ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №2, 2011 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СВОБОДНЫМ ВРАЩЕНИЕМ В ОБЛАСТИ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ

САРКИСЯН А. А.

Ключевые слова: тонкая оболочка, несимметричная упругость, начально-краевая задача, асимптотический анализ
Key words: thin shell, asymmetrical elasticity, initial-boundary problem, asymptotical analysis.

Սարգսյան Ա. Հ.
Թաղանթի բարակ տիրույթում ազատ պտույտներով առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության նախնական-եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ անալիզը

Աշխատանքում ասիմպտոտիկ անալիզի օգնությամբ թաղանթի բարակ տիրույթում կառուցվում է միկրոպոլյար առաձգական թաղանթի դինամիկայի ներքին խնդիրը (որը բնույթով երկչափ է) և սահմանային շերտը, ուսումնասիրվում է նրանց համակցման հարցը: Ներքին խնդրի մակարդակում հիմնավորվում է հիպոթեզաների մեթոդի հիման վրա կառուցված ազատ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական թաղանթի դինամիկայի կիրառական տեսությունը:

Sargsyan A. H.
Asymptotical Analysis of Initial-Boundary problem of Elasticity Asymmetrical Theory with Free Rotation in Thin Area of the Shell

In present work on the basis of asymptotical method in thin area of shell internal problem (which by the nature is two-dimensional) and boundary layer for dynamics of micropolar elastic shells are constructed, and the question of their merging is studied. At level of internal problem the applied dynamic theory of micropolar elastic shells with free rotation constructed on the basis of the hypotheses method are proved.

В работе при помощи асимптотического метода в области тонкой оболочки строятся внутренняя задача (по своей природе двумерная) и погранслой для динамики микрополярных упругих оболочек, изучается вопрос об их сращивании. На уровне внутренней задачи обосновывается прикладная динамическая теория микрополярных упругих оболочек со свободным вращением, построенная на основе метода гипотез.

Введение. Микрополярная (несимметричная, моментная) теория упругости является одной из основных моделей сред с внутренней структурой [1,2]. Эффекты микрополярности материала особенно существенны в тонких телах (балки, пластинки, оболочки). Современные достижения в области теории микрополярных тонких балок, пластин и оболочек освещены в обзорных статьях [3,4]. Отметим, что проблема построения моделей микрополярных тонких балок, пластин и оболочек поставлена С.А. Амбарцумяном [5].

В работах С.О. Саркисяна [6-8] развит метод гипотез построения моделей микрополярно-упругих тонких балок, пластин и оболочек, который базируется на математических свойствах решений микрополярной теории упругости, полученных при помощи асимптотического метода интегрирования соответствующих краевых задач в тонких областях. В построенных микрополярных теориях балок, пластин и оболочек работ [6-8] полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

В данной работе развивается асимптотический подход [9,10], строятся внутренняя задача и погранслои начально-краевой задачи несимметричной теории упругости в тонкой области оболочки. В результате изучения асимптотических свойств решения указанной начально-краевой задачи обосновывается метод гипотез построения в работе [8] динамической теории микрополярных упругих тонких оболочек со свободным вращением.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое тело. Тензорные уравнения динамической задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ с НППВ) имеют вид [11]:

уравнения движения

$$\nabla_m\sigma^{mn}=\rho\frac{\partial^2 V^n}{\partial t^2},\qquad \nabla_m\mu^{mn}+e^{nmk}\sigma_{mk}=J\frac{\partial^2\omega^n}{\partial t^2}\,; \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$\sigma_{mn}=(\mu+\alpha)\gamma_{mn}+(\mu-\alpha)\gamma_{nm}+\lambda\gamma_{kk}\delta_{nm},\ \mu_{mn}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{mn}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{nm}+\beta\chi_{kk}\delta_{nm} \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn}=\nabla_m V_n-e_{kmn}\omega^k,\qquad \chi_{mn}=\nabla_m\omega_n\,. \tag{1.3}$$

Здесь σ^{nm},μ^{nm} – контравариантные компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn},κ_{mn} – ковариантные компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения; V^n – контравариантные компоненты вектора перемещения, ω^n – контравариантные компоненты вектора независимого поворота; $\lambda,\ \mu,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ – физические константы микрополярного материала оболочки, ρ – плотность материала, J – мера инерции при вращении. Индексы m,n,k здесь и в дальнейшем принимают значения 1,2,3.

Отнесём оболочку к триортогональной системе координат α_n ($H_i=A_i\left(1+\alpha_3/R_i\right)$, $H_3=1,\ i=1,2$), принятой в теории оболочек [12,13], и перейдём к физическим компонентам для указанных тензоров и векторов, но их обозначения оставим прежними.

Для граничных условий на лицевых поверхностях оболочки примем граничные условия первой граничной задачи НТУ с НППВ, которые можем записать в виде:

$$\sigma_{3n}=p_n^{\pm},\ \ \mu_{3n}=m_n^{\pm}\quad \text{при}\quad \alpha_3=\pm h\ . \tag{1.4}$$

Граничные условия на поверхности края оболочки $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ в общем случае представляют граничные условия смешанной граничной задачи НТУ с НППВ:

$$\sigma_{mn}n_m=p_n^*,\ \mu_{mn}n_m=m_n^*\ \ \text{на}\ \Sigma_1,\ \ V_n=V_n^{\bullet},\ \ \omega_n=\omega_n^{\bullet}\ \ \text{на}\ \Sigma_2\,, \tag{1.5}$$

где p_n^*,m_n^* – компоненты заданных внешних усилий и моментов на Σ_1; $V_n^{\bullet}$, $\omega_n^{\bullet}$ – заданные компоненты векторов перемещений и независимого поворота на Σ_2.

