ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №2, 2011 Механика

УДК 62.50

ГИПОТЕТИЧЕСКОЕ РАССОГЛАСОВАНИЕ ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ ПРИ МНОГИХ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ

БАРСЕГЯН В.Р., СИМОНЯН Т.А., СТЕПАНЯН А.А.

Ключевые слова: дифференциальная игра нескольких лиц, многие целевые множества, гипотетическое рассогласование**.**
Key words: several person differential game, many aim sets, hypothetical mismatch.

Մի քանի խաղացողների շատ նպատակային բազմություններով մի դիֆերենցիալ խաղի համար հիպոթետիկ անհամապատասխանությունը
Բարսեղյան Վ.Ռ., Սիմոնյան Թ.Ա., Ստեփանյան Ա.Ա.

Աշխատանքում շատ նպատակային բազմությունների դեպքում մի քանի խաղացողներով մի դիֆերենցիալ խաղի համար կառուցված է հիպոթետիկ անհամապատասխանությունը: Ձևակերպված են հիմնական հատկությունները, ապացուցելով, որ ռեգուլյար դեպքում հիպոթետիկ անհամապատասխանության ֆունկցիան անընդհատ է կախված ժամանակից և ֆազային դիրքից, ինչպես նաև ունի անընդհատ ածանցյալներ ըստ այդ փոփոխականների:

The Hypothetical Mismatch in One Several Person Differential Game at Many Aim Sets
Barseghyan V.R., Simonyan T.A., Stepanyan A.A.

The hypothetical mismatch for one differential game of several person in case of many aim sets is constructed. The basic characteristics are stated, and it is prooved that the function of hypothetical mismatch in regular case continuously dependens on time and phase condition and it has continuous derivatives of that variables.

В работе для одной дифференциальной игры нескольких лиц при многих целевых множествах построено гипотетическое рассогласование. Сформулированы основные свойства, доказывая, что в регулярном случае функция гипотетического рассогласования непрерывно зависит от времени и фазового состояния, а также имеет непрерывные частные производные по этим переменным.

Введение. Исследование антагонистических дифференциальных игр методом экстремальной конструкции [1] основывается на построении функции гипотетического рассогласования $\left(\varepsilon\left(t,x\right)\right)$ и использовании её свойств.

В работах [1,2] построена функция $\varepsilon\left(t,x\right)$ для игры сближения-уклонения двух игроков при одном целевом множестве, а случаи многих целевых множеств рассмотрены в [3]. Для дифференциальной игры многих игроков при одном целевом множестве построение функции $\varepsilon\left(t,x\right)$ приведено в [4].

Статья посвящена построению и исследованию свойств гипотетического рассогласования для одной дифференциальной игры нескольких лиц при многих целевых множествах и примыкает к работам [1– 4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим конфликтно-управляемую систему, динамика которой описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A\left(t\right)x + \sum_{i=1}^{k} B_i\left(t\right)u_i \tag{1.1}$$

Здесь x – n-мерный фазовый вектор, u_i – управляющее воздействие i-го игрока, которое стеснено условием $u_i \in P_i \in R^{n_i}$ $\left(i=1,\ldots,k\right)$, P_i – компактное множество в пространстве R^{n_i}, $A(t)$ – $(n\times n)$-мерная, $B_i(t)$ – $(n\times n_i)$-мерные $(i=1,\ldots,k)$ непрерывные матрицы функции при $t_0 \le t \le \theta$ (t_0 и θ – заданные моменты времени).

Введём следующие обозначения:

$P = P_1 \times \ldots \times P_k$, $P^{(i)} = P_1 \times \ldots \times P_{i-1} \times P_{i+1} \times \ldots \times P_k$

$u = (u_1,\ldots,u_k)$, $u^{(i)} = (u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_k)$

$K = \{1,2,\ldots,k\}$, $K(i) = \{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k\}$

Пусть заданы промежуточные моменты времени $t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_m = \theta$ и компактные множества $M_1^{(j)},\ldots,M_k^{(j)}$ ($M_i^{(j)} \in R^n$, $j=1,\ldots,m$), которые удовлетворяют следующим условиям:

$M_i^{(j)} \cap G\left(\vartheta_j, t_0, x_0\right) \neq \varnothing$ ($i=1,2,\ldots,k$; $j=1,\ldots,m$),

где через $G\left(\vartheta_j, t_0, x_0\right)$ обозначена область достижимости системы (1.1) из состояния $\{t_0, x_0\}$ в момент времени ϑ_j. Множество $M_i^{(j)}$ является целевым множеством для i-го игрока в момент времени ϑ_j.

