

**ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК С ЗАЗОРОМ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМ ЖИДКОСТЬЮ**

**БАГДАСАРЯН Г.Е., МАРУХЯН С.А.**

**Ключевые слова:** оболочка, жидкость, устойчивость, собственные колебания  
**Key words:** shell, fluid, stability, natural vibration

**Բաղդասարյան Գ.Ե., Մարուխյան Ս.Ա.**

**Համառոտացք գլանային թաղանթների դինամիկ վարքը, երբ նրանցով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է հեղուկով**

Կան բազմաթիվ հետազոտություններ, նվիրված հեղուկով լցված գլանային թաղանթի տատանումների և կայունության հարցերին: Տեղեկություններ այս հետազոտությունների վերաբերյալ կարելի է գտնել [1-4] մենագրություններում և [5] ակնարկային հոդվածում: Փոփոխական խորությամբ հեղուկով լցված գլանային թաղանթի տատանումների խնդիրը դիտարկված է [6] աշխատանքում: Մասնակիորեն հեղուկով լցված գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը արտաքին դինամիկ ճնշման ազդեցությամբ դիտարկված է [7] աշխատանքում: Համառոտացք գլանային թաղանթների տատանման խնդիրներ, երբ նրանցով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է հեղուկով, դիտարկված են [8-11] աշխատանքներում, ընդ որում բացի [8,11], մյուսներում դիտարկված են ամբողջովին հեղուկով լցված թաղանթի տատանումները [9,10]: Ստատիկ կայունության կորստի հնարավոր հարցեր դիտարկված է [11]:

Աշխատանքում գծային դրվածքով դիտարկված է համառոտացք, վերջավոր երկարությամբ, իզոտրոպ գլանային թաղանթների տատանումների և կայունության հարցերը, երբ նրանցով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է անսեղմելի իդեալական հեղուկով: Ուսումնասիրված է լցված հեղուկի շերտի խորության և լայնության ազդեցությունները դիտարկվող հիդրոառձագական համակարգի սեփական տատանումների հաճախականությունների վրա: Ցույց է տրված քնարկվող համակարգի ստատիկ կայունության կորստի հնարավորությունը հիդրոստատիկ ճնշման ազդեցության տակ:

**Baghdasaryan G.Ye, Marukhyan S.A.**

**Dynamic behavior of a coaxial cylindrical shells, with a gap partially filled with fluid**

There are numerous studies on the vibrations and dynamic stability of a cylindrical shell filled with fluid. Information about these studies can be found in monographs [1-4] and in a review article [5]. The problem of vibrations of coaxial cylindrical shells, filled with fluid of variable-depth, is considered in [6]. The problem of stability of cylindrical shells partially filled with fluid, with an external dynamic pressure is discussed in [7]. The problems of vibration of coaxial cylindrical shells are considered in [8-11], and besides [8, 11], in the remaining papers which deal with the same case, the vibrations of shells completely filled with fluid are researched in [9, 10]. The question of possible loss of stability is considered in [11].

In this paper, the problem of vibrations and stability of isotropic coaxial circular cylindrical shells of finite length in linear statement is considered, when the region between the shells (the gap) is partially filled with an incompressible fluid. The dependence of the vibration frequency on the depth of the filling and the thickness of the gap of the considered hydro-elastic system is studied. The possibility of loss of static stability of hydro-elastic system under the influence of hydrostatic pressure is shown.

Имеются многочисленные исследования, посвященные колебаниям и динамической устойчивости цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1-4] и в обзорной статье [5]. Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины, рассмотрены в [6]. В работе [7] исследована устойчивость цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, при внешнем динамическом давлении. Вопросы колебаний коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью,

рассмотрены в работах [8-11], причем кроме [8,11], в остальных работах рассмотрен случай, когда область между оболочками полностью заполнена жидкостью [9,10]. Вопрос о возможности потери статической устойчивости рассмотрен в [11].

В настоящей работе в линейной постановке рассмотрена задача колебаний и устойчивости изотропных коаксиальных круговых цилиндрических оболочек конечной длины, когда область между оболочками (зазор) частично заполнена несжимаемой жидкостью. Исследована зависимость частоты колебаний рассматриваемой гидроупругой системы от глубины заполнения и толщины зазора. Показана возможность потери статической устойчивости гидроупругой системы под действием гидростатического давления.

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим колебания и устойчивость коаксиальной системы двух цилиндрических оболочек конечных длин  $l$ , когда область между оболочками (зазор) частично заполнена несжимаемой жидкостью глубины  $b$  ( $b \leq l$ ). Будем пользоваться цилиндрическими координатами  $(\alpha, r, \theta)$ , совместив полярную ось  $\alpha$  с осью оболочек. Предполагается, что та часть поверхности указанной области, которая находится на плоскости  $\alpha = 0$ , является неподвижной (жёсткое днище).

За основу принимаются следующие предположения:

- а) гипотеза Кирхгофа – Лява о недеформируемых нормалях;
- б) общеизвестные упрощения теории оболочек с большим показателем изменчивости;
- в) жидкость между оболочками совершает потенциальное движение;
- г) волновое движение на свободной поверхности жидкости слабо влияет на колебание оболочек.

