

УДК 532.529.5: 532.591

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ, НАПОЛНЕННОЙ ПРОТЕКАЮЩЕЙ СМЕСЬЮ
ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА
ГРИГОРЯН Ш.А., ОГАНЯН Г.Г., СААКЯН С.Л.**

Ключевые слова: осесимметричные колебания, оболочка, жидкость, газ, пузырьки.
Keywords: axial symmetric vibrations, shell, fluid, gas, bubble.

Գրիգորյան Շ.Ա., Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ.

**Գազի պղպջակներ պարունակող հոսող հեղուկով լցված գլանային թաղանթի
առանցքաձև ետրիկ սատանումները**

Ուսումնասիրված են անվերջ երկար գլանային թաղանթի առանցքաձև ետրիկ սեփական տատանումները, որը լցված է հոսող խոշոր և մանր չափի պղպջակներ պարունակող գազահեղուկ խառնուրդով: Տարբերակվում են խառնուրդի միջ և գերձայնային շարժման ռեժիմներ: Թվային վերլուծությունից հետևում է, որ խոշոր պղպջակներով խառնուրդ-թաղանթ համակարգի հաճախականությունները իրենց մեծությամբ միշտ գերազանցում են փոքր պղպջակներով նույն համակարգի հաճախականությունները: Թաղանթի հաստության մեծացումով հաճախությունները նույնպես մեծանում են, ինչպես թաղանթ-մաքուր հեղուկ համակարգի դեպքում: Հոսանքի արագությունը նվազեցնելով միջձայնային ռեժիմում տատանումների հաճախականությունը մեծանում է, մինչդեռ թաղանթ-մաքուր ջուր համակարգի դեպքում նա նվազում է:

Grigoryan Sh.H., Ohanyan G.G., Sahakyan S.L.

**The axial symmetric vibrations of cylindrical shell, filled by the
flowing Gas-Liquid mixture**

The problem of axial symmetric self-vibrations of the infinite long shell, filled by flowing gas bubbles of large and small sizes in fluid mixture is considered. The subsonic and supersonic regimes of the mixture flow are discussed. For vibration frequencies of the system under consideration are shown that shell frequencies with big bubbles-liquids mixture exceed the frequencies of system of with small gas bubbles-liquid mixture. In subsonic regime increasing of shell thickness brings to increasing of shell frequencies, as in case of shell with pure fluid. In subsonic regime the frequencies are increasing with decreasing of the flowing velocity, on the contrary, brings to decreasing of frequencies, similar to the case of shell with the pure fluid.

Рассмотрена задача определения осесимметричных собственных колебаний бесконечно длинной упругой оболочки, наполненной протекающей газожидкостной смесью с крупными и мелкими пузырьками. Исследуется дозвуковой режим протекания смеси, для которой частоты колебаний системы оболочка-смесь с крупными пузырьками всегда превышают частоты оболочки с мелкими пузырьками. С увеличением толщины оболочки частота возрастает, как в случае оболочки с чистой жидкостью. С уменьшением скорости протекания в дозвуковом режиме частота возрастает, в то время, как в случае оболочки с чистой жидкостью она, наоборот, убывает.

При исследовании динамического взаимодействия деформируемой оболочки со слабосжимаемой жидкостью установлено [1-4], что система оболочка-жидкость обладает свойствами, не присущими отдельным её компонентам. В линейной постановке авторами разработаны методы расчёта собственных, вынужденных и параметрических колебаний системы. Взаимодействие оболочки с газожидкостной смесью при вибрационных воздействиях изучено в [5], где двухфазная среда моделируется как двухскоростная смесь, состоящая из слоев несущей жидкости с включениями в виде газовых пузырьков. Методика расчета нестационарных колебаний цилиндрических оболочек, взаимодействующих с протекающей жидкостью, где нестационарность обусловлена действием внешних квазипериодических сил, частоты которых являются медленно меняющимися во времени, изложена в [6].