Отметим, что области достижимости $G\left(\vartheta_j, t_0, x_0\right)$ $(j=1,\ldots,m)$ являются замкнутыми, ограниченными и выпуклыми множествами [4] и с изменением t и x деформируются непрерывно [5].

Предполагая, что i-ая управляющая сторона (i-ый игрок) стремится уменьшить суммарное расстояние движения (1.1) от своих целевых множеств $M_i^{(j)}$ в моменты времени ϑ_j ($j=1,\ldots,m$) при сопротивлении остальных игроков, будем иметь дифференциальную игру нескольких лиц при многих целевых множествах.

При решении дифференциальных игр методом экстремальной конструкции [2], которая сопоставляется в каждый момент времени t реализующейся позиции $\{t, x[t]\}$, гипотетическое рассогласование имеет важное значение. Функция гипотетического рассогласования для игрока для каждой позиции $\{t, x[t]\}$ оценивает снизу результат игры при самом упорном сопротивлении остальных игроков. На основе этой функции и выбирается минимаксная стратегия игрока, исходя из принципа неухудшения позиции.

Поэтому для линейной дифференциальной игры нескольких лиц, в которой i-ый игрок (для любого $i \in K$) при помощи управляющего воздействия u_i стремится сблизить движение $x(t)$ системы (1.1) к множествам $M_i^{(j)}$ $(j=1,\ldots,m)$ к моментам времени ϑ_j $(j=1,\ldots,m)$ при самом упорном сопротивлении остальных игроков, рассмотрим следующую задачу.

Требуется построить гипотетическое рассогласование i-го игрока и исследовать ее свойства.

2. Построение функции гипотетического рассогласования. Пусть при реализации некоторых управлений игроками, игра достигла некоторой позиции $\{t_*, x_*\}$, причем $\vartheta_{r-1} \le t_* < \vartheta_r$ $\left(r \in \{1,...,m\}\right)$. Рассмотрим движение $x(\tau)$ $\left(t_* \le \tau \le \vartheta_m\right)$, описываемое уравнением (1.1) и удовлетворяющее начальному условию $x(t_*) = x_*$. Пусть игроки выбрали свои стратегии $U_\alpha \div u_\alpha(t,x)$ $(\alpha \in K)$. Тогда система к моменту ϑ_j придёт в состояние $x(\vartheta_j)$ $(j = r,...,m)$, которое вычислится по формуле Коши

$$x(\vartheta_j) = X\left[\vartheta_j, t_*\right]x_* + \int_{t_*}^{\vartheta_j} X\left[\vartheta_j, \tau\right]B_i(\tau)u_i d\tau + \int_{t_*}^{\vartheta_j} X\left[\vartheta_j, \tau\right]\sum_{\alpha\in K(i)} B_\alpha(\tau)u_\alpha d\tau \quad (2.1)$$

Для i-го игрока оценим эвклидовое расстояние $\rho\left[x(\vartheta_j), M_i^{(j)}\right]$ от точки $x(\vartheta_j)$ до множества $M_i^{(j)}$ $(j = r,...,m)$. Следуя [1], расстояние $x(\vartheta_j)$ от любой точки $q \in R^n$ вычислится следующим образом:

$$\rho\left(x(\vartheta_j), q\right) = \max_{\left\|l_i^{(j)}\right\|=1} < l_i^{(j)}, x(\vartheta_j) - q > .$$

Следовательно, расстояние $x(\vartheta_j)$ от множества $M_i^{(j)}$ будет

$$\rho\left[x(\vartheta_j), M_i^{(j)}\right] = \min_{q\in M_i^{(j)}}\left(\max_{\left\|l_i^{(j)}\right\|=1} < l_i^{(j)}, x(\vartheta_j) - q >\right)$$

