ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №2, 2011 Механика

УДК 539.3

ОБЩАЯ ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК*)

САРКИСЯН С.О.

Ключевые слова: микрополярный, упругий, тонкий, оболочка, общая теория, свободное вращение, стесненное вращение.
Key words: Micropolar, elasticity, thin, shell, general theory, independent rotation, constraint rotation.

Սարգսյան Ս. Հ.
Միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր կիրառական տեսությունը

Աշխատանքում ասիմպտոտիկ հիմնավորում ունեցող հիպոթեզների մեթոդի հիման վրա ֆիզիկական անչափ պարամետրերի արժեքներից կախված կառուցված են միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ազատ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով, «փոքր սահքային կոշտության» ընդհանուր կիրառական-երկչափ տեսությունները: Միկրոպոլյար առաձգական թաղանթների կառուցված տեսություններում լրիվությամբ հաշվի են առնված ընդլայնական սահքային և ծագումային իմաստով մոտ մյուս դեֆորմացիաները:

Sargsyan S.H.
General Applied Theory of Micropolar thin Elastic Shells

In the present paper on the basis of asymptotically confirmed hypotheses method, depending on the values of physical sizeless parameters, there are constructed general applied two-dimensional theories of micropolar shells with independent rotation, constraint rotation, and with "small shift rigidity". Transrerse shift and related deformation are completely taken into account in constructing the mentioned theories.

В работе на основе метода гипотез, имеющих асимптотическое подтверждение в зависимости от значений физических безразмерных параметров, построены общие прикладные-двумерные теории микрополярных оболочек со свободным вращением, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью». В построенных теориях микрополярных упругих оболочек полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Введение. Одной из актуальных задач микрополярной (несимметричной, моментной) теории упругости является проблема построения прикладных теорий балок, пластин и оболочек. Современный обзор в этом направлении осуществлён в работах [1,2].

Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной или двумерной задачи микрополярной теории упругости к прикладным-двумерным или одномерным задачам. Для достижения этой цели уместно использование качественных сторон результата асимптотического анализа граничной задачи микрополярной теории упругости в тонких областях [3-6]. В данной работе с учетом свойств решения краевой задачи трехмерной микрополярной теории упругости в тонкой области оболочки формулируются достаточно общие

)) Работа доложена на 16-th US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics. June 27-July 2, 2010, State College, Pennsylvania, USA.

предположения (гипотезы), на основе которых, в зависимости от значений физических безразмерных параметров, построены модели микрополярных упругих тонких оболочек со свободным вращением, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью», при которых полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Постановка задачи. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [7]:

уравнения равновесия

$$\nabla_m \sigma^{mn} = 0, \qquad \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk}\sigma_{mk} = 0 \tag{1}$$

соотношения упругости

$$\begin{cases} \sigma_{mn} = (\mu+\alpha)\gamma_{mn} + (\mu-\alpha)\gamma_{nm} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{nm} \\ \mu_{mn} = (\gamma+\varepsilon)\kappa_{mn} + (\gamma-\varepsilon)\kappa_{nm} + \beta\kappa_{kk}\delta_{nm} \end{cases} \tag{2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn}\omega^k, \qquad \kappa_{mn} = \nabla_m \omega_n \tag{3}$$

Здесь $\hat{\sigma}, \hat{\mu} -$ тензоры силовых и моментных напряжений; $\hat{\gamma}, \hat{\kappa} -$ тензоры деформации и изгиба-кручения; $\vec{V}, \vec{\omega} -$ векторы перемещения и независимого поворота, $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon -$ упругие константы микрополярного материала оболочки. Индексы m, n, k принимают значения $1,2,3$.

Отметим, что при некоторых частных значениях параметра α [7-9] из системы (1)-(3) могут быть получены и классические уравнения теории упругости (при $\alpha = 0$), и уравнения микрополярной теории упругости со стеснённым вращением ($\alpha \to \infty$).

В дальнейшем будем использовать ортогональные криволинейные координаты α_k, принятые в теории оболочек [3].

К определяющим уравнениям (1)-(3) трехмерной микрополярной теории упругости присоединим соответствующие граничные условия.

На лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ будем считать заданными силовые и моментные напряжения:

$$\sigma_{3i} = \pm q_i^{\pm}, \quad \sigma_{33} = \pm q_3^{\pm}, \quad \mu_{3i} = \pm m_i^{\pm}, \quad \mu_{33} = \pm m_3^{\pm} \quad (i = 1,2) \tag{4}$$

На поверхности края оболочки Σ, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, условия записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Предполагается, что толщина оболочки мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности оболочки и, следовательно, будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее напряженно-деформированное состояние (НДС) тонкого трехмерного тела, образующего оболочку, состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю оболочку, и погранслоев, локализирующихся вблизи поверхности края оболочки Σ. Построение общей прикладной-двумерной теории микрополярных упругих тонких оболочек тесно связано с построением внутренней задачи.

При определении как внутреннего, так и краевого НДС оболочки [3-6], большую роль играют значения физических констант материала оболочки, с этой точки зрения вводим следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{\mu}{\alpha}, \qquad \frac{R^2\mu}{\beta}, \qquad \frac{R^2\mu}{\gamma}, \qquad \frac{R^2\mu}{\varepsilon} \tag{5}$$

где R – масштабный фактор, представляет собой характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки.

Модель микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений

Рассмотрим случай, когда безразмерные физические параметры (5) имеют значения

$$\frac{\mu}{\alpha} \sim 1, \qquad \frac{R^2\mu}{\beta} \sim 1, \qquad \frac{R^2\mu}{\gamma} \sim 1, \qquad \frac{R^2\mu}{\varepsilon} \sim 1\,. \tag{6}$$

С учетом качественных результатов асимптотического решения системы уравнений (1)-(3) с вышеуказанными граничными условиями, для случая (6) [3], в основу нижепредлагаемой теории микрополярных упругих тонких оболочек со свободным вращением примем следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

а) в процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жесткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически запишем так:

$$V_{\mathrm{i}} = u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + \alpha_3\psi_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \qquad V_3 = w\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \tag{7}$$

$$\omega_i = \Omega_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \qquad \omega_3 = \Omega_3\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + \alpha_3\iota\left(\alpha_1,\alpha_2\right) \quad \left(i=1,2\right)$$

Таким образом, нормальное к срединной поверхности перемещение и тангенциальные независимые повороты являются постоянными функциями по толщине оболочки, а тангенциальные перемещения и нормальный независимый поворот меняются по линейному закону.

Отметим, что с точки зрения перемещений, гипотеза (7), по сути дела, представляет собой кинематическую гипотезу Тимошенко в классической теории упругих оболочек [10,11]. Гипотезу (7), в целом, назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек;

б) силовым напряжением σ_{33} можно пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{ii} $\left(i=1,2\right)$ в обобщенном законе Гука (2);

в) пользуясь допущением о тонкостенности оболочки, примем

$$1+\frac{\alpha_3}{R_i} \approx 1 \qquad \left(i=1,2\right);$$

г) при определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений сначала для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right). \tag{8}$$

После вычисления указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим прибавлением к соответствующим значениям (8) слагаемые, полученные интегрированием первых двух или шестого уравнений равновесия из (1), для которых потребуем условие, чтобы усреднённые по толщине оболочки величины были равны нулю.

Основная система уравнений и граничные условия общей теории микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, построенных с помощью перечисленных гипотез а)-г), будут выражаться так:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+\frac{N_{i3}}{R_i}=-\left(q_i^++q_i^-\right),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(M_{ii}-M_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j}+$$

$$+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(H_{ji}+H_{ij}\right)-N_{3i}=-h\left(q_i^+-q_i^-\right), \tag{9}$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]=q_3^++q_3^-,$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)+$$

$$+\frac{L_{i3}}{R_i}+(-1)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=-\left(m_i^++m_i^-\right),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)=\left(m_3^++m_3^-\right), \tag{10}$$

$$L_{33}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]-\left(H_{12}-H_{21}\right)=h\left(m_3^+-m_3^-\right)$$

соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right],\qquad S_{ij}=2h\left[\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{ji}\right],$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],\ H_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[\left(\mu+\alpha\right)K_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)K_{ji}\right], \tag{11}$$

$$N_{i3}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{i3}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{3i},\qquad N_{3i}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{3i}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{i3},$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\beta+\gamma\right)}{\beta+2\gamma}\kappa_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\kappa_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},$$

$$L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right],\qquad L_{33}=2h\left[\left(\beta+2\gamma\right)\iota+\beta\left(\kappa_{11}+\kappa_{22}\right)\right], \tag{12}$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+-m_i^-}{2}\right],\ \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{m_i^++m_i^-}{2h}\right],$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\quad \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i-(-1)^j\Omega_3,$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,\qquad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i-(-1)^j\iota, \tag{13}$$

$$\Gamma_{3i}=\Psi_i-(-1)^j\Omega_j,\quad \Gamma_{i3}=-\vartheta_i+(-1)^j\Omega_j,\quad \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i}$$

$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_2+\frac{\Omega_3}{R_i},\qquad \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,$$

$$\kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\qquad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i}. \tag{14}$$

граничные условия (при $\alpha_1=\text{const}$)

$$T_{11}=T_{11}^*\ \text{или}\ u_1=u_1^*,\quad S_{12}=S_{12}^*\ \text{или}\ u_2=u_2^*,\quad N_{13}=N_{13}^*\ \text{или}\ w=w^*,$$
$$M_{11}=M_{11}^*\ \text{или}\ K_{11}=K_{11}^*,\quad H_{12}=H_{12}^*\ \text{или}\ K_{12}=K_{12}^*, \tag{15}$$

$$L_{11}=L_{11}^*\ \text{или}\ \kappa_{11}=\kappa_{11}^*,\quad L_{12}=L_{12}^*\ \text{или}\ \kappa_{12}=\kappa_{12}^*,$$
$$L_{13}=L_{13}^*\ \text{или}\ \kappa_{13}=\kappa_{13}^*,\qquad \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^*\ \text{или}\ l_{13}=l_{13}^*. \tag{16}$$

В модели (9)-(16) микрополярных упругих оболочек полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Это – система из 52 уравнений относительно 52 неизвестных функций: $u_i, w, \psi_i, \Omega_i, \Omega_3, \iota, \vartheta_i, T_{ii}$, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}, M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, $L_{33}, L_{i3}, \Lambda_{i3}$, $\Gamma_{ii}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, \kappa_{ii}, \kappa_{ij}, \kappa_{i3}, l_{i3}$ $(i,j=1{,}2, i\neq j)$. Система дифференциальных уравнений (9)-(14) имеет 18-ый порядок с 9-ю граничными условиями (15), (16) на каждом из контуров срединной поверхности оболочки Γ.

Параметры Ламе A_i, выбирая соответствующим образом, из общих уравнений (9)-(14) теории микрополярных оболочек получим основные соотношения статики микрополярных цилиндрических оболочек и оболочек вращения.

Из систем уравнений (9)-(14) и граничных условий (15), (16) микрополярных оболочек при $\alpha=0$ будет отделяться краевая задача классической теории оболочек на основе гипотез Тимошенко [10,11] (с некоторым отличием, связанным с статической гипотезой г), классический аналог которой отличается от принятой в классической теории оболочек типа Тимошенко [10,11]).

Если в модели (9)-(16) пренебречь поперечными сдвигами, т.е. считать

$$\Gamma_{i3}+\Gamma_{3i}=0\ \text{или}\ \psi_i=\vartheta_i, \tag{17}$$

получим модель микрополярных упругих тонких оболочек со свободным вращением, когда вместо обобщённой кинематической гипотезы Тимошенко примем обобщённые на микрополярный случай кинематическую гипотезу Кирхгоффа-Лява (т.е. примем формулы (7) в целом, с учетом (17)). Система уравнений этой модели микрополярных оболочек представляет собой: уравнения равновесия (9), (10) физические соотношения

