ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №3, 2011 Механика

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

МОВСИСЯН Л.А.

Ключевые слова: сдвигающее напряжение, изгибающий момент, устойчивость, критическое значение, параметрические колебания.

Keywords: tangential stress, bending moment, stability, critical rate, parametrical vibrations.

Մովսիսյան Լ.Ա.

Գլանային թաղանթի համար մի քանի ոչ դասական խնդիրներ

Գլանային թաղանթի համար դիտարկվում են կայունության մի քանի միաչափ խնդիրներ, երբ նախնական վիճակը բնութագրվում է միայն շոշափող լարումներով կամ ծռող մոմենտով: Գտնված են նրանց համար կրիտիկական արժեքները կամ էլ պարամետրական տատանումների պայմանները:

Movsisyan L.A.

One some non-classical problems stability of cylindrical shells.

The problems of stability for cylindrical shells, when initial states described by tangential stresses or bending moments are investigated. For them the critical values of parametrs and conditions of beginning of parametrical vibrations are obtained.

Для цилиндрической оболочки рассмотрены некоторые одномерные задачи, когда начальные состояния характеризуются сдвигающими напряжениями или изгибающими моментами. Для них получены критические значения и условия возникновения параметрических колебаний.

Классические уравнения устойчивости для оболочек выведены в предположении, что начальное напряженное состояние безмоментное и в уравнениях удерживаются только члены нелинейного происхождения от углов поворота. При рассмотрении конкретных задач даже с начально моментным состоянием обычно брались только начальные тангенциальные усилия ([1], стр.561-565).

В работе [2] выведены уравнения устойчивости цилиндрических оболочек уже с удержанием всех нелинейных, опять только связанные с углом поворота. Оказалось, что помимо традиционно тангенциальных усилий, появляются также новые члены от начальных перерезывающих усилий. При рассмотрении конкретных примеров существенное влияние начального перерезывающего усилия наблюдалось только в одном случае [2,3].

В работе [4] получены уравнения устойчивости пластин, следуя [5], удерживая нелинейные члены как от углов поворота, так и от удлинений и сдвигов. Такие уравнения позволяют рассмотреть задачи, начальные напряжённые состояния которых характеризуются только перерезывающими усилиями или моментами, как например, [6].

Ниже приводится ряд задач, для которых начальные напряжённые состояния характеризуются только перерезывающими усилиями или изгибающим моментом. В этом и заключается название настоящей статьи. Эти задачи в некотором смысле имеют эталонный характер. Для каждого примера приводятся соответствующие уравнения. Общие уравнения (двумерные приводятся в конце статьи), заметим только, что они не позволяют метода разделения переменных. Как в [4], так и здесь, автор не претендует на создателя новой теории устойчивости тонких деформируемых систем.

В [7] получены общие уравнения устойчивости оболочек, однако, рассмотренные здесь задачи из полученных там уравнений не поддаются исследованию.

1. Имеется бесконечно длинная цилиндрическая оболочка (или круговое кольцо), на внешней и внутренней поверхностях которой действуют круговые сдвигающие напряжения интенсивности S в противоположных направлениях. Единственным начальным кинетическим воздействием будет перерезывающее усилие $N_2^0 = Sh$.

Уравнения устойчивости в этом случае будут*)

$$\begin{gathered}
\frac{d}{d\beta}\left(T_2 - N_2^0\omega_1\right) + \frac{1}{R}\left(\frac{dM_2}{d\beta} - N_2^0\varepsilon_2\right) = 0, \\
\frac{d}{d\beta}\left(\frac{dM_2}{d\beta} - N_2^0\varepsilon_2\right) - \frac{1}{R}\left(T_2 - N_2^0\omega_1\right) = 0,
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где

$$\begin{gathered}
T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\varepsilon_2 \quad , \quad M_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{d^2w}{d\beta^2}, \\
\omega_1 = \frac{dw}{d\beta} \quad , \qquad \varepsilon_2 = \frac{dv}{d\beta} + \frac{w}{R}.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в (1.1), решение полученной системы относительно перемещений будем искать в виде

$$\begin{gathered}
w = f_n^{(1)}\cos\frac{n\beta}{R} + f_n^{(2)}\sin\frac{n\beta}{R}, \\
v = \varphi_n^{(1)}\cos\frac{n\beta}{R} + \varphi_n^{(2)}\sin\frac{n\beta}{R} \ , \ n = 1, 2\ldots
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Тогда минимальное значение S, при котором происходит потеря устойчивости, получается при $n = 1$, и это значение есть