На основе принятых предположений система уравнений колебания оболочек имеет вид [12]:

$$D_i \Delta^2 w_i - \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \alpha^2} + \rho_i h_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \rho_i h_i \varepsilon_i \frac{\partial w_i}{\partial t} = Z_i, \quad i = (1, 2),$$

$$\frac{1}{E_i h_i} \Delta^2 \Phi_i + \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \alpha^2} = 0, \quad D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)}, \quad (1.1)$$

причем индекс  $i = 1$  относится к внутренней оболочке, а  $i = 2$  – к внешней.

В системе (1.1)  $w_i$  – прогиб,  $\Phi_i$  – функция напряжений,  $R_i$  – радиус,  $h_i$  – толщина,  $E_i$  – модуль упругости,  $\nu_i$  – коэффициент Пуассона,  $\varepsilon_i$  – коэффициент линейного затухания,  $\rho_i$  – плотность материала  $i$ -той оболочки,  $Z_i$  – нормально приложенная внешняя нагрузка,  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа.

В случае рассматриваемой задачи для  $Z_i$  имеем [6-8, 13]:

$$Z_i = \begin{cases} (-1)^i \left[ Z_0^{(i)} + \rho_0 g (b - \alpha) \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \right] & \text{при } 0 < \alpha < b \\ 0 & \text{при } b < \alpha < l. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь  $Z_0$  – возмущённое давление жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\rho_0$  – плотность жидкости.

Из интеграла Коши–Лагранжа имеем

$$Z_0^{(i)} = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{r=R_i}, \quad (1.3)$$

где  $\Phi$  – потенциальная функция возмущённого движения жидкости, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (1.4)$$

в области, занятой жидкостью, и следующим краевым условиям на границе этой области:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial w_i}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_i, \quad (i = 1, 2), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \quad (1.6)$$

и согласно последнему предположению, следующему условию на свободной поверхности жидкости [5-8, 13]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = b. \quad (1.7)$$

Для определения функции  $\varphi$ , как это следует из (1.5), необходимо определить радиальные скорости стенок оболочек. Поэтому, прежде всего обсудим вопрос о формах смещений поверхностей оболочек.

Предположим, что оболочки шарнирно опёрты по торцам. Тогда решение системы (1.1), удовлетворяющее известным условиям шарнирного опирания, запишем в форме

$$w_i = \cos n\theta \sum_{s=0}^{\infty} W_s^{(i)}(t) \sin \lambda_s \alpha, \quad (1.8)$$

$$\Phi_i = \cos n\theta \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s^{(i)}(t) \sin \lambda_s \alpha,$$

где  $\lambda_s = (m + s)\pi / l$ ,  $m$  – число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей,  $n$  – число волн в окружном направлении,  $W_s^{(i)}(t)$  и  $\Phi_s^{(i)}(t)$  – искомые функции.

Исходя из (1.8), гармоническую функцию  $\varphi$  представим в виде

$$\varphi = \cos n\theta \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} [A_s(t) I_n(\lambda_s r) + B_s(t) K_n(\lambda_s r)] \sin \lambda_s \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} [C_j(t) \operatorname{sh} \alpha_{nj} \alpha + D_j(t) \operatorname{ch} \alpha_{nj} \alpha] \Psi_n(\alpha_{nj} r) \right\}, \quad (1.9)$$

где  $I_n$ ,  $K_n$  – функции Бесселя чисто мнимого аргумента первого и второго рода,

$$\Psi_n(\alpha_{nj} r) = \frac{J_n(\alpha_{nj} r)}{J_n'(\alpha_{nj} R_1)} - \frac{Y_n(\alpha_{nj} r)}{Y_n'(\alpha_{nj} R_1)}, \quad (1.10)$$

$J_n$ ,  $Y_n$  – функции Бесселя действительного аргумента первого и второго рода порядка  $n$ ;  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_j$ ,  $D_j$  – некоторые величины, которые определяются из поверхностных условий (1.5)–(1.7);  $\alpha_{nj}$  – корни следующего трансцендентного уравнения:

$$J_n'(\alpha_{nj} R_2) Y_n'(\alpha_{nj} R_1) - J_n'(\alpha_{nj} R_1) Y_n'(\alpha_{nj} R_2) = 0. \quad (1.11)$$

В (1.10), (1.11) и в дальнейшем

$$f'(\beta R) = \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=\beta R}.$$