При помощи начальных условий при $t=0$ задаются значения компонентов вектора перемещения, вектора независимого поворота, компоненты линейной и вращательной скоростей точек тела.

$$\begin{gathered}V_n=f_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \omega_n=\varphi_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\\ \frac{\partial V_n}{\partial t}=F_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\frac{\partial\omega_n}{\partial t}=\Phi_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\end{gathered} \tag{1.6}$$

где f_n,F_n,φ_n,Φ_n – заданные функции в области трёхмерной оболочки.

2. Асимптотический анализ начально-краевой задачи (1.1)-(1.6) трехмерной микрополярной теории упругости в области тонкой оболочки.

Предположим, что толщина оболочки $2h$ мала по сравнению с характерным радиусом кривизны срединной поверхности, т.е. $2h << R$. Будем исходить из той основной концепции [13-17], что в динамическом случае общее напряженно-деформированное состояние тонкой оболочки состоит из внутреннего напряженно-деформированного состояния (охватывающего всю область трёхмерной оболочки), пограничных слоев (локализирующихся вблизи боковой поверхности Σ и затухающие вдали от боковой поверхности) и пограничного слоя по времени (которое осциллируется по времени). При таком подходе, на результатах исходного приближения внутренней задачи, будет возможно построение общей двумерной модели микрополярных тонких оболочек.

Удобно вводить несимметричный тензор силовых напряжений: τ_{mn} [13] и аналогичный тензор для моментных напряжений v_{mn} [9,10].

Тогда, определяющая система уравнений (1.1)-(1.3) динамической несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений принимает определённый вид [10].

Рассмотрим задачу сведения трехмерной динамической задачи несимметричной теории упругости для тонкой оболочки к двумерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем [13-17], включая вопрос об удовлетворении граничным и начальным условиям. Указанная проблема тесно связана с построением внутреннего итерационного процесса, которая будет представлять двумерную задачу. Для этой цели в трехмерных динамических уравнениях несимметричной теории упругости (1.1)-(1.3) перейдём к безразмерным координатам и безразмерному времени [13-17]:

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i,\ \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta,\ \ t = \lambda^{\omega}\tau\, h/c_0\,. \tag{2.1}$$

Здесь величина ω характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния (НДС) во времени, величина p/l характеризует изменяемость НДС по координатам; p,l – целые числа, $l > p \geq 0$; λ – большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определяемый формулой $h = R\lambda^{-l}$. Введем безразмерные величины:

$$\frac{V_i}{R} = \overline{V}_i,\ \ \frac{\tau_{ij}}{\rho c_0^2} = \overline{\tau}_{ij},\ \ \frac{v_{ij}}{R\rho c_0^2} = \overline{\mathrm{v}}_{ij},\ \ \frac{p_n^{\pm}}{\rho c_0^2} = \overline{p}_n^{\pm},\ \ \frac{m_n^{\pm}}{R\rho c_0^2} = \overline{m}_n^{\pm},\ \ \frac{R_i}{R} = \overline{R}_i, \tag{2.2}$$

а также следующие безразмерные физические параметры [10]:

$$\overline{\mu}=\frac{\mu}{\rho c_0^2},\ \overline{E}=\frac{E}{\rho c_0^2},\ \overline{\alpha}=\frac{\alpha}{\rho c_0^2},\ \overline{\beta}=\frac{\beta}{R^2\rho c_0^2},\ \overline{\gamma}=\frac{\gamma}{R^2\rho c_0^2},\ \overline{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{R^2\rho c_0^2},\ \frac{J}{\rho h^2}=\lambda^k\overline{J}\ . \tag{2.3}$$

В результате преобразований (2.1)-(2.3), вместо системы уравнений (1.1)-(1.3) будем иметь соответствующие уравнения, но в безразмерном виде [10].

Следуя асимптотическому методу при построении внутренней задачи [13-15], наша цель будет заключаться в том, чтобы приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ и времени τ) уравнения (1.1)-(1.3) (с учетом (2.1)-(2.3)) к двумерным уравнениям (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2 и времени τ).

Предположим, что безразмерные физические параметры (2.3) имеют значения:

$$\frac{\mu}{\rho c_0^2} \sim 1,\ \frac{\alpha}{\rho c_0^2} \sim 1,\ \ \frac{\beta}{R^2\rho c_0^2} \sim 1,\ \ \frac{\gamma}{R^2\rho c_0^2} \sim 1,\ \ \frac{\varepsilon}{R^2\rho c_0^2} \sim 1\,.$$

Числа ω и k выбираем таким образом, чтобы в асимптотических приближениях получились непротиворечивые уравнения и чтоб инерционные члены входили в систему уравнений исходного приближения, т.е. $\omega = l - p,\ \ k = 2l$. Таким образом, с асимптотической точностью $O\left(\lambda^{p-l}\right)$ получим:

$$
\begin{aligned}
&V_i = R\lambda^{l-p}\left(V_i^0 + \lambda^{-l+c}\zeta V_i^1\right),\ V_3 = R\lambda^{l-2p+c}\left(V_3^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta V_3^1\right),\\
&\tau_{ii} = \rho c_0^2 \lambda^l\left(\tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\tau_{ii}^1\right),\\
&\tau_{ij} = \rho c_0^2 \lambda^l\left(\tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\tau_{ij}^1\right),\ \tau_{3i} = \rho c_0^2\lambda^{l-p+c}\left(\tau_{3i}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{3i}^1 + \lambda^{-2l+2p}\tilde{\tau}_{3i}^2\right),\\
&\tau_{i3} = \rho c_0^2\lambda^{l-p+c}\left(\tau_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{i3}^1\right),\ \tau_{33} = \rho c_0^2\lambda^c\left(\tau_{33}^0 + \zeta\tau_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\tau_{33}^2\right),\\
&\omega_i = \lambda^{l-p-c}\left(\omega_i^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\omega_i^1\right), \omega_3 = \lambda^{l-2p}\left(\omega_3^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\omega_3^1\right),\\
&v_{ii} = R\rho c_0^2\lambda^{l-c}\left(v_{ii}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta v_{ii}^1\right), \qquad (2.4)\\
&v_{ij} = R\rho c_0^2\lambda^{l-c}\left(v_{ij}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta v_{ij}^1\right), v_{3i} = R\rho c_0^2\lambda^{l-p}\left(v_{3i}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{3i}^1\right),\\
&v_{i3} = R\rho c_0^2\lambda^{l-p}\left(v_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{i3}^1\right), v_{33} = R\rho c_0^2\lambda^0\left(v_{33}^0 + \zeta v_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\tilde{v}_{33}^2\right),
\end{aligned}
$$

где число c задается следующим образом:

$$c = 2p - l \text{ при } l \le 2p,\ \ c = l - 2p \text{ при } 2p \le l \le 4p,\ \ c = 2p \text{ при } l \ge 4p. \qquad (2.5)$$

Качественной стороной асимптотического представления (2.4) является то, что повороты точек срединной поверхности оболочки независимы от перемещения этих же точек (поэтому построенную на основе внутренней задачи модель будем называть моделью микрополяных упругих оболочек с НППВ).

В описании НДС внутренней задачи остается выяснить роль переменных $\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$, задающих положение точки на срединной поверхности оболочки.

С этой точки зрения вводим вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентные усилия, моменты и гипермоменты [9,10].

Вводим перемещения и независимые повороты точек срединной поверхности оболочки:

$$u_i = V_i\big|_{\zeta=0},\quad w = V_3\big|_{\zeta=0},\ \ \Omega_i = \omega_i\big|_{\zeta=0},\ \ \Omega_3 = \omega_3\big|_{\zeta=0}. \qquad (2.6)$$

Основная система уравнений динамической модели изгибной деформации микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

уравнения движения

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(T_{ii} - T_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(S_{ji} + S_{ij}\right) + \frac{N_{i3}}{R_i} = 2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \left(p_i^+ + p_i^-\right),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(M_{ii} - M_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(H_{ji} + H_{ij}\right) -$$

$$-N_{3i} = \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2} - h\left(p_i^+ - p_i^-\right),$$

$$-\frac{T_{11}}{R_1} - \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right] = 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(p_3^+ + p_3^-\right), \qquad (2.7)$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)+\frac{L_{i3}}{R_i}+$$

$$+\left(-1\right)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}-\left(m_i^++m_i^-\right),$$

$$-\frac{L_{11}}{R_1}-\frac{L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]+\left(S_{12}-S_{21}\right)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}-\left(m_3^++m_3^-\right),$$

$$L_{33}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(H_{12}-H_{21}\right)+\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}=h\left(m_3^+-m_3^-\right);$$

соотношения упругости

$$N_{i3}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{i3}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{3i},\ N_{3i}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{3i}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{i3},$$

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right],\ S_{ij}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}],\ M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],$$

$$H_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[\left(\mu+\alpha\right)K_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)K_{ji}\right],$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\beta+\gamma\right)}{\beta+2\gamma}\kappa_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\kappa_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33} \tag{2.8}$$

$$L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right],\ L_{33}=2h\left[\left(\beta+2\gamma\right)\iota+\beta\left(\kappa_{11}+\kappa_{22}\right)\right],$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+-m_i^-}{2}\right],\ \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^++m_i^-}{2h}\right];$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\ \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i-\left(-1\right)^j\Omega_3,$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,\quad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i-\left(-1\right)^j\iota,$$

$$\Gamma_{i3}=-\vartheta_i+\left(-1\right)^j\Omega_j,\ \Gamma_{3i}=\psi_i-\left(-1\right)^j\Omega_j,\ \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\ l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i}, \tag{2.9}$$

$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i},\ \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,\ \kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i}.$$

Отметим, что система уравнений (2.7)-(2.9) полностью совпадает с соответствующей системой уравнений теории микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, построенной С.О. Саркисяном в работе [8].

Обратимся к изучению краевых микрополярных упругих явлений. Будем снова исходить из уравнений трехмерной динамической теории НТУ с НППВ (1.1)-(1.3) и считать, что поверхность края оболочки Σ, вблизи которого необходимо исследовать напряженное состояние, задается уравнением $\alpha_1=\alpha_{10}$. Введем замену независимых переменных (координат и времени) по формулам [10,13]:

$$\alpha_1-\alpha_{10}=R\lambda^{-l}\xi_1,\quad \alpha_2=R\lambda^{-p}\xi_2,\quad \alpha_3=R\lambda^{-l}\zeta,\qquad t=\lambda^{\omega}\tau\, h/c_0\,, \tag{2.10}$$

где величины R,λ,l,p,ω имеют тот же смысл, что и при изучении внутренней задачи.

Решение, таким образом полученное из системы уравнений (1.1)-(1.3) пограничной задачи, должно удовлетворять однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3=\pm h$:

$$\sigma_{3n}=0,\;\; \mu_{3n}=0. \tag{2.11}$$

В краевой зоне необходимо искать такое упругое микрополярное состояние, изменяемость которого во времени совпадает с изменяемостью во времени для внутренней задачи.

