

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦА ПОД ШТАМПАМИ

МОВСИСЯН Л.А.

Ключевые слова: устойчивость кольца, штамп, интервал контакта, вязкость, критическая сила.

Keywords: stability of ring, punch, interval of contacts, viscosity, critical forces.

Մովսիսյան Լ.Ա.

Դրոշմերի տակ օղակի կայունության մասին

Շրջանային օղակի կայունությունը դիտարկվում է այն դեպքում, երբ ուժերը նրան փոխանցվում են դրոշմերի միջոցով: Կրիտիկական ուժերի արժեքները ստացվել են վերջիններիս չափերից և դիրքից կախված: Ուսումնասիրվել է նույնպես կոնտակտի ինտերվալի կախվածությունը, երբ օղակի նյութը առաձգամածուցիկ է

Movsisyan L.A.

The stability of cylindrical ring under punches

The stability of circular ring, when concentrated forces act under symmetrically situated cylindrical of form punches is considered. The values of critical forces dependent from sizes and convexity or concavity of punches are obtained. Also the question of influence of viscosity material of ring on contacts interval is investigated.

Рассматривается устойчивость круглого кольца, когда сосредоточенные силы действуют через симметрично расположенные штампы. Получены значения критических сил в зависимости от размеров и положений штампов. Изучается также вопрос влияния вязкости материала кольца на интервал контакта.

Контактные задачи для кольца (для цилиндрической оболочки бесконечной длины – одномерная задача) рассматривались в [1,2]. В [3,4] изучались подобные задачи при общей анизотропии материала кольца и при наличии наполнителя. В [5] в общих чертах рассматривались задачи устойчивости, не доводя её до числовых результатов. Насколько нам известно, задача устойчивости упругой системы, когда сила передаётся на объект через штампы, рассматривалась только в [6].

В настоящей работе изучается контактная задача для кольца под штампами и, что самое главное, проблема устойчивости. Изучается также вопрос, как влияет вязкость материала на интервал контакта.

1. Круговое кольцо из вязкоупругого материала радиуса R и площадью поперечного сечения F находится под действием $2n$ одинаковых (симметрично расположенных) жёстких и гладких штампов. Они имеют ось симметрии. Сосредоточенные силы P действуют по этой оси и направлены к центру круга кольца. Радиус кривизны штампа принимается постоянным R_1 . Принимается, что

трение между кольцом и штампами отсутствует, т.е. штампы вызывают только нормальное давление. Тогда интегрирование уравнений статики для усилий и изгибающего момента дают

$$\begin{aligned}
 T &= C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + R \int_0^{\theta} q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \\
 N &= C_1 \sin \theta - C_2 \cos \theta - R \int_0^{\theta} q \cos(\theta - \varphi) d\varphi \\
 M &= -R \left[C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + R \int_0^{\theta} q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \right] + C_3
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь «постоянные» C_i и нормальное давление $q(\theta, t)$ подлежат определению.

Перемещения и угол поворота φ (по известной причине учитывается поперечный сдвиг) через кинетические величины определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 T &= EF(1 - \Gamma^*) \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad M = EJ(1 - \Gamma^*) \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\
 N &= k^2 GF(1 - \Gamma^*) \left(\psi + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь Γ^* – наследственно-упругий оператор, F и J – соответственно, площадь и момент инерции поперечного сечения.

Интегрируя систему (1.2) при (1.1) и удовлетворяя условиям симметрии [5]

$$v = N = \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad \text{и} \quad \theta = \theta_1 = \frac{\pi}{n}, \tag{1.3}$$

получим

$$\begin{aligned}
 C_2 = C_4 &= 0 \\
 C_1 &= \frac{R}{\sin \theta_1} \int_0^{\theta_1} q \cos(\theta_1 - \varphi) d\varphi, \quad C_3 = \frac{R^2}{\theta_1} \int_0^{\theta_1} q d\varphi
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

«Постоянная» C_4 появляется при определении v .