---

*) Обозначения общепринятые. Если принимать, что на внешней и внутренней поверхностях цилиндра действуют соответственно усилия S_2 и S_1, то условие равновесия (хотя это необязательно) будет $S_2\left(1 + h/R\right) = S_1\left(1 - h/R\right)$ или $S_2 \approx S_1\left(1 - h/2R\right)$. Как известно, точность классической теории оболочек такова: $1 \pm h/R \approx 1$. Таким образом, принимая $S_1 = S_2 = S$, находимся в пределах точности этой теории.

$$\left|S_{\text{кр}}\right| = \frac{Eh}{2\sqrt{3}\left(1-\nu^2\right)R} \ . \tag{1.4}$$

Следует отметить, что формула (1.4) очень похожа на формулу для критического значения цилиндра при осевом сжатии $P_{\text{кр}} = \dfrac{Eh}{\sqrt{3\left(1-\nu^2\right)}R}$.

В этой и последующих задачах для критических параметров выражение получается в квадратах. Это естественно, так как при изменении направления внешних воздействий получится то же значение, но с обратным знаком.

2. Имеется цилиндрическая оболочка конечной длины l. Сдвигающие напряжения интенсивностью S действуют в противоположных направлениях на внешней и внутренней поверхностях оболочки вдоль образующих цилиндра. Единственная начальная кинетическая величина – перерезывающее усилие

$N_1^0 = Sh$.

Уравнения устойчивости в перемещениях будут

$$\begin{gathered}\frac{E}{1-\nu^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}+\nu\frac{w}{R}\right)-S\frac{d^2w}{dx^2}=0,\\ D\frac{d^4w}{dx^4}+Sh\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{1}{R}\left(\nu\frac{du}{dx}+\frac{w}{R}\right)=0.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Система (2.1) при условии, что на концах отсутствуют продольные усилия, сводится к

$$D\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{S^2h(1-\nu^2)}{E}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{Eh}{R^2}w=0 \, . \tag{2.2}$$

По виду, уравнение (2.2) похоже на случай с осевым сжатием.

Изучим два случая:

1) на концах заданы условия –

$w = w'' = 0$ при $x = 0$ и $x = l$.

Если искать решение (2.2) в виде

$$w = f\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{2.3}$$

то для критического значения S получим:

$$\left|S_{\text{кр}}^0\right| = E\sqrt[4]{\frac{h^2}{3R^2\left(1-\nu^2\right)^3}} \ , \tag{2.4}$$

при этом, количество полуволн будет

$$n = \frac{l}{\pi}\sqrt[4]{\frac{12\left(1-\nu^2\right)}{R^2h^2}} \, . \tag{2.5}$$

критическое напряжение для стержня есть

$$\left|S_{\text{кр}}^0\right| = E\frac{\pi h}{2l}\sqrt{\frac{1}{3}} \, . \tag{2.6}$$

Интересен ещё случай, когда помимо сдвигающих усилий действует ещё осевое сжатие с интенсивностью p. Тогда комбинация общих воздействий, при которой происходит потеря устойчивости, определится формулой

$$S^2 h + \frac{pE}{1-\nu^2} = E\frac{h^3}{R^2}\sqrt{\frac{1}{3\left(1-\nu^2\right)}} . \tag{2.7}$$

2) Если края оболочки заделаны:

$$w = w' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l , \tag{2.8}$$

решение уравнения (2.2)

$$w = C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x + C_3 \cos k_2 x + C_4 \sin k_2 x ,$$