Пусть бесконечно длинная деформируемая цилиндрическая оболочка кругового сечения радиуса R полностью заполнена газожидкостной смесью, жидкой фазой которой является идеальная жидкость, а дисперсной – подчиняющиеся уравнению состояния адиабаты газовые пузырьки одинакового размера. Процессами дробления,

коагуляции и образования новых пузырьков, а также эффектами поверхностного натяжения и межфазного теплообмена пренебрегаются. Принимается односкоростная модель течения смеси.

Уравнения движения рассматриваемой смеси в цилиндрической системе координат x, r, θ имеют вид (начало координат размещено в сечении $x = 0$) [7]

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla V^2 - \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \nabla \rho + \rho \text{div} \vec{V} = 0, \quad (1.2)$$

$$\rho = (1 - \beta) \rho_1 + \beta \rho_2, \quad \frac{\beta \rho_2}{(1 - \beta) \rho_1} = \text{const}, \quad \rho_2 a^3 = \text{const}. \quad (1.3)$$

$$P_2 - P = \rho_1 a \frac{d^2 a}{dt^2}, \quad \frac{P_2}{P_0} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}} \right)^\gamma, \quad \gamma = \frac{c_{p2}}{c_{v2}}, \quad \rho_1 = \text{const}. \quad (1.4)$$

Здесь t – время; V_x, V_r, V_θ – составляющие вектора скорости \vec{V} по осям координат с ортами $\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$; ρ и P – плотность и давление, γ – показатель адиабаты газа; c_p и c_v – его удельные теплоёмкости, β – объёмное газосодержание, a – радиус пузырька. Индексы 1, 2 и 0 отнесены к параметрам жидкой и газовой фаз и, соответственно, их значениям в стационарном состоянии равновесия. Параметры, характеризующие смесь в целом, индексов не имеют. В соотношениях (1.3) первое из них определяет плотность смеси, второе – понятие односкоростного течения, третье формулирует закон сохранения массы газа в пузырьке.

Исследуется безвихревое течение смеси внутри оболочки, когда $\text{rot} \vec{V} = 0$, что позволяет ввести в рассмотрение потенциал скоростей $\nabla \varphi(x, r, \theta) = \vec{V}$. Уравнение Эйлера (1.1) преобразуется в интеграл Коши–Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \int \frac{dP}{\rho} = f(t) \quad (1.5)$$

Пусть в любой момент времени и в каждой точке пространства значения параметров смеси мало отклоняются от своих значений в состоянии покоя (равновесия)

$$P = P_0 + P', \quad P_2 = P_0 + P'_2, \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho_2 = \rho_{20} + \rho'_2, \quad \beta = \beta_0 + \beta', \quad (1.6)$$

$$a = a_0 + a', \quad V_x = V'_x, \quad V_r = V'_r, \quad V_\theta = V'_\theta, \quad \varphi = \varphi',$$

где штрихи отнесены к малым возмущениям. Подстановка разложений (1.6) в соотношения (1.3) и в уравнение состояния газа из (1.4) позволяет получить линейные связи

$$\frac{\rho'_2}{\rho_{20}} = \frac{P'_2}{\gamma P_0}, \quad \frac{\beta'}{\beta_0} = -(1 - \beta_0) \frac{\rho'_2}{\rho_{20}}, \quad \rho' = \beta_0 \rho'_2 + (\rho_{20} - \rho_1) \beta', \quad a' = -\frac{a_0}{3} \frac{\rho'_2}{\rho_{20}},$$

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} P'_2, \quad c_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_0 \rho_0}, \quad a' = -\frac{a_0}{3} \frac{P'_2}{\gamma P_0}. \quad (1.7)$$

Здесь c_0 – невозмущённая скорость звука в смеси. Из уравнения Рэлея–Лэмба (1.4) в приближении, когда учитывается наличие пузырьков в жидкости, будем иметь

$$P' = P_2' + \frac{1}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^2 P_2'}{\partial t^2}, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_1 a_0^2}, \quad (1.8)$$

