ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №3, 2011 Механика

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

ГАСПАРЯН А.В.

Ключевые слова: композит, теория упругости, конечно-разностные уравнения, свёртка функций, формула Шварца, условия Коши-Римана.
Keywords: composite, theory of elasticity, equations of finite differences

Գասպարյան Ա.Վ.
Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ շերտավոր կոմպոզիտի լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի շուրջ
Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ երկրաչափական և ֆիզիկական տարբեր բնութագրիչներ ունեցող շերտերից կազմված կոմպոզիտի լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի նկատմամբ զարգացվում է [1] աշխատանքից տարբեր մոտեցում՝ հիմնված շերտում հոլոմորֆ ֆունկցիայի ներկայացման Շվարցի բանաձևի վրա:

Gasparyan A.V.
To the Problem of Stressed State of a Layered Composite under Antiplane Deformation
An approach to the problem of stressed state of a layered composite with different geometrical and physical characteristics under antiplane deformation is developed which is different from that of studied in the paper [1]. The present approach is based on Swartz formula for representation of functions holomorphic in a strip.

Развивается отличный от работы [1] подход к решению задачи о напряжённом состоянии слоистого композита, состоящего из произвольного числа слоев с различными геометрическими и физическими характеристиками. Этот подход основан на формуле Шварца представления голоморфной в полосе функции.

Рассматривается задача о напряжённом состоянии композита, представляющего собой кусочно-однородное тело в виде пакета из произвольного конечного числа слоев с различными упругими и геометрическими характеристиками, когда на граничных плоскостях действуют касательные силы, вызывающие антиплоскую деформацию.

В работе [1] приведено решение этой задачи при помощи интегрального преобразования Фурье. В настоящей работе к данной задаче применяется другой подход, основанный на формуле Шварца [2] представления голоморфной в полосе функции с сочетанием математического аппарата преобразования Фурье. В результате, решение поставленной задачи опять сводится к решению конечно-разностных уравнений второго порядка [3].

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть композит, отнесённый к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, представляет собой пакет из произвольного конечного числа n упругих слоев

$$\Omega_k = \{-\infty < x, z < \infty, \qquad h_{k-1} \le y \le h_k\} \qquad (k = \overline{1,n})$$

с модулями сдвига G_k. Пусть далее к нижней и верхней плоскостям $y = h_0$ и $y = h_n$ приложены касательные силы интенсивностей $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$, соответственно, т. е.

$$\tau_{yz}\Big|_{y=h_0}=\tau_0(x), \qquad \tau_{yz}\Big|_{y=h_n}=\tau_n(x) \qquad (-\infty<x<\infty),$$

где $\tau_{yz}-$ компонента касательных напряжений. Будем считать, что под действием этих сил композит находится в состоянии антиплоской деформации в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy. Требуется определить компоненты напряжений и смещений в композите, когда функции касательных напряжений на крайних гранях композита $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$ наперёд заданы.

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи обозначим через $w_k=w_k(x,y)$ единственную отличную от нуля компоненту смещений в направлении оси Oz, а неизвестные касательные контактные напряжения на гранях $y=h_{k-1}$ и $y=h_k$ $(k=\overline{1,n})$ слоя Ω_k – через $\tau_{k-1}(x)$ и $\tau_k(x)$, соответственно. Тогда при помощи закона Гука для полосы $\Pi_k=\{-\infty<x<\infty, \quad h_{k-1}\le y\le h_k\}$ $(k=\overline{1,n})$ получим следующую граничную задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w_k}{\partial y^2}=0 \quad (-\infty<x<\infty, \ h_{k-1}<y<h_k)\\ G_k\dfrac{\partial w_k}{\partial y}\Big|_{y=h_{k-1}}=\tau_{k-1}(x), \quad G_k\dfrac{\partial w_k}{\partial y}\Big|_{y=h_k}=\tau_k(x) \ (-\infty<x<\infty, \ k=\overline{1,n}).\end{cases} \tag{1.1}$$

Так как $G_k w_k(x,y)$ – гармоническая в полосе Π_k, $(k=\overline{1,n})$ – функция, то можно ввести в рассмотрение сопряжённую с ней функцию v_k, и, следовательно, голоморфную в полосе Π_k функцию

$$f_k(z)=G_k w_k(x,y)+iv_k(x,y)+iC_k, \qquad (k=\overline{1,n})$$

где C_k – произвольная вещественная постоянная. Отсюда по условиям Коши–Римана будем иметь:

$$f_k'(z)=G_k\frac{\partial w_k(x,y)}{\partial x}-iG_k\frac{\partial w_k(x,y)}{\partial y}.$$

Тогда функция

$$F_k(z)=if_k'(z)=G_k\frac{\partial w_k(x,y)}{\partial y}+iG_k\frac{\partial w_k(x,y)}{\partial x} \tag{1.2}$$