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right],\qquad S_{ij}=2h\left[\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{ji}\right],$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],\quad H_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[\left(\mu+\alpha\right)K_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)K_{ji}\right],\tag{18}$$

$$N_{i3}-N_{3i}=4\alpha h\left(\Gamma_{i3}-\Gamma_{3i}\right),$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\beta+\gamma\right)}{\beta+2\gamma}\kappa_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\kappa_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},$$

$$L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right],\tag{19}$$

$$L_{33}=2h\left[\left(\beta+2\gamma\right)\iota+\beta\left(\kappa_{11}+\kappa_{22}\right)\right],$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+-m_i^-}{2}\right],\ \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^++m_i^-}{2h}\right]$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\qquad \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i-\left(-1\right)^j\Omega_3,$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\vartheta_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\vartheta_j,\quad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\vartheta_i-\left(-1\right)^j\iota,\tag{20}$$

$$\vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\qquad \Gamma_{\mathrm{i}3}-\Gamma_{3\mathrm{i}}=2\left[-\vartheta_i+\left(-1\right)^j\Omega_j\right]$$

$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_2+\frac{\Omega_3}{R_i},\quad \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,$$

$$\kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\qquad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i}.\tag{21}$$

граничные условия

$$T_{11}=T_{11}^*\ \text{или}\ u_1=u_1^*,\qquad S_{12}+\frac{H_{12}}{R_2}=S_{12}^*\ \text{или}\ u_2=u_2^*,$$

$$N_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_2}=N_{13}^*\ \text{или}\ w=w^*,\qquad M_{11}=M_{11}^*\ \text{или}\ K_{11}=K_{11}^*,\tag{22}$$

$$L_{11}=L_{11}^*\ \text{или}\ \kappa_{11}=\kappa_{11}^*,\ L_{12}=L_{12}^*\ \text{или}\ \kappa_{12}=\kappa_{12}^*,$$

$$L_{13}=L_{13}^*\ \text{или}\ \kappa_{13}=\kappa_{13}^*,\ \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^*\ \text{или}\ l_{13}=l_{13}^*.\tag{23}$$

При $\alpha = 0$ из системы ((9), (10),(18)-(21)) и граничных условий (22),(23) отделятся общие уравнения и граничные условия классической теории упругих оболочек на основе гипотез Кирхгоффа-Лява.

Модель микрополярных упругих тонких оболочек со стеснённым вращением

Для физических безразмерных параметров (5) рассмотрим случай, когда они принимают значения:

$$\alpha >> \mu, \qquad \frac{R^2\mu}{\beta} \sim 1, \qquad \frac{R^2\mu}{\gamma} \sim 1, \qquad \frac{R^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \tag{24}$$

Асимптотический анализ [3] поставленной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3), в случае (24), показывает, что асимптотические приближения вектора поворота $\vec{\omega}$ связаны с приближениями вектора перемещения $\vec{V}$, как в классической теории упругости:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{V}. \tag{25}$$

Это означает, что построенная прикладная-двумерная теория микрополярных оболочек в данном случае находится в сфере микрополярной теории со стеснённым вращением (или иначе, псевдоконтинуума Коссера [8,9]).

Отметим, что общая трехмерная микрополярная теория упругости со стеснённым вращением имеет некоторые особенности [9], например: а) в этой модели упругое тело характеризуется четырьмя упругими константами: λ, μ (или E, ν) и γ, ε (или l, η [9]); б) (имеем в виду для данного случая) из шести граничных условий (4) остаются пять [9], для моментного напряжения μ_{33} невозможно ставить произвольные граничные условия.

Основываясь на результатах асимптотического метода интегрирования поставленной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3), когда безразмерные физические параметры (5) имеют значения (24) [3], для построения общей прикладной-двумерной теории микрополярных оболочек со стеснённым вращением можем применять следующие предположения (гипотезы): 1) это – те же предположения а)-г) предыдущего раздела (в данном случае предположение г) необходимо отнести только к силовым напряжениям σ_{3i}), и 2) условие стеснённого вращения (25).