или

$$\rho\left(x(\vartheta_j), M_i^{(j)}\right) = \max_{\left\|l_i^{(j)}\right\|=1}\left(< l_i^{(j)}, x(\vartheta_j) > + \min_{-q\in M_i^{(j)}} < l_i^{(j)}, q >\right) \quad (2.2)$$

если правая часть (2.2) больше нуля, а в противном случае равно нулю. Учитывая соотношения (2.1) и предполагая, что в моменты времени ϑ_j система находилась в некоторых состояниях $x^{(j)}$ $(j = 1,...,r-1)$, обозначив через $\varepsilon_i\left(t_*, x_*, u_\alpha(\alpha \in K)\right)$ сумму расстояний (2.2) для всех $j = 1,...,m$, получим

$$\varepsilon_i\left(t_*, x_*, u_\alpha(\alpha \in K)\right) = \max_{\left\|l_i^{(s)}\right\|=1(s=1,...,r-1)} \sum_{j=1}^{r-1}\left(< l_i^{(j)}, x^{(j)} > + \min_{-q\in M_i^{(j)}} < l_i^{(j)}, q >\right) +$$

$$+ \max_{\left\|l_i^{(s)}\right\|=1(s=r,...,m)} \sum_{j=r}^{m}\left\{< l_i^{(j)}, X\left[\vartheta_j, t_*\right]x_* > + \min_{-q\in M_i^{(j)}} < l_i^{(j)}, q > +\right.$$

$$\left. + \int_{t_*}^{\vartheta_j} < l_i^{(j)}, X\left[\vartheta_j, \tau\right]B_i(\tau)u_i > d\tau + \int_{t_*}^{\vartheta_j} < l_i^{(j)}, X\left[\vartheta_j, \tau\right]\sum_{\alpha\in K(i)} B_\alpha(\tau)u_\alpha > d\tau\right\}$$

Величины $x^{(j)}$ $(j = 1,...,r-1)$ считаются постоянными.

Следовательно, гипотетическое рассогласование для i -го игрока при самом упорном сопротивлении остальных $\alpha \in K(i)$ игроков будет

$$\varepsilon_i^o(t_*, x_*) = \min_{u_i \in P_i} \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \varepsilon_i(t_*, x_*, u_\alpha(\alpha \in K)) =$$

$$= \max_{\left\| l_i^{(s)} \right\| = 1(s=1,\dots,r-1)} \sum_{j=1}^{r-1} \left(< l_i^{(j)}, x^{(j)} > + \min_{-q \in M_i^{(j)}} < l_i^{(j)}, q > \right) +$$

$$+ \min_{u_i \in P_i} \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \max_{\left\| l_i^{(s)} \right\| = 1(s=r,\dots,m)} \sum_{j=r}^{m} \left\{ < l_i^{(j)}, X\left[\vartheta_j, t_*\right] x_* > + \min_{-q \in M_i^{(j)}} < l_i^{(j)}, q > + \right. \qquad (2.3)$$

$$\left. + \int_{t_*}^{\vartheta_j} < l_i^{(j)}, X\left[\vartheta_j, \tau\right] B_i(\tau) u_i > d\tau + \int_{t_*}^{\vartheta_j} < l_i^{(j)}, X\left[\vartheta_j, \tau\right] \sum_{\alpha \in K(i)} B_\alpha(\tau) u_\alpha > d\tau \right\}$$

Отметим, что выражение (2.3) характеризует для i -го игрока суммарное расстояние своих целевых множеств $M_i^{(j)}$ от области достижимости в моменты времени $\vartheta_j \ (j = 1, \dots, m)$.