также голоморфна в полосе Π_k. Замечая, что

$$\operatorname{Re}F_k(z)=G_k\frac{\partial w_k(x,y)}{\partial y},$$

граничную задачу (1.1) можем записать в виде:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w_k}{\partial y^2}=0 \quad (-\infty<x<\infty,\;\; h_{k-1}<y<h_k) \\
\operatorname{Re}F_k(z)\big|_{y=h_{k-1}}=G_k\,\dfrac{\partial w_k}{\partial y}\bigg|_{y=h_{k-1}}=\tau_{k-1}(x), \\
\operatorname{Re}F_k(z)\big|_{y=h_k}=G_k\,\dfrac{\partial w_k}{\partial y}\bigg|_{y=h_k}=\tau_k(x)\;\;(k=\overline{1,n}).
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

Теперь воспользуемся формулой Шварца [2] для полосы. Известно, что голоморфную в полосе $\Pi=\{-\infty<\xi<\infty,\;\; 0\le\eta\le1\}$ функцию $g(\zeta)$, где $\zeta=\xi+i\eta$, можно представить в виде:

$$
g(\zeta)=\frac{1}{2i}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{cth}\frac{\pi(\tau-\zeta)}{2}q_0(\tau)d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{th}\frac{\pi(\tau-\zeta)}{2}q_1(\tau)d\tau\right)+iC\,. \tag{1.4}
$$

Здесь $q_0(\tau)$ и $q_1(\tau)$ – граничные значения действительной части $g(\zeta)$, соответственно, на граничных прямых $\zeta=\tau$ и $\zeta=\tau+i$, C – произвольная вещественная постоянная, а первый интеграл при $\tau=\zeta$ понимается в смысле главного значения по Коши.

Сначала преобразуем формулу Шварца для полосы Π_k, для чего полосу Π_k при помощи формул

$$
\xi=\frac{x-h_{k-1}}{h_k-h_{k-1}},\qquad \eta=\frac{y-h_{k-1}}{h_k-h_{k-1}},
$$

где $z=x+iy,\quad (-\infty<x<\infty,\;\; h_{k-1}<y<h_k)$,

преобразуем в полосу Π. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\zeta=\xi+i\eta=\frac{z-(h_{k-1}+ih_{k-1})}{h_k-h_{k-1}},\qquad (-\infty<\xi<\infty,\;\; 0<\eta<1)\\
&\tau=\frac{t-h_{k-1}}{h_k-h_{k-1}},\qquad (-\infty<t,\tau<\infty).
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Подставляя выражения (1.5) в (1.4), после элементарных преобразований получим формулу Шварца для полосы Π_k :

$$
\begin{aligned}
f_k(z)=\frac{1}{2i(h_k-h_{k-1})}\Bigg[&\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{cth}\frac{\pi\left(t-z+ih_{k-1}\right)}{2\left(h_k-h_{k-1}\right)}u_{k-1}(t)dt-\\
-&\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{th}\frac{\pi\left(t-z+ih_{k-1}\right)}{2\left(h_k-h_{k-1}\right)}u_k(t)dt\Bigg]+iC,\quad f_k(z)=g\left(\frac{z-\left(h_{k-1}+ih_{k-1}\right)}{h_k-h_{k-1}}\right)
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

$(k=\overline{1,n})$,

где $f_k(z)$ – голоморфная в полосе Π_k, а

$$u_k(t) = q_1\left(\frac{t-h_{k-1}}{h_k - h_{k-1}}\right), \quad u_{k-1}(t) = q_0\left(\frac{t-h_{k-1}}{h_k - h_{k-1}}\right)$$

– граничные значения действительной части $f_k(z)$, соответственно, на прямых $z = t + ih_{k-1}$ и $z = t + ih_k \quad (k = \overline{1,n})$.

Применяя эту формулу к функции $F_k(z)$ в (1.2) и принимая во внимание её граничные значения из (1.3), получим

$$F_k(z) = \frac{1}{2id_k}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth}\frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k}\tau_{k-1}(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th}\frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k}\tau_k(t)dt\right] \tag{1.7}$$

где $z = x + iy, \;\; d_k = h_k - h_{k-1}, \; (-\infty < x < \infty, \;\; h_{k-1} \le y \le h_k) \;\; (k = \overline{1,n})$.

