ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №2, 2011 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

АГАЛОВЯН Л.А., ЗАКАРЯН Т.В.

Ключевые слова: пластинка, колебания, анизотропия, сингулярное возмущение, резонанс.
Key words: plate, vibration, anisotropic, singularly perturbed, resonance.

Աղալովյան Լ.Ա, Զաքարյան Տ.Վ.
Օրթոտրոպ երկշերտ սալի համար առաձգականության տեսության առաջին դինամիկական եզրային խնդրի ասիմպտոտիկական լուծումը

Դիտարկված է օրթոտրոպ երկշերտ սալի առաջին դինամիկական եզրային խնդիրը, երբ շերտերի միջև կոնտակտը լրիվ է: Խնդրի լուծումը ներկայացված է երկու տիպի ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով, որոնցից մեկը ֆունկցիա է տարածական կոորդինատներից, իսկ մյուսը ժամանակից էքսպոնենցիալ ֆունկցիա է: Ներմուծելով չափողականություն չունեցող կոորդինատներ և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչներ ստացված է սինգուլյար գրգռված հավասարումների համակարգ, որը լուծված է ասիմպտոտիկ մեթոդով: Ստացված է ներքին խնդրի ընդհանուր լուծումը, որը միարժեքորեն որոշվում է երկշերտ սալի դիմային մակերևույթների վրա տրված պայմաններից: Ցույց է տրված, որ երբ դիմային մակերևույթների վրա տրված ֆունկցիաները բազմանդամներ են, իտեռացիոն պրոցեսն ընդհատվում է և ստացվում է ներքին խնդրի համար մաթեմատիկորեն ճշգրիտ լուծում: Բերված են ճշգրիտ լուծումներ արտաքին բեռնավորման մասնավոր դեպքերի համար:

Aghalovyan L.A, Zakaryan T.V.
The asymptotic solution of the first dynamic boundary value problem of the theory of elasticity for two-layered orthotropic plate

The first dynamic boundary problem of the theory of elasticity for two-layered orthotropic plate is considered. The solution of the problem is presented in the form of product of two types of functions. The first of them depends on three-dimensional coordinates and the second is the exponential function of the frequency of external influence and the time. By transition to dimensionless coordinates and displacements the singularly perturbed system of differential equations is obtained.This system is solved by the asymptotic method. The general asymptotic solution of the internal problem is found, which is completely defined as a result of satisfying of boundary conditions on the face of the plate. If the function which is present in the boundary conditions is a polynomial, the iterated process breaks and the mathematically exact solution of internal problem is obtained. The exact solutions for special cases of loadings are given.

Рассмотрена первая динамическая краевая задача теории упругости для двухслойной ортотропной пластинки. Решение задачи представлено в виде произведения двух типов функций. Первая из них зависит от пространственных координат, а вторая есть экспоненциальная функция от частоты внешнего воздействия и времени. Путем перехода к безразмерным координатам и перемещениям получена сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений, которая решена асимптотическим методом. Найдено общее асимптотическое решение внутренней задачи, которое полностью определяется в результате удовлетворения граничным условиям на лицевых поверхностях пластинки. Если функции, входящие в граничные условия, являются полиномами, итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение внутренней задачи. Приведены точные решения для частных случаев нагружения.

Введение. Для решения плоских и пространственных задач статики и динамики тонких тел (балки, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотичеслий метод решения сингулярно возмущенных уравнений. Рассмотрены как классические краевые задачи (на лицевых поверхностях тонкого тела заданы условия первой краевой задачи теории упругости, т.е. значения соответствующих компонент тензора напряжений), так и неклассические краевые задачи – на лицевых поверхностях тонкого тела заданы значения вектора перемещения или смешанные условия. Результаты, полученные в статических краевых задачах, обобщены в монографиях [1,2]. Метод оказался эффективным и для решения динамических задач, при этом рассмотрены как неклассические краевые задачи [3-8], так и классические краевые задачи [9-12]. Асимптотический метод использован для решения связанных задач термоупругости для пластин [13]. Метод использован С.О. Саркисяном для построения теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек [14,15]. Для решения неклассических задач пластин о собственных колебаниях использован также метод Левинсона [16].