удовлетворяя условиям (2.6), для определения критического значения S получаем

$$\delta^2 \sin k_1 l \sin k_2 l + \cos k_1 l \cos k_2 l = 1 . \tag{2.9}$$

Здесь

$$k_1 = A^{1/2}\delta\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{\delta^4}}\right)^{1/2}, \qquad k_2 = A^{1/2}\delta\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\delta^4}}\right)^{1/2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3\left(1-\nu^2\right)}}{hR}, \qquad \delta = \frac{S}{S^0_{\text{кр}}} > 1 , \tag{2.10}$$

т.е. $\delta_{\text{кр}}$ есть отношение критического значения для S данной задачи к $S^0_{\text{кр}}$ из (2.4).

В табл.1 приведены критические значения $\delta_{\text{кр}}$ в зависимости от величины

$$\alpha = 1.285\frac{l}{R}\sqrt{\frac{R}{h}} . \tag{2.11}$$

Таблица 1

$\delta_{\text{кр}}$	1.005	1.01	1.02	1.05	1.06	1.1	1.2	1.5	1.7
α	139.9	31.29	21.94	13.12	12.42	9.335	6.204	3.268	2.749

3. Задачи устойчивости, когда начальные напряжённые состояния обусловлены поверхностными сдвигами, можно рассматривать как в случае, когда они не зависят от времени, так и в обратном случае, в частности, если они периодические функции от времени. В задаче с начально-моментным случаем статический вариант неприемлем. Поэтому такие задачи следует рассматривать только при периодических воздействиях. Для сравнения двух типов задач рассмотрим две задачи динамической устойчивости стержня, когда поверхностный сдвиг или изгибающий момент – периодическая функция времени.

В первом случае, если $S = S_0 + S_1 \cos\theta t$, уравнения движения возмущённого состояния будут

$$\begin{aligned} &E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(S_0 + S_1\cos\theta t\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ &EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + F\left(S_0 + S_1\cos\theta t\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Статическая устойчивость ($S_1 = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$) имеется в [6].

Система (3.1) допускает разделение переменных при условиях

$$u = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = l, \tag{3.2}$$

поэтому её решение ищем в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_n(t)\sin\lambda_m x\ , \quad u = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_n(t)\sin\lambda_m x\ ,\ \lambda_m = \frac{m\pi}{l}. \tag{3.3}$$

Полученная при этом система относительно f_n и φ_n (в дальнейшем индексы можно опускать) выглядит как

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \omega^2\varphi - \frac{\lambda^2}{\rho}\left(S_0 + S_1\cos\theta t\right) f = 0 \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \Omega^2 f - \frac{\lambda^2}{\rho}\left(S_0 + S_1\cos\theta t\right)\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Здесь $\omega_m^2 = a^2\lambda_m^2$, $\Omega_m^2 = a^2\dfrac{J}{F}\lambda_m^4$, $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$ – соответственно собственные частоты для продольных и изгибных колебаний стержня.

Для определения главных областей устойчивости (здесь две области в отличие от задачи при продольной периодической силе) поступим обычным образом [9]

$$f_1 = C_1\cos\frac{\theta t}{2} + C_2\sin\frac{\theta t}{2}\ ,\ \varphi_1 = D_1\cos\frac{\theta t}{2} + D_2\sin\frac{\theta t}{2}. \tag{3.5}$$

В окончательном виде для них получим

$$\theta^2 = 2\left[\omega_1^2 + \Omega_1^2 \pm \sqrt{\left(\omega_1^2 - \Omega_1^2\right)^2 + \frac{4\lambda_1^2}{\rho}\left(S_0 \pm \frac{S_1}{2}\right)^2}\,\right]. \tag{3.6}$$

Как и следовало ожидать, имеются две области неустойчивости: одна соответствует изгибным колебаниям (знак плюс перед радикалом, а другая – продольным движениям).