Перейдём к безразмерным величинам (2.2), (2.3) и введём новые обозначения:

$$\overline{\tau}_{mn}=P_{mn},\quad \overline{v}_{mn}=Q_{mn},\quad \overline{V}_n=\lambda^{-l}U_n,\quad \omega_n=\lambda^{-l}\varpi_n\,. \tag{2.12}$$

В результате, из уравнений (1.1)-(1.3) (с учетом (2.10)-(2.12),(2.2),(2.3)) получим трёхмерные уравнения микрополярной теории упругости в безразмерном виде.

На уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{\,p-l}\right)$ погранслойная задача расщепляется на четыре независимые системы уравнений:

силовая плоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial P_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{31}}{\partial\zeta}=0\,,\quad \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial P_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{33}}{\partial\zeta}=0\,,\quad \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial U_1}{\partial\xi_1}=\frac{1}{\overline{E}}\left[P_{11}-\nu P_{22}-\nu P_{33}\right],$$

$$P_{22}-\nu\left(P_{11}+P_{33}\right)=0\,,\quad \frac{\partial U_3}{\partial\zeta}=\frac{1}{\overline{E}}\left[P_{33}-\nu P_{11}-\nu P_{22}\right], \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial U_3}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{13}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{31}=0\,,\quad \frac{\partial U_1}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{31}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{13}\,;$$

силовая антиплоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial P_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial P_{32}}{\partial\zeta}=0,\quad =\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{12}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{21},\quad \frac{\partial U_2}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{32}-\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}P_{23}=0$$

$$\left(\overline{\mu}+\overline{\alpha}\right)P_{21}-\left(\overline{\mu}-\overline{\alpha}\right)P_{12}=0\,,\quad \left(\overline{\mu}+\overline{\alpha}\right)P_{23}-\left(\overline{\mu}-\overline{\alpha}\right)P_{32}=0\,; \tag{2.14}$$

моментная плоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial Q_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{32}}{\partial\zeta}=0\,,\;\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial\varpi_2}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{12}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{21},\;\frac{\partial\varpi_2}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{32}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{23}$$

$$\left(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}\right)Q_{21}-\left(\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}\right)Q_{12}=0\,,\quad \left(\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}\right)Q_{23}-\left(\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}\right)Q_{32}=0\,; \tag{2.15}$$

моментная антиплоская задача

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial Q_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{31}}{\partial\zeta}=0\,,\;\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial Q_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_{33}}{\partial\zeta}=0\,,\;2\left(\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)Q_{22}-\overline{\beta}\left(Q_{11}+Q_{33}\right)=0\,,$$

$$\frac{1}{A_{10}}\frac{\partial\varpi_1}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}\left(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma}\right)}\left[Q_{11}-\frac{\overline{\beta}}{2\left(\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)}\left(Q_{22}+Q_{33}\right)\right],\;\frac{\partial\varpi_1}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{31}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{13}\,, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial\varpi_3}{\partial\zeta}=\frac{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}\left(3\overline{\beta}+2\overline{\gamma}\right)}\left[Q_{33}-\frac{\overline{\beta}}{2\left(\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)}\left(Q_{11}+Q_{22}\right)\right],\ \frac{1}{A_{10}}\frac{\partial\varpi_3}{\partial\xi_1}=\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{13}-\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}Q_{31},$$

здесь $A_{10}=A_1\big|_{\xi_1=0}$.

Полученные уравнения ПС (который имеет квазистатический характер) в декартовых координатах $\left(\xi_1',\zeta\right)\left(\xi_1'=A_{10}\xi_1\right)$ с асимптотической точностью $0\left(\lambda^{p-l}\right)$ описывают НДС плоской и антиплоской силовой и моментной не взаимосвязанных задач микрополярной теории упругости, имеющих место в полуполосе: $\left\{0\le\xi_1'<\infty,\quad -1\le\zeta\le 1\right\}$.

Потребовав, чтобы решения погранслойных задач (2.13)-(2.16) имели затухающий характер при $\xi_1\to+\infty$, получим, что такие решения обладают следующими свойствами:

$$\int_{-1}^{1}P_{1n}\big|_{\xi_1=0}d\zeta=0,\ \int_{-1}^{1}Q_{1n}\big|_{\xi_1=0}d\zeta=0,\ \int_{-1}^{1}U_2\big|_{\xi_1=0}d\zeta=0,\ \int_{-1}^{1}\varpi_2\big|_{\xi_1=0}d\zeta=0,$$

$$\int_{-1}^{1}U_1\big|_{\xi_1=0}d\zeta=\frac{\overline{\lambda}}{4\overline{\mu}\left(\overline{\lambda}+\overline{\mu}\right)}\int_{-1}^{1}\zeta P_{13}\big|_{\xi_1=0}d\zeta,\ \int_{-1}^{1}\varpi_1\big|_{\xi_1=0}d\zeta=\frac{\overline{\beta}}{4\overline{\gamma}\left(\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)}\int_{-1}^{1}\zeta Q_{13}\big|_{\xi_1=0}d\zeta,$$

$$\int_{-1}^{1}U_3\big|_{\xi_1=0}d\zeta+\frac{\overline{\mu}-\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}\int_{-1}^{1}\zeta P_{11}\big|_{\xi_1=0}d\zeta=0,\ \int_{-1}^{1}\varpi_3\big|_{\xi_1=0}d\zeta+\frac{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}}{4\overline{\gamma}\overline{\varepsilon}}\int_{-1}^{1}\zeta Q_{11}\big|_{\xi_1=0}d\zeta=0,\quad (2.17)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial U_1}{\partial\zeta}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta-\frac{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}{4\overline{\mu}\overline{\alpha}}\int_{-1}^{1}P_{31}\big|_{\xi_1=0}d\zeta=0,\ \int_{-1}^{1}\frac{\partial U_2}{\partial\zeta}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta-\frac{1}{\overline{\mu}+\overline{\alpha}}\int_{-1}^{1}P_{32}\big|_{\xi_1=0}d\zeta=0,$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial\varpi_3}{\partial\zeta}\Big|_{\xi_1=0}d\zeta-\frac{\overline{\beta}+2\overline{\gamma}}{4\overline{\gamma}\left(\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)}\int_{-1}^{1}Q_{33}\big|_{\xi_1=0}d\zeta=0.$$