Подставляя (1.8) и (1.9) в граничные условия (1.5) – (1.7) и учитывая (1.11), путем ортогонализации получим следующие выражения для неизвестных  $A_s, B_s, C_j, D_j$ :

$$\begin{aligned} A_s(t) &= \frac{K_n'(\lambda_s R_2) \frac{\partial W_s^{(1)}}{\partial t} - K_n'(\lambda_s R_1) \frac{\partial W_s^{(2)}}{\partial t}}{\lambda_s \left[ I_n'(\lambda_s R_1) K_n'(\lambda_s R_2) - I_n'(\lambda_s R_2) K_n'(\lambda_s R_1) \right]}, \\ B_s(t) &= \frac{I_n'(\lambda_s R_1) \frac{\partial W_s^{(2)}}{\partial t} - I_n'(\lambda_s R_2) \frac{\partial W_s^{(1)}}{\partial t}}{\lambda_s \left[ I_n'(\lambda_s R_1) K_n'(\lambda_s R_2) - I_n'(\lambda_s R_2) K_n'(\lambda_s R_1) \right]}, \\ C_j(t) &= \sum_{s=0}^N \frac{\lambda_s}{\Delta(s, j)} \left( R_1 \Psi_n(\alpha_{nj} R_1) \frac{\partial W_s^{(1)}}{\partial t} - R_2 \Psi_n(\alpha_{nj} R_2) \frac{\partial W_s^{(2)}}{\partial t} \right), \\ D_j(t) &= \sum_{s=0}^N \frac{(\lambda_s \operatorname{sh} \alpha_{nj} b - \alpha_{nj} \sin \lambda_s b)}{\Delta(s, j) \operatorname{ch} \alpha_{nj} b} \left( R_1 \Psi_n(\alpha_{nj} R_1) \frac{\partial W_s^{(1)}}{\partial t} - R_2 \Psi_n(\alpha_{nj} R_2) \frac{\partial W_s^{(2)}}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(s, j) &= \alpha_{nj} (\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2)^2 \left[ \frac{R_2^2}{2} \left( 1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_2^2} \right) \Psi_n^2(\alpha_{nj} R_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_1^2}{2} \left( 1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_1^2} \right) \Psi_n^2(\alpha_{nj} R_1) \right]. \end{aligned}$$

В силу (1.12) и представления (1.9), из (1.3) находим следующие выражения для возмущённого давления жидкости на стенках оболочек:

$$\begin{aligned} Z_0^{(i)} &= -\rho_0 \cos n\theta \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[ A_1^{(i)}(s) \sin \lambda_s \alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \left( B_1^{(i)}(s, j) \operatorname{sh} \alpha_{nj} \alpha + C_1^{(i)}(s, j) \operatorname{ch} \alpha_{nj} \alpha \right) \right] \frac{d^2 W_s^{(1)}}{dt^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ A_2^{(i)}(s) \sin \lambda_s \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \left( B_2^{(i)}(s, j) \operatorname{sh} \alpha_{nj} \alpha + C_2^{(i)}(s, j) \operatorname{ch} \alpha_{nj} \alpha \right) \right] \frac{d^2 W_s^{(2)}}{dt^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_p^{(i)}(s) &= (-1)^{p+1} \frac{K_n'(\lambda_s R_{r(p)}) I_n(\lambda_s R_i) - I_n'(\lambda_s R_{r(p)}) K_n(\lambda_s R_i)}{\lambda_s \left[ I_n'(\lambda_s R_1) K_n'(\lambda_s R_2) - I_n'(\lambda_s R_2) K_n'(\lambda_s R_1) \right]}, \\ B_p^{(i)}(s, j) &= (-1)^{p+1} \frac{\lambda_s R_p \Psi_n(\alpha_{nj} R_p) \Psi_n(\alpha_{nj} R_i)}{\Delta(s, j)}, \end{aligned}$$

$$C_p^{(i)}(s, j) = (-1)^{p+1} \frac{(\lambda_s \operatorname{sh} \alpha_{nj} b - \alpha_{nj} \sin \lambda_s b) R_p \Psi_n(\alpha_{nj} R_p) \Psi_n(\alpha_{nj} R_i)}{\Delta(s, j) \operatorname{ch} \alpha_{nj} b},$$

( $p = 1, 2$ ;  $r^{(p)} = 1 + \delta_{1p}$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера).

Подставляя (1.8) во второе уравнение системы (1.1), для искомой функции  $\Phi_s^{(i)}(t)$  будем иметь

$$\Phi_s^{(i)}(t) = \frac{E_i h_i}{R_i} \frac{\lambda_s^2}{(\lambda_s^2 + n^2 / R_i^2)^2} W_s^{(i)}(t). \quad (1.14)$$

Таким образом, все искомые величины выражаются через функции  $W_s^{(1)}(t)$  и  $W_s^{(2)}(t)$ .