где ω_{ar} – собственная адиабатическая частота пульсирующего пузырька. Подставляя (1.6) в уравнение (1.5) и учитывая связи (1.7), подинтегральное выражение разложим в биномиальный ряд. Удерживая линейные слагаемые, определим константу интегрирования из условия, что в невозмущённом состоянии $\varphi' = 0$, $P_2' = 0$. Тогда избыточное гидродинамическое давление в пузырьке P_2' выразится через φ'

$$P_2' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Рассмотрим случай, когда внутри оболочки вдоль её образующей (осью x) протекает однородный поток газожидкостной смеси со скоростью U . Введём в рассмотрение связанную с оболочкой систему координат (x', r', θ')

$$x = x' - Ut, \quad r = r', \quad \theta = \theta', \quad t = t'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + U \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta'}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r'}. \quad (1.10)$$

Тогда в неподвижной относительно оболочки системе координат (1.10) возмущение давления в пузырьке P_2' и избыточное давление P' в смеси, в силу (1.8) и (1.9), запишутся в виде

$$P_2' = -\rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad P = -\rho_0 \left[1 + \frac{1}{\omega_{ar}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi \quad (1.11)$$

Здесь штрихи над параметрами течения и координатами опущены. Ввод системы координат (1.10) обусловлен необходимостью последующего рассмотрения уравнений изгиба тонкостенной цилиндрической оболочки, записываемых в системе координат (x', r', θ') .

Подставляя разложения (1.6) в уравнения (1.1) и (1.2), ограничимся удержанием лишь линейных слагаемых. Их комбинирование друг с другом и с пятой связью из (1.7) приводит к уравнению

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 P_2'}{\partial t^2} - \Delta P' = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

которое, в силу (1.11), переписывается в неподвижной системе координат (1.10) в виде

$$\frac{1}{\omega_{ar}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^4 \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi - c_0^2 \Delta \varphi = 0 \quad (1.12)$$

Ниже исследованию подлежит осесимметричная задача, для которой $\partial/\partial\theta = 0$. Поэтому решение уравнения (1.12) будем искать в виде

$$\varphi(x, r, t) = f(r) e^{i(\omega t + \alpha x)}, \quad (1.13)$$

где ω – циклическая частота, $\alpha = \pi/L$, L – длина полуволн вдоль образующей цилиндра. Искомая функция $f(r)$ удовлетворяет уравнению

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \left[\frac{(\omega + \alpha U)^4}{\omega_{ar}^2} \frac{1}{c_0^2} - \frac{(\omega + \alpha U)^2}{c_0^2} + \alpha^2 \right] f = 0, \quad (1.14)$$

$$\beta_1^2 = \frac{(\omega + \alpha U)^4}{\omega_{ar}^2} \frac{1}{c_0^2} - \frac{(\omega + \alpha U)^2}{c_0^2} + \alpha^2 = \frac{\alpha^4 c_0^2}{\omega_{ar}^2} M_1^4 + \alpha^2 (1 - M_1^2),$$

$$M_1 = \frac{1}{c_0} \left(\frac{\omega}{\alpha} + U \right).$$

Отсюда следуют решения, которые в зависимости от значения ω или M_1 запишутся в разных формах. В случае реализации значений $M_1 < 1$ имеем $\beta_1^2 > 0$, откуда определяются интервалы изменения допустимых значений M_1 и ω

$$M_1^2 < 1 < m_2^2, \quad (\omega + \alpha U)^2 < \alpha^2 c_0^2 < \alpha^2 c_0^2 m_2^2, \quad (1.15)$$

$$m_{1,2}^2 = \frac{3}{2} \frac{\gamma P_0}{\rho_0 c_0^2} \frac{1}{\alpha^2 a_0^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3} \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma P_0} \alpha^2 a_0^2} \right).$$