Из приведённых соотношений можем сделать следующий вывод в микрополярной теории упругости: когда силовые и моментные напряжения в пограничной зоне самоуравновешены, этим свойством будут обладать также перемещения и независимые повороты.

Рассматривая вопрос о сращивании внутреннего НДС с пограничным, получим:

$$\left(НДС\right)=\left(НДС\right)_{\text{вн}}+\lambda^{r}\cdot\left(НДС\right)_{\text{кр}}^{a}+\lambda^{\theta}\cdot\left(НДС\right)_{\text{кр}}^{n}\quad (2.18)$$

Числа r,θ назовем показателями интенсивностей микрополярных погранслоев. Числа r и θ должны быть подобраны таким образом, чтобы стало возможным удовлетворение трехмерных граничных условий на поверхности края оболочки Σ.

Рассмотрим первый вариант трехмерных граничных условий микрополярной теории упругости со свободным вращением, когда поверхность края оболочки загружена усилиями и моментами ($\Sigma_1\equiv\Sigma,\quad \Sigma_2\equiv 0$). Удовлетворяя граничным условиям, выберем в (2.18) для величин r и θ следующие значения: $r=\theta=l-p-c$.

В рамках точности $0\left(\lambda^{p-l}\right)$ граничные условия при $\xi_1=0$ примут вид:

$$\tau_{11}^{0}+\lambda^{-l+c}\zeta\tau_{11}^{1}+\lambda^{-p-c}P_{11}^{n(0)}=\lambda^{-p-c}\tilde{p}_1^{*},\quad v_{11}^{0}+\lambda^{-l+c}\zeta v_{11}^{1}+\lambda^{-p}Q_{11}^{a(0)}=\lambda^{-p}\tilde{m}_1^{*},$$

$$\tau_{12}^0+\lambda^{-l+c}\zeta\tau_{12}^1+\lambda^{-p-c}P_{12}^{a(0)}=\lambda^{-p-c}\tilde{p}_2^*,\ \ v_{12}^0+\lambda^{-l+c}\zeta v_{12}^1+\lambda^{-p}Q_{12}^{n(0)}=\lambda^{-p}\tilde{m}_2^*, \tag{2.19}$$

$$\tau_{13}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{13}^1+\lambda^{-2c}P_{13}^{n(0)}=\lambda^{-2c}\tilde{p}_3^*,\ \ v_{13}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{13}^1+\lambda^{-c}Q_{13}^{a(0)}=\lambda^{-c}\tilde{m}_3^*,$$

где $p_n^*=\mu\lambda^{l-p-c}\tilde{p}_n^*,\quad m_n^*=R\mu\lambda^{l-p-c}\tilde{m}_n^*$.

Интегрируя полученные условия по ζ и используя соответствующие условия затухания, получим граничные условия для систем двумерных уравнений (2.7)-(2.9):

$$T_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3\,,S_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3\,,\ N_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_3^*d\alpha_3\,,\ L_{1n}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_n^*d\alpha_3\,,$$

$$M_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_1^*\alpha_3d\alpha_3\,,\ H_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_2^*\alpha_3d\alpha_3\,,\ \Lambda_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_3^*\alpha_3d\alpha_3 \tag{2.20}$$

Рассмотрим второй вариант трехмерных граничных условий микрополярной теории упругости со свободным вращением, когда на поверхности края оболочки заданы перемещения и повороты ($\Sigma_2\equiv\Sigma,\ \Sigma_1\equiv 0$). Удовлетворяя граничным условиям, выберем в (2.18) для величин r и θ следующие значения: $r=\theta=2l-2p-c$.

В рамках точности $0\left(\lambda^{\,p-l}\right)$ граничные условия при $\xi_1=0$ примут вид:

$$V_1^0+\lambda^{-l+c}\zeta V_1^1+\lambda^{-p-c}U_1^{n(0)}=\lambda^{-p-c}\tilde{V}_1^\bullet,\ \ \omega_1^0+\lambda^{-l+c}\zeta\omega_1^1+\lambda^{-p}\varpi_1^{a(0)}=\lambda^{-p}\tilde{\omega}_1^\bullet,$$

$$V_2^0+\lambda^{-l+c}\zeta V_2^1+\lambda^{-p-c}U_2^{a(0)}=\lambda^{-p-c}\tilde{V}_2^\bullet,\ \ \omega_2^0+\lambda^{-l+c}\zeta\omega_2^1+\lambda^{-p}\varpi_2^{n(0)}=\lambda^{-p}\tilde{\omega}_2^\bullet, \tag{2.21}$$

$$V_3^0+\lambda^{-l+c}\zeta V_3^1+\lambda^{-2c}U_3^{n(0)}=\lambda^{-2c}\tilde{V}_3^\bullet,\qquad \omega_3^0+\lambda^{-l+c}\zeta\omega_3^1+\lambda^{-c}\varpi_3^{a(0)}=\lambda^{-c}\tilde{\omega}_3^\bullet,$$

где $V_n^\bullet=R\lambda^{l-2p-c}\tilde{V}_n^\bullet,\quad \omega_n^\bullet=\lambda^{l-2p-c}\tilde{\omega}_n^\bullet$.