Из (1.2) очевидно, что

$$f_k'(z) = -iF_k(z) = G_k\frac{\partial w_k(x,y)}{\partial x} - iG_k\frac{\partial w_k(x,y)}{\partial y}. \tag{1.8}$$

Тогда

$$\operatorname{Re} f_k'(z) = G_k\frac{\partial w_k(x,y)}{\partial x}. \tag{1.9}$$

Подставляя значение $F_k(z)$ из (1.8) в (1.7), находим

$$f_k'(z) = \frac{1}{2d_k}\left[-\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth}\frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k}\tau_{k-1}(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th}\frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k}\tau_{k-1}(t)dt\right],$$

откуда

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f_k'(z) = \frac{1}{2d_k}\Bigg\{&-\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k}\right]\tau_{k-1}(t)dt + \\ &+\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\left[\operatorname{th}\frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k}\right]\tau_{k-1}(t)dt\Bigg\}\end{aligned} \tag{1.10}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\operatorname{cth}\frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k} &= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(t-x)}{d_k}}{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi(t-x)}{2d_k} - \sin^2\dfrac{\pi(h_{k-1}-y)}{2d_k}} \\ \operatorname{Re}\operatorname{th}\frac{\pi(t-z+ih_{k-1})}{2d_k} &= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(t-x)}{d_k}}{\operatorname{ch}^2\dfrac{\pi(t-x)}{2d_k} + \sin^2\dfrac{\pi(h_{k-1}-y)}{2d_k}}\end{aligned} \tag{1.11}$$

Подставляя эти выражения в (1.10), будем иметь:

$$\operatorname{Re} f_k'(z) = \frac{1}{4d_k}\left\{-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left[\pi(t-x)/d_k\right]}{\operatorname{sh}^2\left[\pi(t-x)/2d_k\right] - \sin^2\left[\pi(h_{k-1}-y)/2d_k\right]}\tau_{k-1}(t)dt + \right.$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\left[\pi\left(t-x\right)/d_k\right]}{\mathrm{ch}^2\left[\pi\left(t-x\right)/2d_k\right]+\sin^2\left[\pi\left(h_{k-1}-y\right)/2d_k\right]}\tau_k(t)dt\right\}. \qquad (1.12)$$

Далее запишем условия непрерывности смещений на линии контакта $y=h_k$ полос Π_k и Π_{k+1},

$$w_k(x,y)\big|_{y=h_k}=w_{k+1}(x,y)\big|_{y=h_k} \qquad (k=\overline{1,n^{-1}})$$

или

$$\left.\frac{\partial w_k(x,y)}{\partial x}\right|_{y=h_k}=\left.\frac{\partial w_{k+1}(x,y)}{\partial x}\right|_{y=h_k} \qquad (k=\overline{1,n^{-1}}) \qquad (1.13)$$

Учитывая (1.9) и (1.12), после элементарных преобразований получим

$$\left.\frac{\partial w_k(x,y)}{\partial x}\right|_{y=h_k}=\frac{1}{4G_kd_k}\left\{-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\mathrm{sh}\left[\pi(t-x)/2d_k\right]\mathrm{ch}\left[\pi(t-x)/2d_k\right]}{\mathrm{sh}^2\left[\pi\left(t-x\right)/2d_k\right]-1}\tau_{k-1}(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\mathrm{sh}\left[\pi\left(t-x\right)/2d_k\right]\mathrm{ch}\left[\pi\left(t-x\right)/2d_k\right]}{\mathrm{ch}^2\left[\pi\left(t-x\right)/2d_k\right]+1}\tau_k(t)dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{2G_kd_k}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{cth}\frac{\pi(t-x)}{2d_k}\tau_k(t)dt-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{th}\frac{\pi(t-x)}{2d_k}\tau_{k-1}(t)dt\right\}. \qquad (1.14)$$

Аналогичным образом

$$\left.\frac{\partial w_{k+1}(x,y)}{\partial x}\right|_{y=h_k}=\frac{1}{2G_{k+1}d_{k+1}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{th}\frac{\pi(t-x)}{2d_{k+1}}\tau_{k+1}(t)dt-\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{cth}\frac{\pi\left(t-x\right)}{2d_{k+1}}\tau_k(t)dt\right\}. \qquad (1.15)$$

Подставляя теперь (1.14) и (1.15) в (1.13) и применяя интегральное преобразование Фурье к (1.10), придём к равенству

$$\frac{1}{G_kd_k}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{th}\frac{\pi\left(t-x\right)}{2d_k}\tau_{k-1}(t)e^{-i\lambda t}dtd\lambda-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{cth}\frac{\pi\left(t-x\right)}{2d_k}\tau_k(t)e^{-i\lambda t}dtd\lambda\right]=$$

$$=\frac{1}{G_{k+1}d_{k+1}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{cth}\frac{\pi(t-x)}{2d_{k+1}}\tau_k(t)e^{-i\lambda t}dtd\lambda-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{th}\frac{\pi(t-x)}{2d_{k+1}}\tau_{k+1}(t)e^{-i\lambda t}dtd\lambda\right] \qquad (1.16)$$