Используя условие для изменения кривизны под штампом [1, 2]

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \tag{1.5}$$

для определения q получим следующее уравнение:

$$\frac{Rq}{k^2GF} + \frac{R}{EJ} \left\{ C_3 - R \left[C_1 \cos \theta + R \int_0^{\theta} q \sin(\theta - \varphi) d\varphi \right] \right\} =$$

$$= (1 - \Gamma^*)(1 - \lambda) \quad , \quad \lambda = \frac{R}{R_1} \quad (1.6)$$

Решением уравнения (1.6) является

$$\bar{q} = \beta^2 \left[\bar{C}_1 - \bar{C}_3 + (1 - \Gamma^*)(1 - \lambda) \right] \cos \beta \theta + \bar{C}_3 - (1 - \Gamma^*)(1 - \lambda). \quad (1.7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\bar{q} = \frac{qR^2}{EJ} \quad , \quad \bar{C}_i = C_i \frac{R}{EJ} \quad , \quad (i=1,3), \quad \beta^2 = \frac{k^2 R^2 GF}{EJ}. \quad (1.8)$$

Подставляя (1.7) в (1.4) и учитывая, что $\beta^2 \gg 1$, для определения \bar{C}_i имеем:

$$\bar{C}_1 \sin \theta_1 = C \left[\beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 \cos(\theta_0 - \theta_1) + (\theta_0 - \theta_1) \operatorname{ch} \beta \theta_0 + \sin \theta_1 \right] +$$

$$+ D \left[\sin \theta_1 + \sin(\theta_0 - \theta_1) \right],$$

$$\bar{C}_3 \theta_1 = C \beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 + D \theta_0, \quad C = \bar{C}_1 - D \quad , \quad D = \bar{C}_3 - (1 - \Gamma^*)(1 - \lambda). \quad (1.9)$$

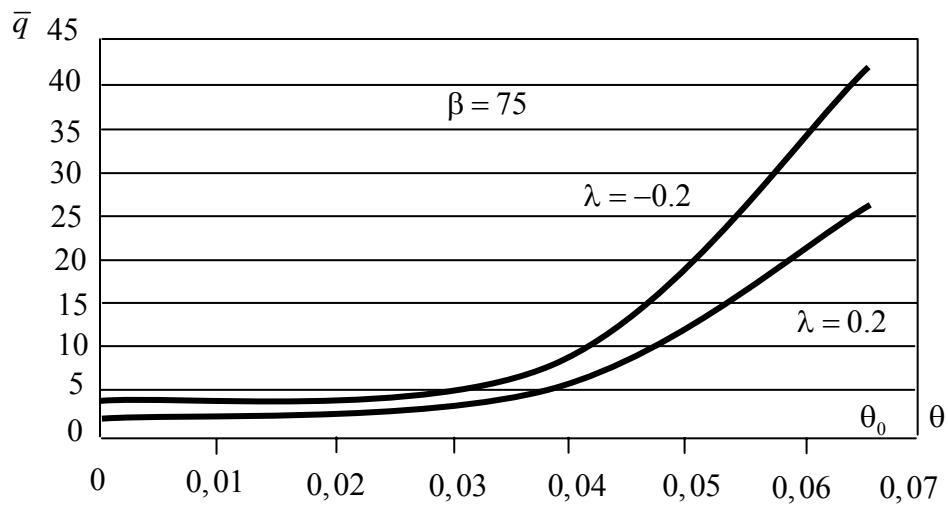
Неизвестный интервал контакта $[0, \theta_0]$ определяется из условия

$$\bar{P} = P \frac{R^2}{EJ} = -2 \int_0^{\theta_0} \bar{q} \cos \varphi d\varphi = -2 \left[C (\beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 \cos \theta_0 + \right.$$