Введем обозначение

$$\bar{X}\left[\vartheta_j, \tau\right] = \begin{cases} X\left[\vartheta_j, \tau\right] & \tau \le \vartheta_j \\ 0 & \tau > \vartheta_j \end{cases}$$

Формула (2.3) запишется в виде

$$\varepsilon_i^o(t_*, x_*) = \max_{\left\| l_i^{(s)} \right\| = 1(s=1,\dots,r-1)} \sum_{j=1}^{r-1} \left(< l_i^{(j)}, x^{(j)} > + \min_{-q \in M_i^{(j)}} < l_i^{(j)}, q > \right) +$$

$$+ \max_{\left\| l_i^{(s)} \right\| = 1(s=r,\dots,m)} \left\{ \sum_{j=r}^{m} \left(< l_i^{(j)}, X\left[\vartheta_j, t_*\right] x_* > + \min_{-q \in M_i^{(j)}} < l_i^{(j)}, q > \right) + \right.$$

$$+ \min_{u_i \in P_i} \int_{t_*}^{\vartheta_m} \sum_{j=r}^{m} < l_i^{(j)}, \bar{X}\left[\vartheta_j, \tau\right] B_i(\tau) u_i > d\tau + \qquad (2.4)$$

$$\left. + \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \int_{t_*}^{\vartheta_m} \sum_{j=r}^{m} < l_i^{(j)}, \bar{X}\left[\vartheta_j, \tau\right] \sum_{\alpha \in K(i)} B_\alpha(\tau) u_\alpha > d\tau \right\}$$

Теперь введем следующие обозначения:

$$\rho_1\left(t_*, l_i^{(r)}, \dots, l_i^{(m)}\right) = \min_{u_i \in P_i} \int_{t_*}^{\vartheta_m} \sum_{j=r}^{m} < l_i^{(j)}, \bar{X}\left[\vartheta_j, \tau\right] B_i(\tau) u_i > d\tau$$

$$\rho_2\left(t_*, l_i^{(r)}, \dots, l_i^{(m)}\right) = \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \int_{t_*}^{\vartheta_m} \sum_{j=r}^{m} < l_i^{(j)}, \bar{X}\left[\vartheta_j, \tau\right] \sum_{\alpha \in K(i)} B_\alpha(\tau) u_\alpha > d\tau \qquad (2.5)$$

$$x^{(0)}\left(t_*, x_*, l_i^{(r)}, \dots, l_i^{(m)}\right) = \sum_{j=r}^{m} \left(< l_i^{(j)}, \bar{X}\left[\vartheta_j, t_*\right] x_* > + \min_{-q \in M_i^{(j)}} < l_i^{(j)}, q > \right)$$

Формула $\varepsilon_i^o(t_*, x_*)$ (2.4) запишется в следующем виде:

$$\varepsilon_i^o(t_*,x_*)=\rho\left[x^{(j)},M_i^{(j)}\right]+$$
$$+\max_{\left\|l_i^{(s)}\right\|=1(s=r,...,m)}\left\{\rho_1\left(t_*,l_i^{(r)},...,l_i^{(m)}\right)+\rho_2\left(t_*,l_i^{(r)},...,l_i^{(m)}\right)+x^{(0)}\left(t_*,x_*,l_i^{(r)},...,l_i^{(m)}\right)\right\} \quad (2.6)$$

Отметим, что из построенного выражения гипотетического рассогласования (2.4)(или (2.6)) в частности, получается гипотетическое рассогласование в следующих случаях:

а) при $m=1$ выражение (2.4) (или (2.6)) является гипотетическим рассогласованием в дифференциальной игре нескольких лиц, когда целевые множества заданы для одного момента времени [4];

б) при $k=2$ (2.4) (или (2.6)) является гипотетическим рассогласованием для дифференциальной игры двух лиц при многих целевых множествах [3];

в) при $m=1$, $k=2$ и одном множестве M (2.4) (или (2.6)) является гипотетическим рассогласованием дифференциальной игры двух лиц при одном целевом множестве [2].

3. О свойствах функции $\varepsilon_i^o(t,x)$. Введём следующие обозначения:

$$E_i^{(1)}=\left\{\{t,x\}\mid t\in[t_0,\vartheta_1],x\in R^n,\varepsilon_i^o(t,x)>0\right\},$$
$$E_i^{(2)}=\left\{\{t,x\}\mid t\in[\vartheta_1,\vartheta_2],x\in R^n,\varepsilon_i^o(t,x)>0,\left\{\vartheta_1,x^{(1)}\right\}\in E_i^{(1)}\right\}$$
$$E_i^{(m)}=\left\{\{t,x\}\mid t\in[\vartheta_{m-1},\vartheta_m],x\in R^n,\varepsilon_i^o(t,x)>0,\right.$$
$$\left.\left\{\vartheta_1,x^{(1)}\right\}\in E_i^{(1)},...,\left\{\vartheta_{m-1},x^{(m-1)}\right\}\in E_i^{(m-1)}\right\}$$
$$E_i=E_i^{(1)}\cup E_i^{(2)}\cup...\cup E_i^{(m)}$$