На основе вариационного метода Бубнова–Галеркина, с учетом (1.2), (1.8), (1.13) и (1.14), из первого уравнения системы (1.1), для определения  $W_s^{(1)}(t)$  и  $W_s^{(2)}(t)$  получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_\kappa^{(1)}}{dt^2} + \varepsilon_1 \frac{dW_\kappa^{(1)}}{dt} + \Omega_1^2(k, n) W_\kappa^{(1)} + \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \left( b_{ks}^{(1)} W_s^{(1)} + \frac{d^2}{dt^2} \left[ m_1^{(1)}(k, s) W_s^{(1)} + m_2^{(1)}(k, s) W_s^{(2)} \right] \right) = 0, \\ \frac{d^2 W_\kappa^{(2)}}{dt^2} + \varepsilon_2 \frac{dW_\kappa^{(2)}}{dt} + \Omega_2^2(k, n) W_\kappa^{(2)} + \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \left( b_{ks}^{(2)} W_s^{(2)} + \frac{d^2}{dt^2} \left[ m_1^{(2)}(k, s) W_s^{(1)} + m_2^{(2)}(k, s) W_s^{(2)} \right] \right) = 0, \\ (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_i^2(k, n) &= \frac{D_i}{h_i \rho_i} \left[ \left( \lambda_k^2 + \frac{n^2}{R_i^2} \right)^2 + \frac{12(1 - \nu_i^2)}{R_i^2 h_i^2} \frac{\lambda_k^4}{(\lambda_k^2 + n^2 / R_i^2)^2} \right], \\ b_{ks}^{(i)} &= (-1)^i \frac{\rho_0 g n^2}{l R_i h_i \rho_i} \left[ \frac{1 - \cos(\lambda_s - \lambda_k) b}{(\lambda_s - \lambda_k)^2} - \frac{1 - \cos(\lambda_s + \lambda_k) b}{(\lambda_s + \lambda_k)^2} \right], \\ m_p^{(i)}(k, s) &= (-1)^i \frac{2\rho_0}{l h_i \rho_i} \left\{ A_p^{(i)}(s) \left[ \frac{\sin(\lambda_s - \lambda_k) b}{2(\lambda_s - \lambda_k)} - \frac{\sin(\lambda_s + \lambda_k) b}{2(\lambda_s + \lambda_k)} \right] + \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ B_p^{(i)}(s, j) \frac{\alpha_{nj} \operatorname{ch} \alpha_{nj} b \sin \lambda_k b - \lambda_k \operatorname{sh} \alpha_{nj} b \cos \lambda_k b}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_k^2} + \right. \\ &\quad \left. \left. + C_p^{(i)}(s, j) \frac{\lambda_k + \alpha_{nj} \operatorname{sh} \alpha_{nj} b \sin \lambda_k b - \lambda_k \operatorname{ch} \alpha_{nj} b \cos \lambda_k b}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_k^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $\Omega_1(k, n)$  и  $\Omega_2(k, n)$  – частоты собственных поперечных колебаний внутренней и внешней оболочек соответственно,  $b_{ks}^{(i)}$  – коэффициенты гидростатического давления жидкости,  $m_p^{(i)}(k, s)$  – коэффициенты присоединённых масс.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая одночленной аппроксимации ( $s = 0$ ). Заметим, что  $\lambda_s$  при  $s = 0$  зависит от  $m$  и равняется  $m\pi/l$ . Поэтому основные неизвестные  $W_s^{(i)}$ , а также величины  $b_{ks}^{(i)}$ ,  $m_p^{(i)}(k, s)$  и  $\Omega_i(k, n)$  при  $s = 0$  будут зависеть от  $m$  и  $n$ . Тогда из уравнений (1.15) имеем:

$$\begin{aligned} & \left[1 + M_1^{(1)}(m, n)\right] \frac{d^2 W_{mn}^{(1)}}{dt^2} + \varepsilon_1 \frac{dW_{mn}^{(1)}}{dt} + \\ & \quad + \Omega_1^2(m, n) W_{mn}^{(1)} + M_2^{(1)}(m, n) \frac{d^2 W_{mn}^{(2)}}{dt^2} + B_{mn}^{(1)} W_{mn}^{(1)} = 0, \\ & \left[1 + M_2^{(2)}(m, n)\right] \frac{d^2 W_{mn}^{(2)}}{dt^2} + \varepsilon_2 \frac{dW_{mn}^{(2)}}{dt} + \\ & \quad + \Omega_2^2(m, n) W_{mn}^{(2)} + M_1^{(2)}(m, n) \frac{d^2 W_{mn}^{(1)}}{dt^2} + B_{mn}^{(2)} W_{mn}^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} W_{mn}^{(i)} &= W_0^{(i)}(m, n), \quad M_q^{(i)}(m, n) = m_q^{(i)}(0, 0), \quad (q = 1, 2) \\ B_{mn}^{(i)} &= b_{00}^{(i)}(m, n) = (-1)^i \frac{\rho_0 g n^2 b^2}{2l R_i h_i \rho_i} \left[ 1 - \left( \frac{\sin \mu_m b}{\mu_m b} \right)^2 \right], \quad \mu_m = \lambda_0 = m\pi/l. \end{aligned} \quad (1.18)$$

На основе (1.17) будем исследовать динамическое поведение возмущений (сообщаемых рассматриваемой гидроупругой системе) в зависимости от наличия жидкости в области, ограниченной оболочками и жёстким дном. Отдельно рассматриваются возможность потери статической устойчивости под действием гидростатического давления и собственные колебания гидроупругой системы в докритической стадии.