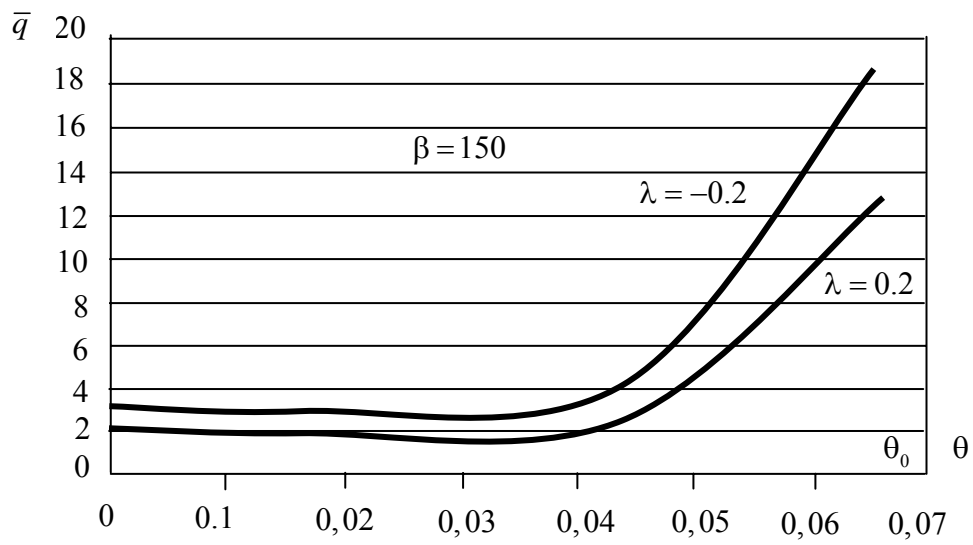
$$\left. + \operatorname{ch} \beta \theta_0 \sin \theta_0) + D \sin \theta_0 \right]. \quad (1.10)$$

В качестве конкретного примера взят случай $n = 4$, т.е. $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$. Для упругого случая ($\Gamma^* = 0$) произведены вычисления при различных β и λ . Некоторые из этих результатов размещены на фигурах.

На фиг. 1 и 2 приведены кривые \bar{q} в зависимости от θ (в радианах). Отрицательное значение λ соответствует случаю, когда центр штампа находится в противоположной от центра кольца стороне. Как и следовало ожидать, при одной и той же силе интервал контакта штампа с кольцом при положительном λ больше, чем при отрицательном. В то же время значение \bar{q} в точке $\theta = 0$ для отрицательных λ больше, чем при положительных.