Возмущённый потенциал скоростей (1.13), согласно (1.14), выразится через модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого порядка

$$\varphi(x, r, t) = b_1 I_0(\beta_1 r) e^{i(\omega t + \alpha x)}, \quad b_1 = \text{const}. \quad (1.16)$$

При одновременном выполнении требований $M_1 > 1$ и $\beta_1^2 = -\beta_2^2 < 0$ будем иметь

$$1 < m_2^2 < M_1^2 < m_1^2, \quad \alpha^2 c_0^2 < \frac{\alpha^2}{c_0^2} m_2^2 < (\omega + \alpha U)^2 < \frac{\alpha^2}{c_0^2} m_1^2.$$

Тогда функция φ , согласно (1.13) и (1.14), запишется через функцию Бесселя первого рода нулевого порядка

$$\varphi(x, r, t) = b_2 J_0(\beta_2 r) e^{i(\omega t + \alpha x)}, \quad b_2 = \text{const}. \quad (1.17)$$

При выводе решений (1.16), (1.17) использовано требование ограниченности скорости течения смеси на оси симметрии $r = 0$, при этом, b_1, b_2 – постоянные интегрирования, определяющие в начальный момент времени $t = 0$ амплитуды волн в центре сечения $x = 0, r = 0$.

2. Уравнения движения оболочки. Линейные уравнения изгиба тонкостенных оболочек имеют вид [1,4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+v}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{v}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1-v^2}{Eh} \rho_* h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1+v}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{1-v^2}{E} \rho_* h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R^2} - \frac{h^2}{12R^2} \left(R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) &= \\ = \frac{1-v^2}{Eh} \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-v^2}{Eh} q. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь u, v, w – смещения точек срединной поверхности соответственно в осевом направлении, вдоль дуги кругового сечения и по нормали к поверхности, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, R и h – радиус оболочки и толщина её стенки, ρ_* – плотность материала, q – нормальное к поверхности внешнее давление. Прогиб w считается положительным вдоль нормали к центру кривизны. В дальнейшем будет исследоваться задача осесимметричных колебаний оболочки, где необходимо полагать $\partial/\partial\theta = 0$. Формулируя граничные условия, учтём, что координаты x, r, t в уравнениях (1.12) и (1.14) и их решениях (1.16), (1.17) следует отождествлять с координатами системы (2.1). Избыточное давление, действующее на стенки оболочки со стороны протекающей газожидкостной смеси, в силу (1.11), равно

$$P|_{r=R} = -\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\omega_{ar}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^3 \right] \varphi \Big|_{r=R}.$$

Условие непроницаемости деформируемой стенки (плавности обтекания) имеет вид [1,3,4]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) w.$$

Удовлетворяя решения (1.16) и (1.17) граничным условиям, формулы для избыточного давления и потенциала скоростей можно представить в формах записи:

$$P = \rho_0 R \Phi_{\alpha 0}^* \left[1 + \frac{1}{\omega_{ar}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w, \quad \Phi_{\alpha 0}^* = \Phi_{\alpha 0} \Big|_{r=R} \quad (2.2)$$

$$\varphi(x, r, t) = -R \Phi_{\alpha 0} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (2.3)$$

$$\Phi_{\alpha 0} = \begin{cases} \frac{I_0(\beta_1 r)}{\beta_1 R I_0'(\beta_1 R)} & M_1^2 < 1 < m_2^2, \quad \alpha^2 < \frac{3}{4} \frac{\gamma P_0}{\rho_0 c_0^2} \frac{1}{a_0^2}, \\ \frac{J_0(\beta_2 r)}{\beta_2 R J_0'(\beta_2 R)} & 1 < m_2^2 < M_1^2 < m_1^2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь штрихи отнесены к производным функций I_0 и J_0 , выражения для β_1 , M_1 и $m_{1,2}$ приведены в (1.14), (1.15).