**2. Возможность потери статической устойчивости.** Решение системы (1.17) представим в виде

$$W_{mn}^{(1)}(t) = c_{mn}^{(1)} e^{\nu t}, \quad W_{mn}^{(2)}(t) = c_{mn}^{(2)} e^{\nu t}. \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в (1.17) приводит к следующей системе однородных линейных уравнений относительно  $c_{mn}^{(1)}$ ,  $c_{mn}^{(2)}$ :

$$\left[ \left(1 + M_1^{(1)}(m, n)\right) \nu^2 + \varepsilon_1 \nu + \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}\right) \right] c_{mn}^{(1)} + M_2^{(1)}(m, n) \nu^2 c_{mn}^{(2)} = 0, \quad (2.2)$$

$$M_1^{(2)}(m, n) \nu^2 c_{mn}^{(1)} + \left[ \left(1 + M_2^{(2)}(m, n)\right) \nu^2 + \varepsilon_2 \nu + \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}\right) \right] c_{mn}^{(2)} = 0.$$

Из условия существования нетривиального решения системы (2.2) получим следующее уравнение частот:

$$a_0 \nu^4 + a_1 \nu^3 + a_2 \nu^2 + a_3 \nu + a_4 = 0, \quad (2.3)$$

где

$$a_0 = \left(1 + M_1^{(1)}(m, n)\right) \left(1 + M_2^{(2)}(m, n)\right) - M_1^{(2)}(m, n) M_2^{(1)}(m, n),$$

$$a_1 = \varepsilon_1 \left(1 + M_2^{(2)}(m, n)\right) + \varepsilon_2 \left(1 + M_1^{(1)}(m, n)\right), \quad (2.4)$$

$$a_2 = \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}\right) \left(1 + M_2^{(2)}(m, n)\right) + \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}\right) \left(1 + M_1^{(1)}(m, n)\right) + \varepsilon_1 \varepsilon_2,$$

$$a_3 = \varepsilon_2 \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}\right) + \varepsilon_1 \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}\right),$$

$$a_4 = \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}\right) \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}\right).$$

На основе теоремы Гурвица, для того, чтобы все корни уравнения (2.3) при  $a_0 > 0$  имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были положительными, то есть, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$a_i > 0 \quad (i = \overline{0, 4}), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}\right) \left(1 + M_2^{(2)}(m, n)\right) - \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}\right) \left(1 + M_1^{(1)}(m, n)\right) \right]^2 + \\ & + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \varepsilon_2 \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}\right) \left(1 + M_1^{(1)}(m, n)\right) + \varepsilon_1 \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}\right) \left(1 + M_2^{(2)}(m, n)\right) \right] + \\ & + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \left[ \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}\right) \left(1 + M_2^{(2)}(m, n)\right) + \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}\right) \left(1 + M_1^{(1)}(m, n)\right) \right] + \\ & + M_1^{(2)}(m, n) M_2^{(1)}(m, n) \left[ \varepsilon_2 \left(\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}\right) + \varepsilon_1 \left(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}\right) \right]^2 > 0. \end{aligned}$$

Первое и второе ( $i = 0, i = 1$ ) условия из (2.5) выполняются во всех случаях, поскольку [5]  $M_i^{(i)}(m, n) > 0$ , а численный анализ показывает, что

$$\begin{aligned} M_1^{(1)}(m, n) &> \left| M_1^{(2)}(m, n) \right| \\ M_2^{(2)}(m, n) &> \left| M_2^{(1)}(m, n) \right| \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из (1.18) следует, что  $B_{mn}^{(2)} > 0$ , а  $B_{mn}^{(1)} < 0$ , следовательно, с учетом (1.16),  $\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)} > 0$ , а  $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}$  может быть и отрицательной. Если  $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} > 0$ , то, как видно из (2.4) и (2.5), все остальные условия теоремы Гурвица (неравенства (2.5)) выполняются, и рассматриваемая гидроупругая система устойчива относительно малых возмущений. Если же  $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} < 0$ , то  $a_4 < 0$ , следовательно, нарушаются условия теоремы Гурвица и система теряет устойчивость. Переход от устойчивости к неустойчивости происходит при условии  $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} = 0$ . (2.7)

Из условия (2.7), в частности, когда  $b = l$ , для определения критической длины оболочки, при котором происходит потеря устойчивости, получим уравнение

$$gl = \frac{T}{n^2} \left\{ \left[ n^2 + \left( \frac{m\pi R_1}{l} \right)^2 \right]^2 + \beta \left( \frac{m\pi R_1}{l} \right)^4 \left[ n^2 + \left( \frac{m\pi R_1}{l} \right)^2 \right]^{-2} \right\}, \quad (2.8)$$

где

$$T = \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{c_t^2}{3(1-\nu_1)} \left( \frac{h_1}{R_1} \right)^3, \quad \beta = 12(1-\nu_1^2) \left( \frac{R_1}{h_1} \right)^2, \quad c_t^2 = \frac{E_1}{2\rho_1(1+\nu_1)}.$$

$c_t$  – скорость распространения сдвиговых волн в данной упругой среде.