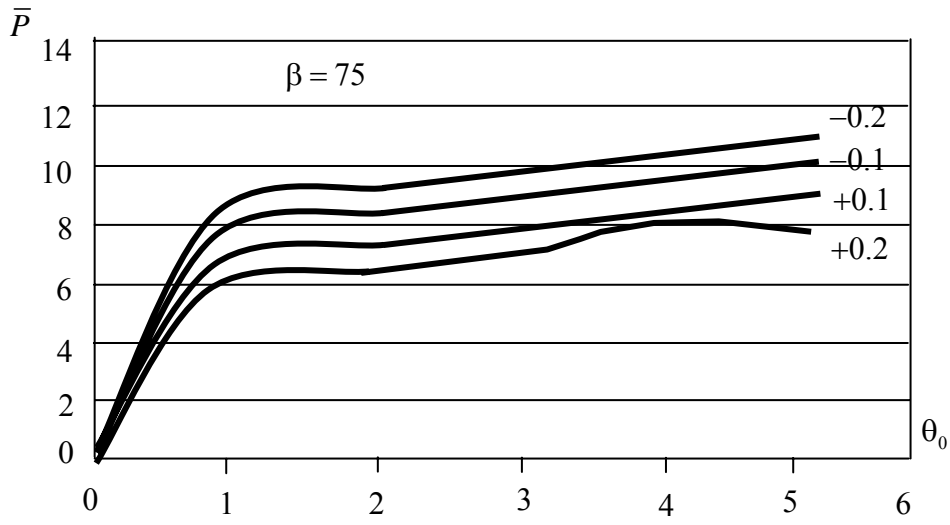


Фиг.1

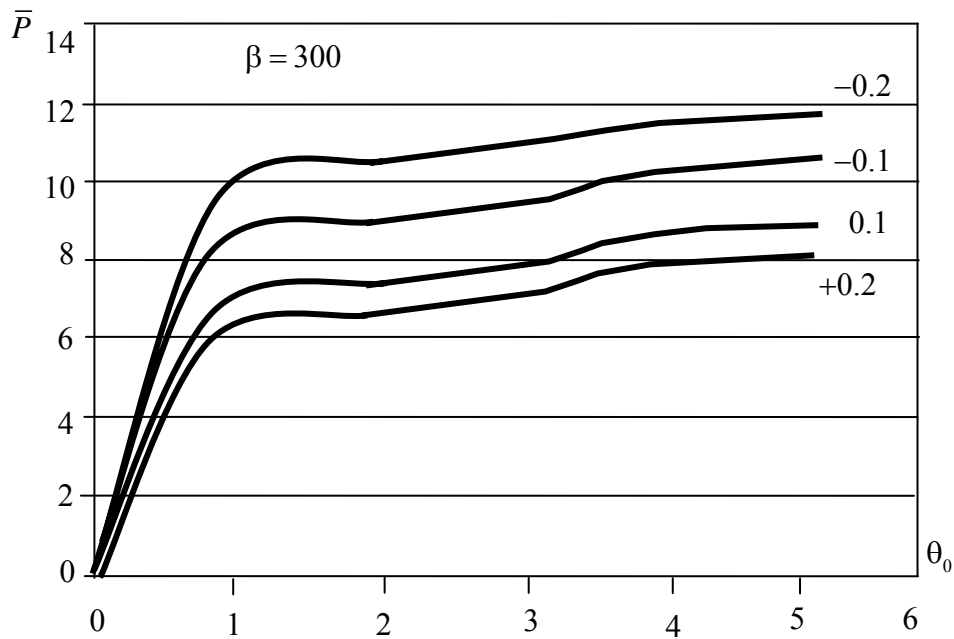


Фиг. 2

На фиг.3 и 4 приведены некоторые кривые для \bar{P} в зависимости от θ (в градусах).



Фиг. 3



Фиг.4

Как приведённые кривые, так и другие результаты, показывают, что в довольно широком интервале зависимость между \bar{P} и θ линейная. Для одного и того же интервала контакта для положительных λ потребуется меньше \bar{P} , чем для отрицательных. Естественно, одинаковые θ_0 для различных λ получаются при различных \bar{P} .

2. Теперь обратимся к вопросу вязкости. Как изменяется зависимость \bar{P} от θ при наличии вязкости. В качестве вязкоупругой модели возьмём типичное тело. Тогда в уравнениях (1.6)–(1.9) выражение $(1 - \Gamma^*)(1 - \lambda)$ следует заменить на

$$\left[1 - H(1 - e^{-\gamma t})\right](1 - \lambda). \quad (2.1)$$

Если мгновенный модуль упругости – E , то длительный модуль – $E(1 - H)$.

Некоторые результаты численных данных относительно зависимости \bar{P} и θ для различных моментов времени помещены в нижеприведённых таблицах при

$$H = 0,5; \quad \delta(t) = 1 - e^{-\gamma t} = 1; \quad 0,75, \quad 0,5, \quad (2.2)$$

т.е. принимается, что длительный модуль равен половине упругого.

Таблица 1. $\beta = 75$

λ	0,1			-0,1		
δ θ	1	0,75	0,5	1	0,75	0,5
1	6,643	4,982	3,321	8,089	6,089	4,059
2	7,139	4,982	3,321	8,089	6,089	4,059
3	7,635	5,726	3,817	9,332	6,999	4,665
4	8,176	6,132	4,088	9,993	7,495	4,996
5	8,771	6,572	4,385	10,72	8,045	5,364

Таблица 2. $\beta = 300$

λ	0,2			-0,2		
δ θ	1	0,75	0,5	1	0,75	0,5
1	6,169	4,627	3,084	9,250	6,945	4,627
2	6,590	4,945	3,295	9,885	7,414	4,942
3	7,052	5,284	3,525	10,58	7,935	5,288
4	7,872	5,663	3,779	11,34	8,501	5,668
5	8,003	5,867	3,936	11,77	8,792	5,884

Как видно из таблиц и имеющихся у нас данных, имеет место принцип соответствия.