В качестве внешней нагрузки q системы (2.1) следует брать воздействие избыточного давления на внутреннюю поверхность оболочки, т.е. полагать $q = -P$, где P определяется через формулы (2.2)–(2.5). В соответствии с представлениями (1.16), (1.17) решения системы (2.1) будут искажаться в виде

$$(u, v, w) = (u_*, v_*, w_*) e^{i(\omega t + \alpha x)},$$

что позволяет свести её к однородным уравнениям относительно амплитуд u_*, v_*, w_* :

$$(\alpha_*^2 - \omega_*^2) u_* + i\nu \alpha_* w_* = 0, \quad \left(\frac{1-\nu}{2} \alpha_*^2 - w_*^2 \right) v_* = 0,$$

$$i\nu\alpha_*u_* - \left\{ 1 + \frac{l^2}{12}\alpha_*^4 - \omega_*^2 - (\omega_* + \alpha_*U_*)^2 \left[1 - \frac{\rho_0c_*^2}{3\gamma P_0}\delta^2(\omega_* + \alpha_*U_*)^2 \right] \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{1}{l} \Phi_{\alpha_0}^* \right\} \times \\ \times w_* = 0.$$

Здесь в рассмотрение введены безразмерные параметры

$$\omega_* = \frac{\omega R}{c_*}, \quad \alpha_* = \alpha R, \quad U_* = \frac{U}{c_*}, \quad l = \frac{h}{R}, \quad \delta = \frac{a_0}{R}, \\ c_*^2 = \frac{E}{(1-\nu)\rho_*}, \quad \alpha_*^2 < \frac{3}{4} \frac{\gamma P_0}{\rho_0 c_0^2} \frac{1}{\delta^2}, \quad (2.5)$$

где c_* – скорость звука (распространения продольных волн) в материале оболочки. Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений системы является равенство нулю её определителя, откуда следует трансцендентное уравнение

$$\left(\omega_*^2 - \alpha_*^2 \right) \left(1 + \frac{l}{12} \alpha_*^4 - \omega_*^2 \right) + \nu^2 \alpha_*^2 - \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{(\omega_*^2 - \alpha_*^2)}{l} (\omega_* + \alpha_* U_*)^2 \times \\ \times \left[1 - \delta^2 \frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0} (\omega_* + \alpha_* U_*)^2 \right] \Phi_{\alpha_0}^* = 0. \quad (2.6)$$

Неравенство из (2.5) указывает, что волновое число α_* не может принимать произвольные значения. Очевидно, что при колебаниях оболочки с наполнителем для каждого из параметров α_*, U_*, l, δ существует своя безразмерная частота ω_* , что в соответствии с (2.3), (2.4), вынуждает каждый из случаев исследовать отдельно.

Для иллюстрации изложенной теории проведён численный анализ уравнений, следующих из (2.6), на примере стальной оболочки ($E = 2 \cdot 10^8$ МПа, $\rho_* = 7800$ кг/м³, $\nu = 0.3$) разных толщин ($l = 0.002$ и 0.04), наполненной с протекающей со скоростями $U_* = 0, 0.005$ или 0.01 водовоздушной смесью ($\beta_0 = 0,01$, $P_0 = 0.1$ МПа, $\rho_0 = 988$ кг/м³, $\gamma = 1.4$) с крупными $\delta = 1/50$ и мелкими $\delta = 1/1500$ пузырьками. По необходимости переход к размерным величинам проводится посредством связей (2.5).

Дозвуковое течение $M_1 < 1$. Значения реализуемых частот, в силу (1.15) лежат в интервале