Основная система уравнений прикладной-двумерной общей теории микрополярных упругих тонких оболочек со стеснённым вращением, с учётом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций, построенных при помощи принятых гипотез, выражается так:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(T_{ii} - T_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(S_{ji} + S_{ij}\right) + \frac{N_{i3}}{R_i} = -\left(q_i^+ + q_i^-\right),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(M_{ii} - M_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(H_{ji} + H_{ij}\right) - N_{3i} = -h\left(q_i^+ - q_i^-\right),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] = q_3^+ + q_3^-, \tag{26}$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)+\frac{L_{i3}}{R_i}+$$
$$+\left(-1\right)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=-\left(m_i^++m_i^-\right),$$
$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)=\left(m_3^++m_3^-\right),$$
$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]+\left(H_{12}-H_{21}\right)=0;$$

физические соотношения

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-v^2}\left[\Gamma_{ii}+v\Gamma_{jj}\right],\qquad S_{12}+S_{21}=4\mu h\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right),$$
$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-v^2\right)}\left[K_{ii}+vK_{jj}\right],\qquad N_{i3}+N_{3i}=4\mu h\left(\Gamma_{i3}+\Gamma_{3i}\right),\tag{27}$$
$$H_{12}+H_{21}=\frac{2h^3}{3}2\mu\left(K_{12}+K_{21}\right),\quad L_{ii}=4\gamma h\kappa_{ii},\quad L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right],$$
$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+-m_i^-}{2}\right],\qquad \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{m_i^++m_i^-}{2h}\right];$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i,$$
$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,\qquad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i,$$
$$\Gamma_{i3}=-\vartheta_i+\left(-1\right)^j\Omega_j,\qquad \Gamma_{3i}=\psi_i-\left(-1\right)^j\Omega_j,$$
$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_2+\frac{\Omega_3}{R_i},\quad \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,\tag{28}$$
$$\kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\qquad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i},$$
$$\Omega_i=-\left(-1\right)^i\left(\psi_j+\vartheta_j\right),\qquad \Omega_3=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{12}-\Gamma_{21}\right),$$
$$\iota=\frac{1}{2}\left(K_{12}-K_{21}\right),\qquad \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i}.$$

К системе уравнений микрополярных упругих оболочек со стеснённым вращением следует присоединить граничные условия (15), (16). Система уравнений (26)-(28) теории микрополярных оболочек со стеснённым вращением имеет 18-ый порядок с девятью граничными условиями (15), (16) на каждом краю срединной поверхности Γ. Эта система содержит 51 уравнение с 51 неизвестными функциями: ($T_{ii}, M_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, \Lambda_{i3}, \Gamma_{ii}, K_{ii}, \Gamma_{ij}, K_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, \kappa_{ii}, \kappa_{ij}$, $\kappa_{i3}, l_{13}, u_i, w, \psi_i, \vartheta_i, \Omega_i, \Omega_3, \iota$).

Если в системе уравнений (26)-(28) пренебречь поперечными сдвигами, т.е. принять за основу формулы (17), получим модель микрополярных упругих оболочек со стеснённым вращением, когда вместо обобщённых кинематических гипотез Тимошенко принята обобщённая кинематическая гипотеза Кирхгоффа-Лява.

Основные уравнения и граничные условия этой модели микрополярных оболочек со стеснённым вращением будут представлять собой уравнения равновесия (26), из которых необходимо исключить усилия N_{3i}:

физические соотношения

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}\right], \qquad M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii} + \nu K_{jj}\right],$$

$$S_{12} + S_{21} = 4\mu h\left(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}\right), \qquad H_{12} + H_{21} = \frac{2h^3}{3}2\mu\left(K_{12} + K_{21}\right),$$

$$L_{ii} = 4\gamma h\kappa_{ii}, \qquad L_{ij} = 2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij} + \left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right], \tag{29}$$

$$L_{i3} = 2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+ - m_i^-}{2}\right], \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{m_i^+ + m_i^-}{2h}\right],$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j + \frac{w}{R_i}, \qquad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i,$$

$$K_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\vartheta_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\vartheta_j, \qquad K_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\vartheta_i,$$

$$\vartheta_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, \qquad \kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_2 + \frac{\Omega_3}{R_i}, \tag{30}$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i, \qquad \kappa_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, \qquad l_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i},$$

$$\iota = \frac{1}{2}\left(K_{12} - K_{21}\right), \qquad \Omega_i = -\left(-1\right)^i\vartheta_j, \qquad \Omega_3 = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{12} - \Gamma_{21}\right).$$

граничные условия (при $\alpha_1 = \text{const}$)