В работе асимптотический метод используется для решения первой динамической задачи для двухслойной ортотропной пластинки.

1. Постановка задачи, основные соотношения, структура асимптотического решения. Требуется найти решение уравнений трехмерной динамической задачи для двухслойной ортотропной пластинки, занимающей область $D=\{(x,y,z):\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ -h_2\le z\le h_1,\ h<<l,\ h=\max(h_1,h_2),\ l=\min(a,b)\}$.

Считается, что на лицевых поверхностях $z=h_1,-h_2$ заданы условия

$$\begin{aligned}&\sigma_{xz}(x,y,h_1,t)=X^+(x,y)\exp(i\Omega t),\\&\sigma_{yz}(x,y,h_1,t)=Y^+(x,y)\exp(i\Omega t),\qquad \text{при}\quad z=h_1,\\&\sigma_{zz}(x,y,h_1,t)=Z^+(x,y)\exp(i\Omega t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}&\sigma_{xz}(x,y,-h_2,t)=-X^-(x,y)\exp(i\Omega t),\\&\sigma_{yz}(x,y,-h_2,t)=-Y^-(x,y)\exp(i\Omega t),\qquad \text{при}\quad z=-h_2,\\&\sigma_{zz}(x,y,-h_2,t)=-Z^-(x,y)\exp(i\Omega t)\end{aligned}\tag{1.2}$$

а между слоями должны выполняться условия полного контакта

$$\begin{aligned}&u^I(x,y,z{=}0){=}u^{II}(x,y,z{=}0),\ (u,v,w),\ \ \sigma^I_{xz}(x,y,z{=}0){=}\sigma^{II}_{xz}(x,y,z{=}0),\\&\sigma^I_{yz}(x,y,z=0)=\sigma^{II}_{yz}(x,y,z=0),\qquad \sigma^I_{zz}(x,y,z=0)=\sigma^{II}_{zz}(x,y,z=0).\end{aligned}\tag{1.3}$$

Условия на боковой поверхности пластинки пока не конкретизируются, ими обусловлено возникновение пограничных слоев.

Чтобы найти решение сформулированной задачи в уравнениях движения трехмерной задачи и соотношениях упругости для ортотропного тела, переходим к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения

$$\xi=x/l,\quad \eta=y/l,\quad \zeta=z/h,\quad U=u_x/l,\quad V=u_y/l,\quad W=u_z/l.\tag{1.4}$$

Решение вновь полученной системы отыскиваем в виде

$$(\sigma^k_{xx}(\xi,\eta,\zeta,t),\sigma^k_{xy},\sigma^k_{xz},\sigma^k_{yy},\sigma^k_{yz},\sigma^k_{zz})=(\sigma^k_{11}(\xi,\eta,\zeta),\sigma^k_{12},\sigma^k_{13},\sigma^k_{22},\sigma^k_{23},\sigma^k_{33})\exp(i\Omega t)\tag{1.5}$$

В результате получим следующую сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma^k_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^k_{12}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma^k_{13}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\rho^k\Omega_*^2U^k=0,\quad \frac{\partial\sigma^k_{12}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^k_{22}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma^k_{23}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\rho^k\Omega_*^2V^k=0\\&\frac{\partial\sigma^k_{13}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma^k_{23}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma^k_{33}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\rho^k\Omega_*^2W^k=0,\quad \frac{\partial U^k}{\partial\xi}=a^k_{11}\sigma^k_{11}+a^k_{12}\sigma^k_{22}+a^k_{13}\sigma^k_{33},\end{aligned}\tag{1.6}$$

$$\frac{\partial V^k}{\partial \eta}=a_{12}^k\sigma_{11}^k+a_{22}^k\sigma_{22}^k+a_{23}^k\sigma_{33}^k, \qquad \varepsilon^{-1}\frac{\partial W^k}{\partial \zeta}=a_{13}^k\sigma_{11}^k+a_{23}^k\sigma_{22}^k+a_{33}^k\sigma_{33}^k,$$