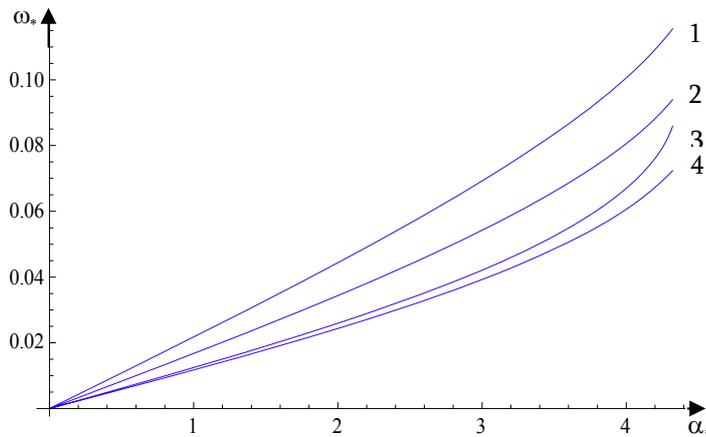
$$(\omega_* + \alpha_* U_*)^2 < \frac{c_0^2}{c_*^2} \alpha_*^2 < \frac{3}{2} \frac{\gamma P_0}{\rho_0 c_*^2} \frac{1}{\delta^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3} \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma P_0} \alpha_*^2 \delta^2} \right).$$

Дисперсионное уравнение (2.6) переписется, согласно (2.3), в форме записи

$$\begin{aligned}
& (\omega_*^2 - \alpha_*^2)^2 \left\{ 1 + \frac{l^2}{12} \alpha_*^4 - \omega_*^2 - \frac{\rho_0}{\rho_*} \frac{(\omega_* + \alpha_* U_*)^2}{l} \times \right. \\
& \left. \times \left[1 - \delta^2 \frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0} (\omega_* + \alpha_* U_*)^2 \right] \frac{I_0(\beta_1 R)}{I_1(\beta_1 R)} \frac{1}{\beta_1 R} \right\} + \nu^2 \alpha_*^2 = 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

в которой использовано соотношение $I_0'(z) = I_1(z)$, где I_1 – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка единицы.

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов, выполненных по уравнению (2.7).



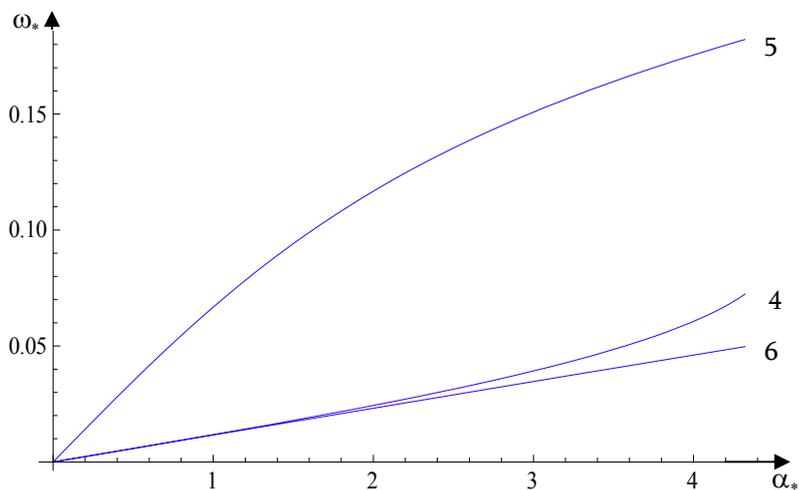
Фиг. 1

На фиг. 1 представлены кривые частот собственных колебаний бесконечно длинной оболочки со смесью воды с крупными воздушными пузырьками $\delta = 1/50$ в зависимости от безразмерного волнового числа α_* . Кривые отнесены к системам оболочка–наполнитель с параметрами: 1 – $l = 0.002$, $U_* = 0$; 2 – $l = 0.002$, $U_* = 0.005$; 3 – $l = 0.04$, $U_* = 0.01$; 4 – $l = 0.002$, $U_* = 0.01$. С ростом толщины оболочки (переход от кривой 4 к 3) и уменьшением скорости протекания (переход от 4 к кривым 2 и 1) значение частоты увеличивается. Такая же картина колебаний наблюдается в случае наличия мелких пузырьков.