$L_i^o(t,x)$ – множество наборов максимизирующих единичных векторов $\left\{l_i^{(1)^o}(t,x),...,l_i^{(m)^o}(t,x)\right\}$ в (2.6).

Определение. Скажем, что имеет место регулярный случай, если для каждой позиции из E_i максимум в (2.6) достигается на единственном наборе $\left\{l_i^{(j)^o};j=1,...,m\right\}$ ($L_i^o(t,x)$ при каждом t и x состоит из одного элемента).

Лемма 1. В регулярном случае в каждой позиции $\{t,x\}$ из E_i функция $\varepsilon_i^o(t,x)$ непрерывна по t и x.

Доказательство. Функция $\varepsilon_i^o(t,x)$ является непрерывной по t и x, так как максимумы по $\left\{l_i^{(j)};j=1,...,m\right\}$ выбираются из непрерывных функций и векторы $l_i^{(j)^0}$ $(j=1,...,m)$ выбираются из единичных сфер [4,6].

Лемма 2. В регулярном случае в области E_i векторы $\left\{l_i^{(1)^o}(t,x),...,l_i^{(m)^o}(t,x)\right\}$, максимизирующие (2.6), зависят от t и x непрерывно.

Доказательство. Предположением от противного следует, что существует позиция $\{t_*,x_*\}$ $\left(\vartheta_{r-1}\le t_*<\vartheta_r\ \ \left(r\in\{1,...,m\}\right)\right)$, где хотя бы один из векторов $\left\{l_i^{(r)^o}(t,x),...,l_i^{(m)^o}(t,x)\right\}$ не является непрерывным. Пусть это – вектор

$l_i^{(v)^o}(t,x)\ (v \in \{r,...,m\})$. Так как функция $\varepsilon_i^o(t,x)$ непрерывна, то область $\varepsilon_i^o(t,x) > 0$, $t < \vartheta_m$ является открытой. Следовательно, точку $\{t_*, x_*\}$ можно окружить достаточно малой окрестностью

$|t - t_*| < \delta \qquad |x - x_*| < \delta$,

где тоже имеет место $\varepsilon_i^o(t,x) > 0$. В каждой точке этой окрестности $L_i^o(t,x)$ определяется единственным образом. При сделанном предположении можно выбрать последовательность позиций $\{t^{(\beta)}, x^{(\beta)}\}$ такой, что

$\lim\limits_{\beta\to\infty} t^{(\beta)} = t_*, \lim\limits_{\beta\to\infty} x^{(\beta)} = x_*$,

но $\left| l_i^{(v)^o}\left(t^{(\beta)}, x^{(\beta)}\right) - l_i^{(v)^o}(t_*, x_*) \right| > \varphi > 0$ при всех значениях β. (3.1)

Из последовательности $l^{(\beta)} = l_i^{(v)^o}\left(t^{(\beta)}, x^{(\beta)}\right)$ можно выбрать подпоследовательность $\left\{l^{(\beta_\lambda)}\right\}(\lambda = 1,2,...)$, сходящуюся к некоторому единичному вектору l_*. Докажем, что $l_* = l_i^{(v)^o}(t_*, x_*)$. Предположим, что это не так, т.е. $l_* \neq l_i^{(v)^o}(t_*, x_*)$. Тогда, так как набор $\left\{l_i^{(r)^o}(t,x),...,l_i^{(m)^o}(t,x)\right\}$ является максимизирующим в (2.6) для позиции (t_*, x_*), то для максимизируемого выражения из (2.6) будем иметь:

$$\rho_1\left(t_*, l_i^{(r)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(v-1)^o}(t_*,x_*), l_*, l_i^{(v+1)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(m)^o}(t_*,x_*)\right) +$$
$$+\rho_2\left(t_*, l_i^{(r)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(v-1)^o}(t_*,x_*), l_*, l_i^{(v+1)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(m)^o}(t_*,x_*)\right) +$$
$$+x^{(0)}\left(t_*, x_*, l_i^{(r)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(v-1)^o}(t_*,x_*), l_*, l_i^{(v+1)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(m)^o}(t_*,x_*)\right) <$$

$$< \rho_1\left(t_*, l_i^{(r)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(v-1)^o}(t_*,x_*), l_i^{(v)^o}(t_*,x_*), l_i^{(v+1)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(m)^o}(t_*,x_*)\right) +$$
$$+\rho_2\left(t_*, l_i^{(r)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(v-1)^o}(t_*,x_*), l_i^{(v)^o}(t_*,x_*), l_i^{(v+1)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(m)^o}(t_*,x_*)\right) +$$
$$+x^{(0)}\left(t_*, x_*, l_i^{(r)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(v-1)^o}(t_*,x_*), l_i^{(v)^o}(t_*,x_*), l_i^{(v+1)^o}(t_*,x_*),...,l_i^{(m)^o}(t_*,x_*)\right)$$

Но из сходимости подпоследовательностей $t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}, l^{(\beta_\lambda)}$ к t_*, x_*, l_* соответственно, вытекает, что при достаточно больших значениях λ имеет место

$$\rho_1\Big(t^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ..., l_i^{(\nu-1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), l^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(\nu+1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ...,$$

$$l_i^{(m)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big)\Big) + \rho_2\Big(t^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ..., l_i^{(\nu-1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), l^{(\beta_\lambda)},$$

$$l_i^{(\nu+1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ..., l_i^{(m)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big)\Big) + x^{(0)}\Big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ...,$$

$$l_i^{(\nu-1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), l^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(\nu+1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ..., l_i^{(m)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big)\Big) <$$

$$< \rho_1\Big(t^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ..., l_i^{(\nu-1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), l_i^{(\nu)^o}\big(t_*, x_*\big), l_i^{(\nu+1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ...,$$

$$l_i^{(m)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big)\Big) + \rho_2\Big(t^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ..., l_i^{(\nu-1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), l_i^{(\nu)^o}\big(t_*, x_*\big),$$

$$l_i^{(\nu+1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ..., l_i^{(m)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big)\Big) + x^{(0)}\Big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}, l_i^{(r)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ...,$$

$$l_i^{(\nu-1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), l_i^{(\nu)^o}\big(t_*, x_*\big), l_i^{(\nu+1)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ..., l_i^{(m)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big)\Big)$$

что противоречит выбору векторов $\Big\{l_i^{(r)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big), ..., l_i^{(m)^o}\big(t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big)\Big\}$, так как этот набор – максимизирующий в (2.6) для позиции $\big\{t^{(\beta_\lambda)}, x^{(\beta_\lambda)}\big\}$. Из этого и из условия регулярности вытекает, что $l_* = l_i^{(\nu)^o}\big(t_*, x_*\big)$, что противоречит (3.1). Последнее означает, что предположение о разрывности вектора $l_i^{(\nu)^o}\big(t_*, x_*\big)$ неверно. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. В регулярном случае в каждой позиции $\{t, x\}$ из E_i функция $\varepsilon_i^o\big(t, x\big)$ имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial\varepsilon_i^o\big(t, x\big)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\varepsilon_i^o\big(t, x\big)}{\partial t}$, которые вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial\varepsilon_i^o\big(t, x\big)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} \bar{X}'\big[\vartheta_j, \tau\big] l_i^{(j)^o}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_i^o\big(t, x\big)}{\partial t} = -\min_{u_i \in P_i} \max_{\substack{u_\alpha \in P_\alpha \\ (\alpha \in K(i))}} \sum_{j=1}^{m} \Big(< \bar{X}'\big[\vartheta_j, \tau\big] l_i^{(j)^o}, A\big(t\big) x > +$$

$$+ < \bar{X}'\big[\vartheta_j, \tau\big] l_i^{(j)^o}, B_i\big(t\big) u_i > + \sum_{\alpha \in K(i)} < \bar{X}'\big[\vartheta_j, \tau\big] l_i^{(j)^o}, B_\alpha\big(\tau\big) u_\alpha > \Big)$$

Доказательство. Сначала вычислим производную функции $\varepsilon_i^o\big(t, x\big)$ по t. Пусть система (1.1) находится в позиции $\{t, x\}$, причем $\vartheta_{r-1} \le t < \vartheta_r$ $\big(r \in \{1, ..., m\}\big)$.