С помощью условий затухания легко получим граничные условия для двумерной модели:

$$u_i\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u_i^*d\alpha_3\,,\ \ w\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u_3^*d\alpha_3\,,\ \Omega_n\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\omega_n^*d\alpha_3$$

$$\psi_i\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\Big[V_i^\bullet\Big|_{\alpha_3=h}-V_i^\bullet\Big|_{\alpha_3=-h}\Big],\ \ \iota\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\Big[\omega_i^\bullet\Big|_{\alpha_3=h}-\omega_i^\bullet\Big|_{\alpha_3=-h}\Big]\,. \tag{2.22}$$

Рассмотрим смешанные трехмерные граничные условия микрополярной теории упругости со свободным вращением, когда имеет место шарнирное опирание. Выберем в (2.18) для величин r и θ следующие значения: $r=l-p-c,\quad \theta=l$.

В рамках точности $0\left(\lambda^{\,p-l}\right)$ граничные условия при $\xi_1=0$ примут вид:

$$\tau_{11}^0+\lambda^{-l+c}\zeta\tau_{11}^1+P_{11}^{n(0)}=\tilde{p}_1^*,\quad v_{11}^0+\lambda^{-l+c}\zeta v_{11}^1+\lambda^{-p}Q_{11}^{a(0)}=\lambda^{-p}\tilde{m}_1^*,$$

$$\tau_{12}^0+\lambda^{-l+c}\zeta\tau_{12}^1+\lambda^{-p-c}P_{12}^{a(0)}=\lambda^{-p-c}\tilde{p}_2^*,\qquad \lambda^{-c}v_{12}^0+Q_{12}^{n(0)}=\tilde{m}_2^*, \tag{2.23}$$

$$V_3^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta V_3^1+\lambda^{-l+2p-c}U_3^{n(0)}=\lambda^{-l+2p-c}\tilde{V}_3^\bullet,\ \ v_{13}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{13}^1+\lambda^{-c}Q_{13}^{a(0)}=\lambda^{-c}\tilde{m}_3^*,$$

где $V_3^\bullet=R\tilde{V}_3^\bullet,\quad p_1^*=\mu\lambda^l\tilde{p}_1^*,\ p_2^*=\mu\lambda^{l-p-c}\tilde{p}_2^*,$

$m_1^*=R\mu\lambda^{l-p-c}\tilde{m}_1^*,\ m_2^*=R\mu\lambda^l\tilde{m}_2^*,\ m_3^*=R\mu\lambda^{l-p-c}\tilde{m}_3^*$.

В этом случае, используя условия затухания, получим следующие граничные условия для двумерной модели:

$$w\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u_3^*d\alpha_3\,,\ T_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3\,,\ S_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3\,,\ L_{1n}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_n^*d\alpha_3$$

$$M_{11}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_1^*\alpha_3d\alpha_3\,,\ H_{12}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}p_2^*\alpha_3d\alpha_3\,,\ \Lambda_{13}\Big|_{\alpha_1=\alpha_{10}}=\int_{-h}^{h}m_3^*\alpha_3d\alpha_3 \qquad (2.24)$$

Для того, чтобы возможно было получить начальные условия для двумерной модели микрополярных оболочек со свободным вращением (2.7)-(2.9), нам следует в четырехмерном пространстве α_n,t плоскость $t=0$ считать своего рода границей и ввести понятие погранслойного явления около этой границы [10,15-17]. В результате, выясним вопрос о том, какие начальные условия необходимо сформулировать для прикладной-двумерной модели (2.7)-(2.9) микрополярных оболочек со свободным вращением. Итак, рассмотрим соответствующий временной погранслой около границы $t=0$. Для этого дополнительного напряженно-деформированного состояния [10,15-17] изменяемость по координатам будет такой же, как для внутренней задачи, одновременно имеющее большую изменяемость во времени, т.е. $\omega=0$. Зададим следующую асимптотику [10]:

$$\begin{aligned}
&\overline{\tau}_{ii}=\lambda^l\tau_{ii}^*,\ \ \overline{\tau}_{ij}=\lambda^p\tau_{ij}^*,\ \ \overline{\tau}_{3i}=\lambda^l\tau_{3i}^*,\ \ \overline{\tau}_{i3}=\lambda^l\tau_{i3}^*,\ \ \overline{\tau}_{33}=\lambda^l\tau_{33}^*,,\\
&\overline{v}_{ii}=\lambda^l v_{ii}^*,\ \ \overline{v}_{ij}=\lambda^p v_{ij}^*,\ \ \overline{v}_{3i}=\lambda^l v_{3i}^*,\ \ \overline{v}_{i3}=\lambda^l v_{i3}^*,\ \ \overline{v}_{33}=\lambda^l v_{33}^*, \qquad (2.25)\\
&\overline{V}_i=\lambda^0V_i^*,\ \ \overline{V}_3=\lambda^0V_3^*,\ \ \omega_i=\lambda^0\omega_i^*,\ \ \omega_3=\lambda^0\omega_3^*,\ \omega=0,\qquad k=2l\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, из системы уравнений (1.1)-(1.3) для определения компонентов векторов перемещения и независимого поворота на уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$ получим уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2V_n^*}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{\tilde{a}_n^2}\frac{\partial^2V_n^*}{\partial\tau^2}=0, \qquad \tilde{a}_1=\tilde{a}_2=\sqrt{\overline{\mu}+\overline{\alpha}},\quad \tilde{a}_3=\sqrt{\overline{\lambda}+2\overline{\mu}},\\
&\frac{\partial^2\omega_n^*}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{\tilde{b}_n^2}\frac{\partial^2\omega_m^*}{\partial\tau^2}=0, \qquad \tilde{b}_1=\tilde{b}_2=\sqrt{\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{\overline{J}}},\quad \tilde{b}_3=\sqrt{\frac{\overline{\beta}+2\overline{\gamma}}{\overline{J}}}.
\end{aligned} \qquad (2.26)$$