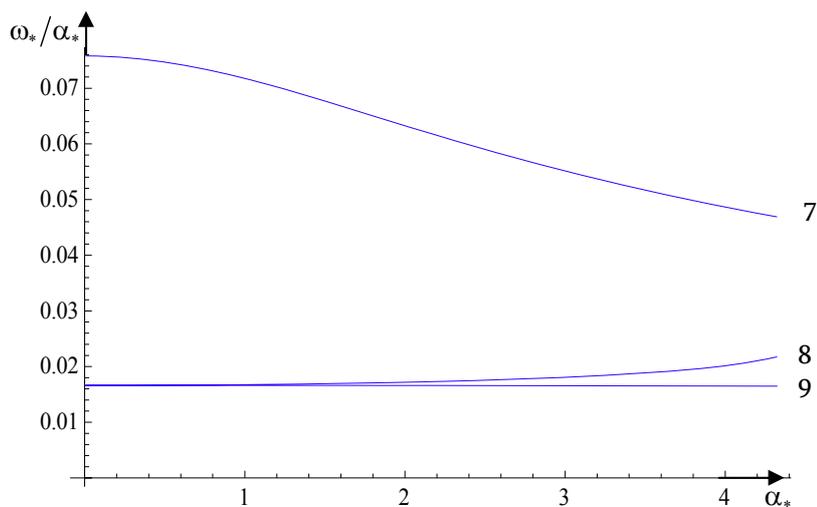
На фиг. 2 приведены кривые частот колебаний оболочки, наполненной чистой водой – кривая 5 и водовоздушными смесями с крупными $\delta = 1/50$ и мелкими $\delta = 1/1500$ пузырьками – кривые 4 и 6. Выбраны параметры $l = 0.002$, $U_* = 0.01$. Для достаточно больших α_* с заменой смеси с мелкими пузырьками на смесь с крупными (переход 6 → 4) частота возрастает, при этом их значения в разы (например, для $\alpha_* = 4$ в 2.9 и 3.6 раза) уступают частотам той же оболочки, наполненной, однако, чистой водой (переход от кривых 4 и 6 к 5).

На фиг. 3 показаны кривые зависимости безразмерной фазовой скорости $c_{ph}/c_* = \omega_*/\alpha_*$ от волнового числа α_* , при этом взяты параметры $l = 0.002$, $U_* = 0.005$. С увеличением α_* фазовая скорость волны в оболочке с водой (кривая 7) уменьшается, а в случае смеси с крупными пузырьками (кривая 8) она, наоборот,

возрастает, в то время как для смеси с мелкими пузырьками фазовая скорость волны является постоянной величиной (кривая 9). Величина скорости распространения волны в воде и смесях, ограниченными оболочкой, всегда меньше скорости звука в их безграничных объемах.



Фиг. 2



Фиг. 3

Необходимо отметить, что действительно, всегда выполняется критерий $M_1 < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости М.: Наука, 1979. 320с.
2. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Параметрические колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. // Прикл. механика. 1966. Т.2. №3. С.21-26.
3. Мнев Е.Н., Перцев А.К. Гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1970. 365с.

4. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 184с.
5. Кубенко В.Д., Лакиза В.Д. и др. Динамика упругогазожидкостных систем при вибрационных воздействиях. Киев: Наукова думка, 1988. 256с.
6. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Анализ нестационарных процессов в цилиндрических оболочках при взаимодействии с протекающей жидкостью. // Прикл. механика. 2010. Т.46. №10. С.36-52.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.

Сведения об авторах

Григорян Шушаник Акоповна, доцент кафедры математики и математического моделирования Российско–Армянского (Славянского) университета.

E-mail: grig-shushanik@rambler.ru

Оганян Гагик Гришаевич, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24^б, тел. (+37493) 946-947,

E-mail: oganyangagik@gmail.com

Саакян Саак Леонович, ассистент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики Ереванского госуниверситета.

Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, тел.: (+37410) 575-140,

E-mail: ssahakyan@ysu.am

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 25.03.2011