3. Для изучения задачи устойчивости сначала найдем выражение для кольцевого усилия T .

Согласно уравнениям статики, оно определяется из

$$\frac{d^2\bar{T}}{d\theta^2} + \bar{T} = \bar{q}, \quad \bar{T} = T \frac{R^2}{EJ}, \quad (3.1)$$

где для \bar{q} уже имеем выражение (1.7). Рассмотрим только упругий случай. Если \bar{q} и \bar{T} представить в виде рядов

$$\bar{q} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta, \quad T = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta, \quad (3.2)$$

то согласно (1.7) и (3.1) будем иметь:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} [\beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 + (\bar{C}_3 - 1 + \lambda)]$$

$$a_m = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\beta^2}{\beta^2 + m^2} [\beta \operatorname{sh} \beta \theta_0 \cos m\theta_0 + m \operatorname{ch} \beta \theta_0 \sin m\theta_0] + (\bar{C}_3 - 1 + \lambda) \frac{\sin m\theta_0}{m} \right\}$$

$$c_m = \frac{a_m}{1 - m^2}, \quad m = 4k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Если искать решение уравнения устойчивости

$$\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{T} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.4)$$

в виде $\bar{w} = \sum_{n=1}^m f_n \cos n\theta$, то для определения критических сил будем иметь систему

$$f_n n(n^2 - 1) - \frac{1}{2} \left[(2c_0 - c_{2n}) n f_n + \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^{\infty} m f_m (c_{n-m} - c_{n+m}) \right] = 0. \quad (3.5)$$

Условие разрешимости системы дает значения критических сил $\bar{P}_{\text{кр.}} = \frac{P_{\text{кр.}} R^2}{EJ}$

(равенство нулю детерминанта).

В табл. 3 приведены значения $\bar{P}_{\text{кр.}}$ для различных β и λ .

Таблица 3

λ β	0,1	-0,1	0,2	-0,2	-1
75	3,037	3,711	2,669	4,049	6,749
150	3,256	3,980	2,895	4,342	7,236
300	3,329	4,068	2,959	4,438	7,397

Имеющиеся данные позволяют сделать следующие выводы:

1. Критическая сила для положительных λ меньше, чем для отрицательных .
2. Если для положительных λ с увеличением его критическая сила уменьшается, то для отрицательных λ – наоборот.

Интересно ещё, решение рассмотренной задачи сравнить со случаем, когда сосредоточенные силы непосредственно действуют на кольцо. В последнем случае $\bar{P}_{кр.} = 4,417$, т.е. при наличии штампов в зависимости от их радиуса кривизны возможны как уменьшение, так и увеличение по сравнению с задачей, когда сосредоточенная сила непосредственно приложена к кольцу в зависимости от величины λ .

Основная часть числовых данных получена Г.Г. Нерсисяном, за что выражаю благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.М., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М: Машиностроение, 1980. 415 с.
2. Пелех Б.А., Сукорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 214 с.
3. Мовсисян Л.А. Об одной контактной задаче для анизотропной цилиндрической оболочки. Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твердого тела (сборн.научных трудов, посвященный 85-летию Н.Х.Арутюняна). Ереван: 1999. С.105-108.
4. Мовсисян Л.А. Об одной контактной задаче для кольца с заполнителем. Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем (сборн.научных трудов). Ереван: ЕГУ, 2002. С.181-185.
5. Мовсисян Л.А. Упругая и вязкоупругая устойчивость кругового кольца под штампами. //Механика.(межвуз.сборн.научных трудов) Ереван, 1986. Вып.4. С.36-43.
6. Мовсисян Л.А. К устойчивости круговой арки под штампом. //Изв.НАН Армении. Механика.1993. Т.46. №1-2. С.14-18.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович – д.т.н., профессор, главн. научн. сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б

Поступила в редакцию 08.06.2009