Для рассматриваемого случая, определяя силовые напряжения τ_{3m}^*,τ_{33}^*, моментные напряжения μ_{3m}^*,μ_{33}^*, для условий отсутствия этих же напряжений при $\zeta=\pm1$ на уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$ получим граничные условия:

$$\frac{\partial V_m^*}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\pm1}=0, \qquad \frac{\partial\omega_m^*}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\pm1}=0 \qquad (2.27)$$

Таким образом, построение указанного дополнительного НДС (временного погранслоя) на уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$ сводится к решению волновых уравнений (2.26) с учетом граничных условий (2.27) и начальных условий (которые пока будем считать произвольно заданными).

Общее решение начально-граничной задачи (2.25)-(2.27) (на основе метода разделения переменных) можем представить в следующем виде [16,17] (где u – представитель вместо V_n или ω_n):

$$u=u^0+u^1\tau+u', \qquad (2.28)$$

где u^0 и u^1 – постоянные , а u' можем представить так:

$$u' = \sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{1k}\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\tilde{a}\tau\right)+u_{2k}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\tilde{a}\tau\right)\right]\sin\frac{2k-1}{2}\pi\zeta + \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{3k}\cos\left(k\pi\tilde{a}\tau\right)+u_{4k}\sin\left(k\pi\tilde{a}\tau\right)\right]\cos k\pi\zeta \tag{2.29}$$

Если на основе (2.28) удовлетворить начальным условиям: $u\big|_{\tau=0} = f^*(\zeta)$, $\frac{\partial u}{\partial\tau}\big|_{\tau=0} = F^*(\zeta)$, постоянные во времени $u^0, u^1, u_{1k}, u_{2k}, u_{3k}, u_{4k}$ будут определяться при помощи следующих выражений:

$$u_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^*(\zeta)\,d\zeta,\ u_1=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F^*(\zeta)\,d\zeta,\ u_{1k}=\int_{-1}^{1} f^*(\zeta)\sin\frac{2k-1}{2}\pi\zeta d\zeta,\ u_{3k}=\int_{-1}^{1} f^*(\zeta)\cos k\pi\zeta d\zeta$$

$$u_{2k}=\frac{2}{(2k-1)\pi\tilde{a}}\int_{-1}^{1} F^*(\zeta)\sin\frac{2k-1}{2}\pi\zeta d\zeta,\ u_{4k}=\frac{1}{k\pi\tilde{a}}\int_{-1}^{1} F^*(\zeta)\cos k\pi\zeta d\zeta\,. \tag{2.30}$$

Если учесть структуру решения (2.28), то получим, что первое слагаемое дает постоянную во времени часть решения, второе – линейно-зависящую от времени, третье- чисто осциллирующую во времени часть решения.

Для того, чтобы решение $u(\zeta,\tau)$ являлось чисто осциллирующей во времени функцией, необходимо и достаточно, чтобы: u^0, u^1 (т. е. средние значения начальных данных) обращались в нуль:

$$\int_{-1}^{1} f^*(\zeta)\,d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{1} F^*(\zeta)\,d\zeta = 0\,. \tag{2.31}$$

Условия (2.31) принято называть условиями осцилляции.

Далее заметим, что, используя граничные условия (2.27), получим:

$$\frac{\partial f^*(\zeta)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\pm1} = 0, \quad \frac{\partial F^*(\zeta)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\pm1} = 0\,. \tag{2.32}$$

Теперь будем сращивать решение внутренней задачи (прикладной-двумерной модели (2.7)-(2.9)) с решением временного погранслоя для удовлетворения заданным трехмерным начальным условиям (1.6).

Итак, удовлетворяя указанным начальным условиям, получим

$$\overset{вн}{V_n}\Big|_{t=0} +\lambda^r \overset{впс}{V_n}\Big|_{t=0} = f_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \frac{\partial V_n}{\partial t}\Big|_{t=0} +\lambda^r \frac{\partial \overset{впс}{V_n}}{\partial t}\Big|_{t=0} = F_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \\ \overset{вн}{\omega_n}\Big|_{t=0} +\lambda^r \overset{впс}{\omega_n}\Big|_{t=0} = \varphi_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \frac{\partial\omega_n}{\partial t}\Big|_{t=0} +\lambda^r \frac{\partial \overset{впс}{\omega_n}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \Phi_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \tag{2.33}$$

где r – интенсивность временного погранслоя.