Наибольший интерес представляют те значения аргументов  $m$  и  $n$ , вблизи которых правая часть (2.8) принимает минимальное значение. Легко заметить, что указанная часть является монотонно возрастающей функцией по  $m$  и поэтому примем  $m=1$ . Тогда, минимизируя функцию, лежащую в правой части (2.8) по  $n$ , для определения критического числа волн  $n_*$  по окружности получим

$$n^4 - a_0^4 - \beta a_0^4 \frac{3n^2 + a_0^2}{(n^2 + a_0^2)^2} = 0, \quad a_0 = \pi R_1 / l. \quad (2.9)$$

Таблица 1

$R_{1м}$ $h_1 \times 10^3 м$	0.5	1	2
2	2.6 5	1.6 10	0.95 22
3	4.3 3	2.6 7	1.56 15
5	8.1 2	4.9 5	2.93 10
7	12.4 2	7.4 4	4.44 8
10	19.3 1	11.5 3	6.09 5

Уравнения (2.8) и (2.9) составляют систему для определения  $n_*$  и критической длины  $l_*$ . Результаты численного решения указанных уравнений (значения  $l_*$ ), в случае гидроупругой системы «дюралюминиевая оболочка – вода» ( $c_t=5100$ м/сек,  $\rho_1/\rho_0=2.7$ ,  $\nu_1=0.3$ ) при различных значениях  $h_1$  и  $R_1$ , приведены в табл.1, где в каждой нижней части клетки приведены

критические значения волнового числа  $n_*$ .

Таким образом, установлена возможность потери устойчивости под действием гидростатического давления и показано, что критическая длина  $l_*$  является монотонной функцией от геометрических параметров задачи, причем – возрастающая от толщины и убывающая от радиуса оболочки (табл.1).

**3. Собственные колебания.** Рассмотрим уравнение (2.3), когда  $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} > 0$  (докритическое состояние) и затухание достаточно мало ( $\varepsilon_i \ll \Omega_j$ , ( $i, j = 1, 2$ )). В этом случае уравнение (2.3) упрощается и принимает следующий вид ( $\nu = i\omega$ ,  $\omega$  – частота собственных колебаний гидроупругой системы):

$$\begin{aligned} & \left[ (1 + M_1^{(1)}(m, n))(1 + M_2^{(2)}(m, n)) - M_1^{(2)}(m, n)M_2^{(1)}(m, n) \right] \omega^4 - \\ & - \left[ (\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)})(1 + M_2^{(2)}(m, n)) + (\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)})(1 + M_1^{(1)}(m, n)) \right] \omega^2 + \\ & + (\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)})(\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если одна из оболочек является абсолютно жёсткой, то из (3.1) для частот колебаний, соответственно, получим

$$\omega_{mn}^2 = \begin{cases} \frac{\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}}{1 + M_2^{(2)}(m, n)} & \text{при } D_1 = \infty, \\ \frac{\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}}{1 + M_1^{(1)}(m, n)} & \text{при } D_2 = \infty. \end{cases} \quad (3.2)$$

В общем случае уравнение (3.1) при  $\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} > 0$  имеет два действительных корня, следовательно, система колеблется двумя разными частотами, которые определяются следующими выражениями:

$$\omega_i^2 = \left( A + (-1)^i \sqrt{B} \right) / C, \quad (i = 1, 2), \quad (3.3)$$

где

$$A = \frac{\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}}{1 + M_1^{(1)}(m, n)} + \frac{\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}}{1 + M_2^{(2)}(m, n)},$$

$$C = 2 \left( 1 - \frac{M_1^{(2)}(m, n) M_2^{(1)}(m, n)}{(1 + M_1^{(1)}(m, n))(1 + M_2^{(2)}(m, n))} \right), \quad (3.4)$$

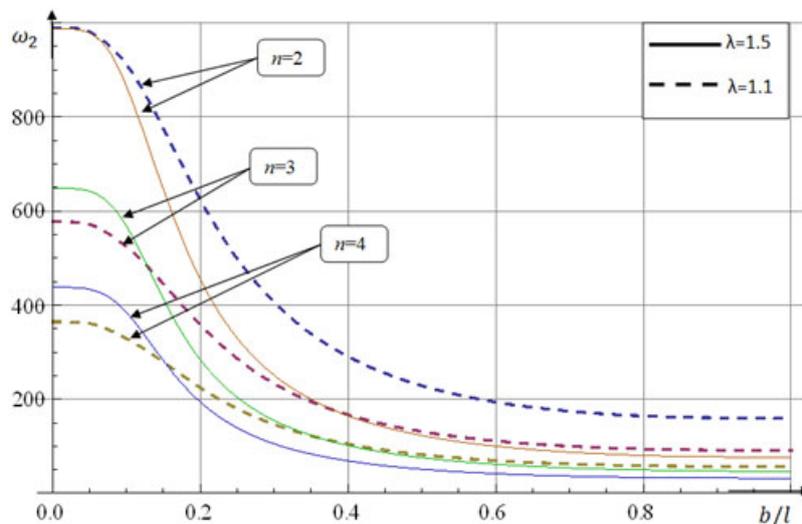
$$B = \left( \frac{\Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)}}{1 + M_1^{(1)}(m, n)} - \frac{\Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)}}{1 + M_2^{(2)}(m, n)} \right)^2 +$$

$$+ \frac{4M_1^{(2)}(m, n) M_2^{(1)}(m, n)}{\left( (1 + M_1^{(1)}(m, n))(1 + M_2^{(2)}(m, n)) \right)^2} \left( \Omega_1^2(m, n) + B_{mn}^{(1)} \right) \left( \Omega_2^2(m, n) + B_{mn}^{(2)} \right).$$

Из (1.16) и (2.6) следует, что  $C > 0$  и  $B > 0$ . Более того, формулы (3.3) и (3.4) показывают, что  $\omega_1 < \omega_2$ .

