}{i(\theta_*^{-1} - 1)\lambda_m} A_m, \quad D_m = \frac{-k\alpha z_0 H_0}{\theta_*^{-1} - 1} \cdot \frac{\lambda_m^2 - z^2 - \theta_*^{-1}}{\lambda_m(\lambda_m^2 + \alpha z - 1)} A_m$$

$$C_m = i\lambda_m \cdot D_m = \frac{-ik\alpha z H_0}{\theta_*^{-1} - 1} \cdot \frac{\lambda_m^2 - z^2 - \theta_*^{-1}}{\lambda_m^2 + \alpha z - 1} A_m, \qquad m = 1,2,3$$

Подставляя выражения (21) в граничные условия (5), получим систему алгебраических однородных линейных уравнений для произвольных постоянных и из условия совместности этой системы получим дисперсионное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{th}\left(kh\right) + \lambda_1\right) g_1\left(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2\right) + \left(\mathrm{th}\left(kh\right) + \lambda_2\right) g_2\left(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3\right) + \\ &+ \left(\mathrm{th}\left(kh\right) + \lambda_3\right) g_3\left(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\right) = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\beta_m = \frac{\left(\theta_*^{-1} - 2\right)\lambda_m^2 + z^2 + \theta_*^{-1}}{\lambda_m}, \qquad g_m = \frac{\lambda_m^2 - z^2 - \theta_*^{-1}}{\lambda_m\left(\lambda_m^2 + \alpha z - 1\right)},$$

$$\gamma_m = \lambda_m^2 - z^2 - 3 + 2\theta_* \tag{23}$$

При $kh \to 0$ из (12) получим дисперсионное уравнение задачи распространения магнитоупругих поверхностных сдвиговых волн в конечнопроводящем полупространстве с граничными условиями

$$\sigma_{23} = 0, \quad h_3 = 0, \quad x_2 = 0 \tag{24}$$

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- = -1 - z^2, \tag{25}$$

а из (22) будем иметь дисперсионное уравнение задачи распространения магнитоупругих поверхностных вертикально поляризованных волн в конечнопроводящем полупространстве с граничными условиями

$$\sigma_{21}=\sigma_{22}=0,\ h_1=0,\ x_2=0 \tag{26}$$

$$\lambda_1 g_1\left(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2\right)+\lambda_2 g_2\left(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3\right)+\lambda_3 g_3\left(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1\right)=0. \tag{27}$$

При больших $kh \gg 1$ из (12) имеем дисперсионное уравнение, полученное в [4], а соотношение (22) сводится к дисперсионному уравнению задачи распространения магнитоупругих поверхностных вертикально поляризованных волн в конечнопроводящем полупространстве

$$\begin{gathered}\left(1+\lambda_1\right)g_1\left(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2\right)+\left(1+\lambda_2\right)g_2\left(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3\right)+\\+\left(1+\lambda_3\right)g_3\left(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1\right)=0.\end{gathered} \tag{28}$$

При отсутствии внешнего магнитного поля, то есть $s=0$, тогда $\eta_1=\lambda_1^2=1+z^2$, $\eta_2=\lambda_2^2=1+\theta_* z^2$, $\eta_3=\lambda_3^2=1-\alpha z$ являются корнями уравнения (20). В этом случае дисперсионное уравнения (22) переходит в уравнение

$$\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2=0 \tag{29}$$

$$\beta_1=\theta_*^{-1}\left(1-\theta_*\right)\lambda_1^{-1}\left(z^2+2\right),\qquad \beta_2=2\theta_*^{-1}\left(1-\theta_*\right)\lambda_2^{-1}\left(1+\theta_* z^2\right),$$

$$\gamma_1=-2\left(1-\theta_*\right),\qquad \gamma_2=-\left(1-\theta_*\right)\left(z^2+2\right).$$

После простых преобразований приходим к известному дисперсионному уравнению Рэлея

$$\left(2-\eta_R\right)^2=4\cdot\sqrt{1-\eta_R}\cdot\sqrt{1-\theta_*\eta_R},\ \ \eta_R=\mathrm{v}_R^2\cdot c_2^{-2}<1. \tag{30}$$

Таким образом, результаты решения рассматриваемой задачи показывают**:** магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны посредством «вакуумного слоя» могут порождать распространение магнитоупругих поверхностных вертикально поляризованных волн в конечнопроводящем полупространстве $x_2<-h$ и наоборот, т.е. фактически посредством «вакуумного слоя» осуществляются взаимные трансформации магнитоупругих поверхностных волн разных поляризаций.

Электромагнитные возмущения (7) – (9) в области $-h<x_2<0$ выявляют одновременное распространение магнитоупругих поверхностных волн разных поляризаций в конечнопроводящих полупространствах, отделенных «вакуумным слоем».

.

ЛИТЕРАТУРА


1. Новацкий В.В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 864 с.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды.Т.1. М.: Наука, 1983. 521 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 616 с.
4. Геворкян А.В. Магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны в конечнопроводящем полупространстве. // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. № 1-2. С.44-52.
5. Белубекян М.В., Геворкян А.В. Магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны в конечнопроводящей среде. // Докл. НАН Армении. 1995. Т. 95. № 2. С.86-88.

**<u>Сведения об авторах:</u>**

**Белубекян Мелс Вагаршакович** – Профессор, кандидат физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24$^{б}$
Тел.: (+37410)52-15-03; E-mail: mbelubekyan@sci.am

**Геворкян Артак Вараздатович** – Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (+37477)02-88-89, E-mail: AGevorgyanV@gmail.com

**Казарян Карен Багратович** – Доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (+37455)22-73-95, E-mail: ghkarren@gmail.com

Поступила в редакцию 11.03.2011