Имея в виду асимптотические представления величин V_n и ω_n для внутренней задачи из (2.4) и для временного погранслоя из (2.25), для интенсивности r временного погранслоя получим: $r = l$. В результате сращивания получим (при $t = 0$ на уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$)

$$V_i^{(0)}+\lambda^{-l+c}\zeta V_i^{(1)}+\lambda^{-p}\overline{f}_i^*=\overline{f}_i\,,\qquad \lambda^{-2p+c}V_3^{(0)}+\overline{f}_3^*=\overline{f}_3\,,\quad \lambda^{-c}\omega_i^{(0)}+\overline{\varphi}_i^*=\overline{\varphi}_i\,,$$

$$\frac{\partial V_i^0}{\partial\tau}+\lambda^{-l+c}\zeta\frac{\partial V_i^{(1)}}{\partial\tau}+\overline{F}_i^*=\overline{F}_i\ ,\ \lambda^{-l+c}\frac{\partial V_3^0}{\partial\tau}+\overline{F}_3^*=\overline{F}_3\ ,\ \lambda^{-l+2p-c}\frac{\partial\omega_i^0}{\partial\tau}+\overline{\Phi}_i^*=\overline{\Phi}_i\ ,\ (2.34)$$

$$\omega_3^{(0)}+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\omega_3^{(1)}+\overline{\varphi}_3^*=\overline{\varphi}_3\,,\quad \frac{\partial\omega_3^0}{\partial\tau}+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\frac{\partial\omega_3^{(1)}}{\partial\tau}+\overline{\Phi}_3^*=\overline{\Phi}_3\,,$$

где дополнительно приняты следующие обозначения:

$$\overline{f}_i^*=\lambda^0 f_i^*,\ \overline{f}_3^*=\lambda^{-2p}f_3^*,\ \overline{F}_i^*=\lambda^{l-2p}F_i^*,\ \overline{F}_3^*=\lambda^{-p}F_3^*,\ \overline{\varphi}_i^*=\lambda^{-p}\varphi_i^*,\ \overline{\varphi}_3^*=\lambda^0\varphi_3^*,\ \overline{\Phi}_i^*=\lambda^0\Phi_i^*,$$

$$\overline{\Phi}_3^*=\lambda^l\Phi_3^*,\ \overline{f}_i=\lambda^{-l+p}\frac{1}{R}f_i,\ \overline{f}_3=\lambda^{-l}\frac{1}{R}f_3,\ \overline{F}_i=\lambda^0\frac{h}{Rc_0}F_i,\ \overline{F}_3=\lambda^{-l+p}\frac{h}{Rc_0}F_3\quad (2.35)$$

$$\overline{\varphi}_i=\lambda^{-l+p}\varphi_i,\ \overline{\varphi}_3=\lambda^{-l+2p}\varphi_3,\ \overline{\Phi}_i=\lambda^{-l+2p}\frac{h}{c_0}\Phi_i,\ \overline{\Phi}_3=\lambda^p\frac{h}{c_0}\Phi_3\,.$$

Используя условия осцилляции (2.31) и условия (2.32), в итоге получим начальные условия для двумерной динамической модели микрополярных оболочек с независимыми полями перемещений и вращений (2.7)-(2.9):

$$u_i\Big|_{t=0}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f_i\,d\alpha_3\,,\ w\Big|_{t=0}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f_3\,d\alpha_3,\ \Omega_n\Big|_{t=0}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\phi_n d\alpha_3\,,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}F_i\,d\alpha_3\,,\ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}F_3\,d\alpha_3\,,\ \frac{\partial\Omega_n}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\Phi_n d\alpha_3\,,\quad (2.36)$$

$$\psi_i\Big|_{t=0}=\frac{h}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=h}+\frac{\partial f_i}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=-h}\right),\ \frac{\partial\psi_i}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{h}{2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=h}+\frac{\partial F_i}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=-h}\right),$$

$$\iota\Big|_{t=0}=\frac{h}{2}\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=h}+\frac{\partial\phi_3}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=-h}\right),\ \frac{\partial\iota}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{h}{2}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=h}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial\alpha_3}\Big|_{\alpha_3=-h}\right).$$

Система уравнений (2.7)-(2.9), граничные условия либо (2.20), либо (2.22), либо (2.24), и начальные условия (2.36) представляют собой математическую модель микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Отметим, что построенная асимптотическим подходом модель микрополярных упругих тонких оболочек (2.7)-(2.9),(2.20) (либо (2.22),(2.24)),(2.36) идентична модели, построенной на основе метода гипотез в работе С. О. Саркисяна [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Миндлин Р.Д. Микроструктура в линейной упругости // Механика. Сб. перев. иностр. статей. 1964. № 4 (86). С. 129-160.
2. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд. МГУ, 1999. 328с.
3. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. № 2. С.84-95.

4. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. 2009. “On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography”. // Arch. Mech (Special Issue) DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
5. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд. НАН Армении, 1999. 214 с.
6. Саркисян С.О. Прикладные теории микрополярных упругих тонких балок. // Докл.НАН РА. 2011. Т. 111. № 2.
7. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин. // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. № 1. С.58-67.
8. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек.// Докл. РАН. 2011. Т.436. № 2. С.195-198.
9. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. № 4. С.309-319.
10. Саркисян С.О. Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек // Докл. НАН Армении. 2009. Т. 109. № 2. С. 54-66.
11. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.
12. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
13. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.
14. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
15. Гольденвейзер А.Л. Асимптотический метод в теории оболочек //Успехи механики. 1982. Т.5. Вып. 1/2. С.137-182.
16. Гусейн-Заде М.И. Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки // ПММ. 1974. Т.38. Вып. 6. С.1072-1078.
17. Гусейн-Заде М.И. Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластин // ПММ. 1978. Т.42. Вып.5. С.899-907.

Сведения об авторе:

Саркисян Арменуи Акоповна – аспирант Гюмрийского государственного педагогического института им. М.Налбандяна.
Тел.: (374 94) 42 21 03
E-mail: armenuhis@mail.ru

Поступила в редакцию 11.02.2011