Обозначим через $\overline{L}_i^{(r)}(t,x)$ набор максимизирующих векторов $\left\{l_i^{(r)^o}(t,x),...,l_i^{(m)^o}(t,x)\right\}$.

Составим приращение функции $\varepsilon_i^o(t,x)$, которая согласно выражению (2.6) будет

$$\Delta\varepsilon_i^o(t,x)=\rho_1\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)+\rho_2\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)+$$
$$+x^{(0)}\left(t+\Delta t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)-$$
$$-\rho_1\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-\rho_2\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-x^{(0)}\left(t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)=$$
$$=\Big[\rho_1\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)+\rho_2\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)+x^{(0)}\left(t+\Delta t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-$$
$$-\rho_1\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-\rho_2\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-x^{(0)}\left(t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)\Big]+$$
$$+\Big[\rho_1\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)+\rho_2\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)+$$
$$+x^{(0)}\left(t+\Delta t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)-\rho_1\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-$$
$$-\rho_2\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-x^{(0)}\left(t+\Delta t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)\Big]$$

Содержимое вторых квадратных скобок в последнем соотношении не меньше нуля, так как $\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)$–максимизирующий набор (2.6) для позиции $\{t+\Delta t,x\}$. Следовательно,

$$\Delta\varepsilon_i^o(t,x)\ge\rho_1\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)+\rho_2\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)+x^{(0)}\left(t+\Delta t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-$$
$$-\rho_1\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-\rho_2\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-x^{(0)}\left(t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)\qquad(3.2)$$

а также

$$\Delta\varepsilon_i^o(t,x)=$$
$$=\Big[\rho_1\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)+\rho_2\left(t+\Delta t,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)+$$
$$+x^{(0)}\left(t+\Delta t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)-$$
$$-\rho_1\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)-\rho_2\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)-x^{(0)}\left(t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)\Big]+$$
$$+\Big[\rho_1\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)+\rho_2\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)+x^{(0)}\left(t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)-$$
$$-\rho_1\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-\rho_2\left(t,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-x^{(0)}\left(t,x,\overline{L}_i^{(r)}(t,x)\right)\Big].$$

Содержимое вторых квадратных скобок в последнем соотношении не больше нуля, так как $\overline{L}_i^{(r)}(t,x)$ – максимизирующий набор (2.6) для позиции $\{t,x\}$. Следовательно,

$$\Delta\varepsilon_i^o(t,x) \le \rho_1\left(t+\Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)+\rho_2\left(t+\Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)+$$
$$+x^{(0)}\left(t+\Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)-\rho_1\left(t, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)- \tag{3.3}$$
$$-\rho_2\left(t, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)-x^{(0)}\left(t,x, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right).$$

Разделив обе части неравенств (3.2) и (3.3) на Δt, получим

$$\frac{\rho_1\left(t+\Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-\rho_1\left(t, \bar{L}_i^{(r)}(t,x)\right)}{\Delta t}+\frac{\rho_2\left(t+\Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-\rho_2\left(t, \bar{L}_i^{(r)}(t,x)\right)}{\Delta t}+$$
$$+\frac{x^{(0)}\left(t+\Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t,x)\right)-x^{(0)}\left(t,x, \bar{L}_i^{(r)}(t,x)\right)}{\Delta t} \le$$
$$\le \frac{\Delta\varepsilon_i^o(t,x)}{\Delta t} \le \frac{\rho_1\left(t+\Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)-\rho_1\left(t, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)}{\Delta t}+$$
$$+\frac{\rho_2\left(t+\Delta t, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)-\rho_2\left(t, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)}{\Delta t}+$$
$$+\frac{x^{(0)}\left(t+\Delta t, x, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)-x^{(0)}\left(t,x, \bar{L}_i^{(r)}(t+\Delta t,x)\right)}{\Delta t}.$$