С учетом  $\varepsilon_i \ll \Omega_j$ , ( $i, j = 1, 2$ ), из первого уравнения (2.2) следует, что если  $\omega = \omega_1$ , то  $c_{mn}^{(1)} c_{mn}^{(2)} < 0$ , а это значит, что частота  $\omega_1$  соответствует несимметричным колебаниям системы (оболочки колеблются в различных фазах), если же  $\omega = \omega_2$ , то  $c_{mn}^{(1)} c_{mn}^{(2)} > 0$ , и частота  $\omega_2$  соответствует симметричным колебаниям (оболочки колеблются в одной фазе). Рассмотрим в отдельности эти колебания.

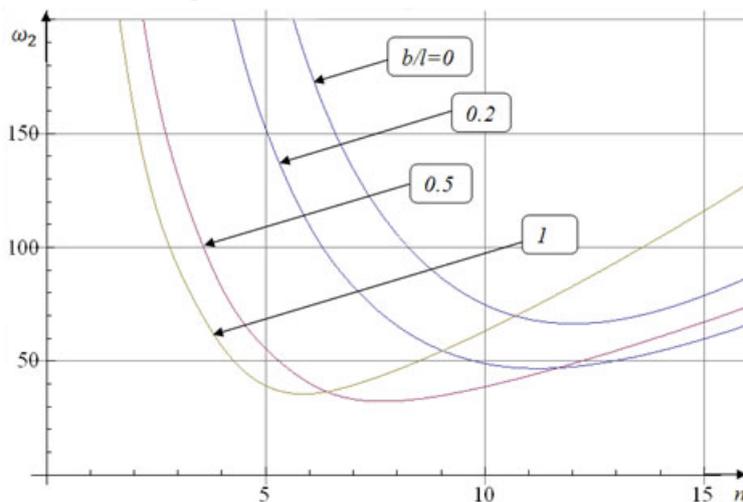
**3.1. Симметричные колебания.** На основе (3.1) с учетом (1.16) и (1.18) произведено вычисление значений частот колебаний ( $\omega_2$ ) гидроупругой системы, в случае «дюралюминиевая оболочка – вода» –  $c_i^{(i)} = 5100 \text{ м/сек}$ ,  $\rho_i / \rho_0 = 2.7$ ,  $\nu_i = 0.3$ ,  $i = 1, 2$ . Значения  $\omega_2$  в зависимости от  $b/l$  приведены на фиг.1 при  $m = 1$ ,  $R_1 = 2 \text{ м}$ ,  $l = 2R_1$ ,  $h_i = 10^{-3} \text{ м}$  и различных  $n$  и  $\lambda \left( \lambda = \frac{R_2}{R_1} \right)$ .



Фиг. 1

Из фиг.1 видно, что при сравнительно малых значениях  $b/l$  частота симметричных колебаний увеличивается с увеличением  $\lambda$ . Дальнейшее увеличение  $b/l$  приводит к обратному влиянию. Независимо от  $\lambda$  с увеличением  $b/l$  частоты симметричных колебаний (являющиеся монотонно убывающими функциями от  $b/l$ ) существенно уменьшаются.

При тех же физико-геометрических параметрах, как в первом примере, на фиг.2 приведена зависимость  $\omega_2$  от  $n$  при  $\lambda=1.1$  и различных значениях  $b/l$ .

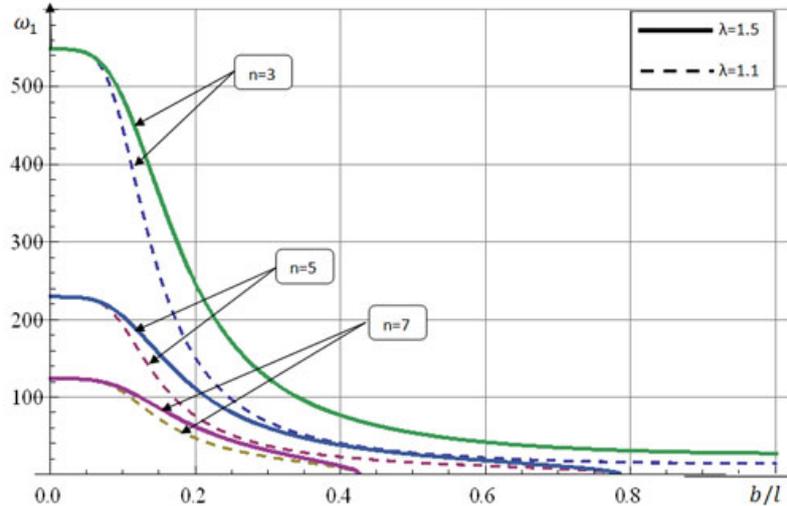


Фиг.2

Фиг.2 показывает, что частота симметричных колебаний имеет минимум от  $n$ , аналогично случаю отсутствия жидкости. С увеличением  $b/l$ , как число волн по окружности, при котором  $\omega_2$  принимает минимальное значение, так и минимальные значения  $\omega_2$  уменьшаются. Отметим, что на фиг.1 рассмотрены те интервалы изменения  $n$ , на котором частота монотонно убывает.