Вторая задача для стержня такая – устойчивость стержня, подвергающаяся чистому изгибу, при этом, моменты, действующие на концах, – периодические функции времени – $M^0 = P\cos\theta t$.

Уравнения устойчивости в этом случае будут:

$$\begin{aligned} &EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - M^o\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ &EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - M^o\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Система допускает разделение переменных, когда для продольного составляющего условия такие:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l. \tag{3.8}$$

Тогда перемещения ищутся в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_n(t)\sin\lambda_m x,\ \ u = \sum_{m=0}^{\infty}\varphi_n(t)\cos\lambda_m x. \tag{3.9}$$

Система, аналогичная (3.4), будет такого же вида, только вместо $\dfrac{\lambda^2 S_i}{\rho}$ будут $\dfrac{P\lambda^3}{\rho F}$ и $S_0 = 0$. Следовательно, ветви главных параметрических резонансов определятся по (3.6) только с учётом вышеприведённых разниц в параметрах.

Следующая задача аналогична предыдущей, только она для кривого стержня – круговой арки. Уравнения устойчивости в данном случае такие:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(T_2 - M^0\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right) + \frac{1}{R}N_2 = \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial\beta} - \frac{1}{R}T_2 = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(M_2 + M^0\varepsilon_2\right) = N_2.$$

Считается, что краевые условия – типа свободного опирания. Если в (3.10) перейти к перемещениям и искать решение в виде (3.9) (вместо u брать v), то система относительно t будет

$$\frac{d^2\varphi}{a^2dt^2} = a_{11}\varphi + a_{12}f,$$

$$\frac{d^2 f}{a^2dt^2} = a_{21}\varphi + a_{22}f. \qquad (3.11)$$

Здесь

$$a_{11} = -\left(1 + \frac{M^0}{RC}\right)\lambda^2, \quad a_{12} = \lambda\left[\frac{1}{R} + \frac{M^0}{C}\left(\frac{1}{R^2} + \lambda^2\right)\right],$$

$$a_{21} = \lambda\left(\frac{1}{R} + \frac{M^0}{C}\lambda^2\right), \quad a_{22} = -\left[\frac{1}{R^2} + \frac{h^2}{12}\lambda^4 - \frac{M^0}{RC}\lambda^2\right],$$

$$C = Eh, \quad M^0 = P\cos\theta t, \quad \lambda = \frac{n\pi}{\beta_0}.$$

Границы главных областей неустойчивости находятся обычным образом [9] и они определяются

$$\left(\frac{\theta}{2a}\right)^2 = Q_1 \pm\sqrt{Q_1^2 - Q_2}, \quad Q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^2} + \lambda^2 + \frac{h^2}{12}\lambda^4 \pm \frac{P}{2RC}\lambda^2\right),$$

$$Q_2 = \lambda^4\left[\frac{h^2}{12}\lambda^2 \mp \frac{P}{2RC} \pm \left(\frac{P}{2RC}\right)^2\left(2 + R^2\lambda^2\right)\right]. \qquad (3.12)$$

Нужно заметить, что две области имеются, начиная от частот свободных колебаний $(P = 0)$, преимущественно «окружных» и «изгибных».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь приводятся общие уравнения устойчивости для цилиндрических оболочек (без учёта начального состояния). Они получены из общих уравнений нелинейной теории упругости по [5] (стр.60-81; 88-90). В основу положена классическая теория оболочек. При линеаризации уравнений возмущённого состояния, как принято, оставлены члены силового происхождения от начального состояния. Обозначения общепринятые:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T_1+T_1^0\varepsilon_1+T_{12}^0\omega+N_1^0\omega_2+M_1^0\chi_1+M_{12}^0\tau\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[T_{21}+T_{21}^0\varepsilon_1+T_2^0\omega+N_2^0\omega_2+M_{12}^0\chi_1+M_2^0\tau\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[T_{12}+T_{12}^0\varepsilon_2+T_1^0\omega-N_1^0\omega_1+M_{12}^0\chi_2+M_1^0\tau\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[T_2+T_2^0\varepsilon_2+T_{12}^0\omega-N_2^0\omega_1+M_2^0\chi_2+M_{12}^0\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{R}\left(N_2-T_{12}^0\omega_2+T_2^0\omega_1\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[N_1+T_{12}^0\omega_1-T_1^0\omega_2\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[N_2^0-T_{12}^0\omega_2+T_2^0\omega_1\right]-$$