Так как набор векторов $\bar{L}_i^{(r)}(t,x)$ непрерыно зависит от t, следовательно, у обоих неравенств предел при $\Delta t \to 0$ получается одинаковым, и имеем

$$\frac{\partial\varepsilon_i^o(t,x)}{\partial t}=\left[\frac{\partial\rho_1\left(t, \bar{L}_i^{(r)}(t,x)\right)}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2\left(t, \bar{L}_i^{(r)}(t,x)\right)}{\partial t}+\frac{\partial x^{(0)}\left(t,x, \bar{L}_i^{(r)}(t,x)\right)}{\partial t}\right]_{\bar{L}_i^{(r)}=\text{const}}$$

причем, при вычислении производных зависимость $\bar{L}_i^{(r)}(t,x)$ от t не учитывается. Следовательно, учитывая (2.5), получаем

$$\frac{\partial\varepsilon_i^o(t,x)}{\partial t}=-\min_{u_i\in P_i}\sum_{j=r}^{m}\Big(<l_i^{(j)^o}, \bar{X}\left[\vartheta_j,\tau\right]B_i(\tau)u_i>-$$
$$-\max_{u^{(i)}\in P^{(i)}}\sum_{j=r}^{m}<l_i^{(j)^o}, \sum_{\alpha\in K(i)}\bar{X}\left[\vartheta_j,\tau\right]B_\alpha(\tau)u_\alpha>-<l_i^{(j)^o}, \bar{X}\left[\vartheta_j,t\right]A(t)x>\Big)$$

или, преобразовав последнее, получим

$$\frac{\partial\varepsilon_i^o(t,x)}{\partial t}=-\min_{u_i\in P_i}\max_{\substack{u_\alpha\in P_\alpha\\(\alpha\in K(i))}}\sum_{j=r}^{m}\Big(<\bar{X}'\left[\vartheta_j,\tau\right]l_i^{(j)^o}, A(t)x>+$$
$$+<\bar{X}'\left[\vartheta_j,\tau\right]l_i^{(j)^o}, B_i(t)u_i>+\sum_{\alpha\in K(i)}<\bar{X}'\left[\vartheta_j,\tau\right]l_i^{(j)^o}, B_\alpha(\tau)u_\alpha>\Big) \tag{3.4}$$

Выражение (3.4) можно было бы получить, формально дифференцируя (2.4) по t и игнорируя зависимость $\overline{L}_i^{(r)}(t,x)$ от t. Аналогичным образом, вычисляя производную по x, получаем

$$\frac{\partial \varepsilon_i^o(t,x)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} \overline{X}'\left[\vartheta_j, \tau\right] l_i^{(j)^o} \tag{3.5}$$

Из выражения правых частей формул (3.4) и (3.5) видно также, что $\frac{\partial \varepsilon_i^o(t,x)}{\partial t}$ и $\frac{\partial \varepsilon_i^o(t,x)}{\partial x}$ являются непрерывными функциями от аргументов t и x. Лемма 3 доказана.

В качестве иллюстрации формулы (2.4) может служить численный пример, рассмотренный в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Габриелян М.С. Минимаксное прицеливание в собственно линейной системе при m целевых множествах. // Уч. записки ЕГУ. 1984. №1.
4. Лутманов С.В. Курс лекций по методам оптимизации. Москва–Ижевск: 2001.
5. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
6. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
7. Степанян А.А. Об одной задаче дифференциальных игр нескольких лиц при многих целевых множествах. // Механика 2009: Труды международной школы-конференции молодых ученых. М550.-Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2009. С.316 – 319.

Сведения об авторах:

Барсегян Ваня Рафаелович – Доктор физ-мат. наук, профессор,
Ереванский Государственный Университет, факультет математики и механики
barsegh@ysu.am, barseghyan@sci.am

Симонян Тамара Алексановна – Кандидат физ-мат. наук,
Ереванский Государственный Университет, факультет математики и механики
Simtom09@gmail.com

Степанян Арег Ашотович – Аспирант Ереванского Государственного Университета, факультет математики и механики
Mexanikus2006@yahoo.com

Поступила в редакцию 03.03.2011