**3.2. Несимметричные колебания.** В этом случае оболочки колеблются в различных фазах и частота колебаний рассматриваемой гидроупругой системы

является  $\omega_1$ . На основе (3.1) – (3.4) при  $i = 1$  произведено вычисление  $\omega_1$  при тех же физико-геометрических параметрах, рассмотренных выше. Результаты вычисления приведены на фиг. 3.



Фиг.3

Из фиг.3 видно, что:

- а) с увеличением  $\lambda$  частота несимметричных колебаний увеличивается;
  - б) присутствие жидкости, как и в случае симметричных колебаний, приводит к существенному уменьшению частоты колебаний;
  - в) как и следовало ожидать, частота  $\omega_1$  при определённых значениях  $b/l$  обращается в нуль, означающее потерю устойчивости гидроупругой системы.
- Отметим, что здесь в отличие от фиг.1 при  $b = 0$ , кривые начинаются с одной и той же точки, демонстрируя тот факт, что  $\omega_1 = \Omega_1$ , а радиус  $R_1$  внутренней оболочки в обоих ( $\lambda=1.1$ ,  $\lambda=1.5$ ) случаях – один и тот же.

При тех же физико-геометрических параметрах, в табл.2 приведена зависимость  $\omega_1$  от  $n$  при  $\lambda=1.1$  и различных значениях  $b/l$ .

Таблица 2

$n \backslash b/l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2549	1814	972.6	548.5	340.7	229.2	164.2	123.8	98.05
0.1	383.5	1381	772.1	445.8	281.6	192.4	139.6	106.4	85.03
0.2	141.2	411.5	242.5	151.1	103.2	75.85	58.71	47.21	39.13
0.4	56.34	86.91	58.38	40.58	29.92	22.99	17.41	8.986	-
0.5	44.11	55.05	39.28	28.24	21.16	15.99	9.084	-	-
0.6	37.45	39.26	29.55	21.81	16.46	11.54	-	-	-
0.7	33.81	30.51	24.08	18.16	13.69	7.519	-	-	-
0.8	31.98	25.33	20.88	16.05	11.95	-	-	-	-
1	31.19	20.29	18.04	14.31	9.884	-	-	-	-

Из табл.2 видно, что частота несимметричных колебаний в зависимости от числа волн по окружности, в основном, имеет следующее поведение:

- а) при сравнительно малых значениях  $b/l$  ( $b/l < b_0/l$ ) частота колебаний имеет максимум в окрестности  $n=1$  (значение  $b_0$  зависит от физико-геометрических параметров задачи);
- б) если  $b/l > b_0/l$ , то функция  $\omega_1(n)$  является монотонно убывающей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буйвол В.Н. Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. Киев: Наукова думка, 1975. 192с.
2. Мнев Е.Н., Перцев А.К. Гидроупругость оболочек: Л.: "Судостроение", 1970. 356с.
3. Гузь А.Н., Кубенко Б.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек: Методы расчета оболочек. Т.5. Киев: Наукова Думка, 1982. 400с.
4. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320с.
5. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С. Нелинейные задачи динамики упругих оболочек, частично заполненных жидкостью. //Прикладная механика. 2000. Т.36. № 4.
6. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины.// Докл. АН АрмССР. 1965. Т.ХI. № 4.
7. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Устойчивость цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью при внешнем динамическом давлении. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. № 1. С.25–32.
8. Багдасарян Г.Е. Колебания коаксиальных цилиндрических оболочек с зазором, частично заполненным жидкостью. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1968. Т.ХХI. № 4. С.40–47.
9. Краснопольская Т.С., Подчасов Н.П. Вынужденные колебания жидкости между двумя цилиндрами, возбуждаемые вибрациями внутренней оболочки. //Прикладная механика. 1992. 28. № 4. С.42-48.
10. Myung Jo Jung, Yong Beum Kim, Kyeong Hoon Jeong, Sunh Choi Modal Analysis of Coaxial Shells with fluid-Filled Annulus. J. Of the Korean Nuclear Society. V.32, n.4, pp.328-341,2000.
11. Багдасарян Г.Е., Марухян С.А. Колебания и устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек с зазором, частично заполненным жидкостью.// В сб. научн. тр. меж. конф. "Актуальные проблемы механики сплошных сред". 2010. Т.1. С.113-118.
12. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике. М.: Гостехиздат, 1949.
13. Mixon John S., Herr Robert W. An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid. Techn. Rept. NASA, Nr. R – 145, 1962.

#### Сведения об авторах:

**Багдасарян Геворг Ервандович** – академик НАН РА, профессор, ЕГУ, факультет информатики и прикладной математики, Тел.: (374 10) 55 29 64

**E-mail:** [Gevorgb@rau.am](mailto:Gevorgb@rau.am)

**Марухян Сатик Арамовна** – лаборант Института механики НАН Армении

Тел.: (374 93) 37 25 04

**E-mail:** [satineh.marukhyan@gmail.com](mailto:satineh.marukhyan@gmail.com)

Поступила в редакцию 31.05.2011