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, \; S_{12} + \frac{H_{12} - L_{11}}{R_2} = S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*,$$

$$M_{11} + L_{12} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, \quad N_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\left(H_{12} - L_{11}\right)}{\partial\alpha_2} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*, \tag{31}$$

$$L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, \; \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*.$$

Модель микрополярных оболочек “с малой сдвиговой жёсткостью”

Для физических безразмерных параметров (5) рассмотрим случай

$$\alpha \sim \mu, \quad \frac{R^2\alpha}{\beta} << 1, \quad \frac{R^2\alpha}{\gamma} << 1, \quad \frac{R^2\alpha}{\varepsilon} << 1. \tag{32}$$

На основе асимптотического анализа [3] поставленной краевой задачи для систем уравнений (1)-(3) в тонкой трехмерной области оболочки, в случае (32), можем сформулировать асимптотически обоснованные следующие предположения (гипотезы):

1) это предположения а)-г) раздела два;

2) в моментных уравнениях равновесия (1) можем пренебречь разностями силовых напряжений $\sigma_{ij} - \sigma_{ji}, \sigma_{i3} - \sigma_{3i}$, но имея в виду значения физических безразмерных параметров (32) (при данном R величина α – малая величина), эти разности сохраним в физических соотношениях (2).

Отметим, что в полученной на основе принятых в этом пункте гипотез модели микрополярных упругих оболочек (которую назовём модулем “с малой сдвиговой жёсткостью”, имея в виду, что физическая постоянная α – это тоже своего рода модуль сдвига, как и классический модуль сдвига μ), “моментная часть” задачи отделяется как самостоятельная граничная задача.

Основная система уравнений и граничные условия теории микрополярных упругих тонких оболочек “с малой сдвиговой жесткостью”, с полным учетом поперечных сдвиговых деформаций, выразятся следующим образом:
для “моментной части” задачи – это уравнения равновесия (10) без учёта разностей $(S_{12} - S_{21}),(N_{i3} - N_{3i}),(H_{12} - H_{21})$, к которым следует присоединить физические соотношения (12), геометрические соотношения (14) и граничные условия (16); для “силовой части” задачи будем иметь уравнения равновесия (9), соотношения упругости (11), геометрические условия (13), граничные условия (15).

Основная система уравнений теории микрополярных оболочек “с малой сдвиговой жёсткостью”, без учета поперечных сдвигов, выразится так: для “моментной части” задачи – это уравнения равновесия (10), физические соотношения (12) (то же самое (19)), геометрические соотношения (21) (то же самое (14)), граничные условия (23) (то же самое (16)); “силовая часть” задачи – это уравнения равновесия (9), физические соотношения (18), геометрические соотношения (20), граничные условия (22).

В модели микрополярных оболочек “с малой сдвиговой жёсткостью” как с учётом, так и без учёта поперечных сдвигов, существенно следующее: когда “моментная часть” задачи имеет нулевое решение (т.е., когда вышеуказанные соответствующие уравнения и граничные условия однородны), “силовая часть” задачи не будет совпадать с классическими моделями упругих оболочек, ввиду того, что в физических соотношениях ((11) либо (18)) в итоге будут присутствовать члены с физической постоянной α.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С.84-95.
2. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. On generalized Cosserat-type theories of Plates and Shells: a short review and bibliography// Arch. Appl. Mech. Special Issue. Doi 10. 1007/s 00419-009-0365-3.
3. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С.309-319.
4. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // ПММ. 2008. Т.72. Вып.1. С.129-147.
5. Sargsyan S. H. Thermoelastisity of Thin Shells on the Basis of Asymmetrical Theory of Elasticity// Journal of Thermal Stresses. 2009. V.32. №8. P.791-818.
6. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек //Доклады РАН. 2010. Т.435. №3.
7. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т.28. Вып.6. С.1117-1120.
8. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256с.
9. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Периодич. сб. перев. иностр. статей. 1965. № 3. С.89-112.
10. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наукова думка, 1973. 246 с.
11. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: Судостроение, 1987. 316 с.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр НАН Армении, д.ф.-м.н., профессор, зав.каф. мат.анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского Государственного пединститута им. М.Налбандяна. Тел.: (091)60 57 15
E-mail:slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 02.11. 2010