Далее применим формулу преобразования Фурье для свёртки функций [4] $F[f_1*f_2]=F[f_1]F[f_2]$ к (1.16). В результате,

$$\frac{1}{G_kd_k}\left[\bar{\tau}_{k-1}(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{th}\frac{\pi t}{2d_k}e^{-i\lambda t}dt-\bar{\tau}_k(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{cth}\frac{\pi t}{2d_k}e^{-i\lambda t}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{G_{k+1}d_{k+1}}\left[\bar{\tau}_k(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{cth}\frac{\pi t}{2d_{k+1}}e^{-i\lambda t}dt-\bar{\tau}_{k+1}(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{th}\frac{\pi t}{2d_{k+1}}e^{-i\lambda t}dt\right], \qquad (1.17)$$

где $\bar{\tau}_k(\lambda) = F[\tau_k(t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau_k(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad (k = \overline{0,n})$ – преобразование Фурье функции $\tau_k(t)$.

Вычислим интегралы в левой части (1.17). Из нечётности функций $\operatorname{cth} x$ и $\operatorname{th} x$ вытекает

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th}\frac{\pi t}{2d_k} e^{-i\lambda t} dt = -2i\left[\int\limits_0^{\infty}\left(\operatorname{th}\frac{\pi t}{2d_k} - 1\right)\sin\lambda t dt + \int\limits_0^{\infty}\sin\lambda t dt\right] \\
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth}\frac{\pi t}{2d_k} e^{-i\lambda t} dt = -2i\left[\int\limits_0^{\infty}\left(\operatorname{cth}\frac{\pi t}{2d_k} - 1\right)\sin\lambda t dt + \int\limits_0^{\infty}\sin\lambda t dt\right].
\end{aligned} \tag{1.18}
$$

Учитывая значения интегралов [5]

$$\int\limits_0^{\infty}\left(\operatorname{th}\frac{\pi t}{2d_k} - 1\right)\sin\lambda t dt = 1/d_k \operatorname{sh}\lambda d_k - 1/\lambda$$

$$\int\limits_0^{\infty}\left(\operatorname{cth}\frac{\pi t}{2d_k} - 1\right)\sin\lambda t dt = d_k \operatorname{cth}\lambda d_k - 1/\lambda,$$

а также значение интеграла в смысле теории обобщенных функций [6]

$$\int\limits_0^{\infty}\sin\lambda t dt = 1/\lambda,$$

получим

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^{\infty}\left(\operatorname{th}\frac{\pi t}{2d_k} - 1\right)\sin\lambda t dt + \int\limits_0^{\infty}\sin\lambda t dt = d_k/\operatorname{sh} d_k\lambda, \\
&\int\limits_0^{\infty}\left(\operatorname{cth}\frac{\pi t}{2d_k} - 1\right)\sin\lambda t dt + \int\limits_0^{\infty}\sin\lambda t dt = d_k \operatorname{cth} d_k\lambda.
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

Теперь подстановка (1.18) и (1.19) в (1.17) даст конечно-разностные уравнения второго порядка

$$\frac{\bar{\tau}_{k+1}(\lambda)}{G_{k+1}\operatorname{sh}\lambda d_{k+1}} + \frac{\bar{\tau}_{k-1}(\lambda)}{G_k \operatorname{sh}\lambda d_k} = \frac{\bar{\tau}_k(\lambda)\operatorname{cth}\lambda d_{k+1}}{G_{k+1}} + \frac{\bar{\tau}_k(\lambda)\operatorname{cth}\lambda d_k}{G_k}$$

или

$$
\begin{aligned}
&a_k\bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1})\bar{\tau}_k + a_{k+1}\bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}) \\
&a_k = 1/G_k \operatorname{sh}(\lambda d_k), \ \ b_k = \operatorname{cth}(\lambda d_k)/G_k, \ d_k = h_k - h_{k-1} \quad (k = \overline{1,n}).
\end{aligned} \tag{1.20}
$$

Для сведения (1.20) к конечно-разностным уравнениям первого порядка положим

$$a_k\bar{\tau}_{k-1} - b_k\bar{\tau}_k = \omega_k \tag{1.21}$$

$$a_{k+1}\bar{\tau}_{k+1} - b_{k+1}\bar{\tau}_k = \chi_{k+1} \quad (k = \overline{1, n-1}). \tag{1.22}$$

Тогда система уравнений (1.20) перейдёт в систему

$$\omega_k + \chi_{k+1} = 0 \qquad (k = \overline{1, n-1}). \tag{1.23}$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным в работе [1], где решение уравнения (1.23) в конечном итоге сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С.10–20.
2. Бицадзе А.В. Основы теории голоморфных функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 320 с.
3. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 375 с.
4. Снеддон. Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955. 667 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщённых функций. М.: Наука, 1977. 282 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Гаспарян Ануш Вараздатовна,
Младший научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^Б
Тел. (+37410) 52-48-90, E-mail: anush@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 24.02.2011