$$-\frac{1}{R}\left[T_2+T_2^0\varepsilon_2+T_{12}^0\omega-N_2^0\omega_1\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[M_1+M_1^0\varepsilon_1+M_{12}^0\omega\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[M_{12}+M_{12}^0\varepsilon_1+M_2^0\omega\right]-$$

$$-N_1-N_1^0\varepsilon_1-N_2^0\omega=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[M_1^0\omega+M_{12}+M_{12}^0\varepsilon_2\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[M_2+M_2^0\varepsilon_2^0+M_{12}^0\omega\right]-$$

$$-N_1^0\omega-N_2-N_2^0\varepsilon_2=0,$$

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\ ,\ \varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{w}{R}\ ,\ \omega=\frac{1}{2}\left(3\frac{\partial u}{\partial\beta}-\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right),$$

$$\chi_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\ ,\ \chi_2=-\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\ ,\ \tau=-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta},$$

$$\omega_1=\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{1}{2}\frac{v}{R}\ ,\ \ \omega_2=-\frac{\partial w}{\partial\alpha}\ .$$

В [10] получены общие уравнения устойчивости оболочек, в частности, и для цилиндрической оболочки (формулы (2.1)–(2.7), стр.72-73). Однако есть некоторые отличия между вышеприведёнными и [10]. Например, в предлагаемом варианте в первом уравнении в первой скобке T_1^0 фигурирует в виде $T_1^0\varepsilon_1$, в то время как в [10] – $T_1^0\varepsilon_2$. Надо заметить, что и в [5] (как отмечалось, приведённые здесь уравнения получены, именно следуя [5]) аналогичный член для пластинки имеет вид, как и здесь $-\sigma_{xx}^{0}e_{xx}'$ (с.155, формула (V-13)). Из выражения $\widehat{\alpha_1\alpha_2}=(1+e_{11})\sigma_{11}^{*}+\ldots$ (с.90, формула (II-58)) получится $T_1+T_1^{0}\varepsilon_1+\ldots$. Члены от перерезывающих усилий фигурируют одинаковым образом. В то же время, в [10] отсутствуют члены от начальных моментов. Ведь в последних двух рассмотренных задачах начальное состояние характеризуется именно только изгибающим моментом. Как отмечено в начале статьи, полученные здесь уравнения послужили лишь одной цели – рассмотрение приведённых конкретных задач и не для противопоставления к существующим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: ГИФМА, 1963. 879с.
2. Мовсисян Л.А. Об уравнениях устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки.// Докл.АН Арм.ССР. 1971. Т.52. №2. С.70-75.
3. Мовсисян Л.А. К устойчивости цилиндрической круговой панели.//Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1984. Т.37. №1. С.16–22.
4. Мовсисян Л.А., Пештмалджян Д.В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин. //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1973. Т.26. №6. С.18-28.
5. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.–М.: ОГИЗ, 1948. 218 с.
6. Флеминг, Герман, Муни. Потеря устойчивости конструктивных элементов под действием поверхностных усилий сдвига.//Прикладная механика. (пер: с английского. Тр.Американского общества инженеров-механиков).1965. №1. С.225-229.
7. Даревский В.М. Нелинейные уравнения теории оболочек и их линеаризация в задачах устойчивости. //Тр.VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1966. С.355-369.
8. Мовсисян Л.А. К динамической устойчивости пластин с начальным моментным состоянием. //Проблемы механики тонких деформируемых тел. (посв.80-летию академика НАН Армении С.А.Амбарцумяна). Ереван: 2002. С.224-233.
9. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
10. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б

Поступила в редакцию 11.03.2010