$$\frac{\partial V^k}{\partial \xi}+\frac{\partial U^k}{\partial \eta}=a_{66}^k\sigma_{12}^k, \qquad \frac{\partial W^k}{\partial \xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U^k}{\partial \zeta}=a_{55}^k\sigma_{13}^k,$$

$$\frac{\partial W^k}{\partial \eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V^k}{\partial \zeta}=a_{44}^k\sigma_{23}^k, \qquad \Omega_*=h\Omega, \qquad k=I,II.$$

Решение этой системы складывается из решений внутренней задачи $\left(I^{\text{int}}\right)$ и пограничного слоя $\left(I_b\right)$

$$I=I^{\text{int}}+I_b \tag{1.7}$$

2. Решение внутренней задачи. Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$\sigma_{jm}^{k\,\text{int}}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{jm}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta), \qquad j,m=1,2,3, \qquad s=\overline{0,N}, \qquad k=I,II,$$
$$(U^{k\,\text{int}},V^{k\,\text{int}},W^{k\,\text{int}})=\varepsilon^{s}(U^{k(s)},V^{k(s)},W^{k(s)}). \tag{2.1}$$

Подставив (2.1) в (1.6), для определения неизвестных коэффициентов $\sigma_{jm}^{k(s)},U^{k(s)},V^{k(s)},W^{k(s)}$ получим систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial\sigma_{13}^{k(s)}}{\partial \zeta}+\rho^k\Omega_*^2U^{k(s)}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{k(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial\sigma_{23}^{k(s)}}{\partial \zeta}+\rho^k\Omega_*^2V^{(s)}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial\sigma_{33}^{k(s)}}{\partial \zeta}+\rho^k\Omega_*^2W^{k(s)}=0, \quad \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi}=a_{11}^k\sigma_{11}^{k(s)}+a_{12}^k\sigma_{22}^{k(s)}+a_{13}^k\sigma_{33}^{k(s)},$$

$$\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta}=a_{12}^k\sigma_{11}^{k(s)}+a_{22}^k\sigma_{22}^{k(s)}+a_{23}^k\sigma_{33}^{k(s)}, \qquad \frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta}=a_{13}^k\sigma_{11}^{k(s)}+a_{23}^k\sigma_{22}^{k(s)}+a_{33}^k\sigma_{33}^{k(s)}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \eta}=a_{66}^k\sigma_{12}^{k(s)}, \qquad \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta}=a_{55}^k\sigma_{13}^{k(s)},$$

$$\frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta}=a_{44}^k\sigma_{23}^{k(s)}$$

Из этой системы все напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\sigma_{13}^{k(s)}=\frac{1}{a_{55}^k}\left(\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta}+\frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \xi}\right), \quad \sigma_{23}^{k(s)}=\frac{1}{a_{44}^k}\left(\frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta}+\frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial \eta}\right),$$

$$\sigma_{12}^{k(s)}=\frac{1}{a_{66}^k}\left(\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi}\right), \quad \sigma_{11}^{k(s)}=\frac{1}{\Delta^k}\left(-A_{23}^k\frac{\partial W^{k(s)}}{\partial \zeta}+A_{22}^k\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi}-A_{12}^k\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \eta}\right),$$

$$\sigma_{22}^{k(s)}=\frac{1}{\Delta^k}\left(-A_{13}^k\frac{\partial W^{k(s)}}{\partial\zeta}-A_{12}^k\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\xi}+A_{33}^k\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{33}^{k(s)}=\frac{1}{\Delta^k}\left(A_{11}^k\frac{\partial W^{k(s)}}{\partial\zeta}-A_{23}^k\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\xi}-A_{13}^k\frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial\eta}\right), \tag{2.3}$$

где

$$A_{11}^k=a_{11}^k a_{22}^k-\left(a_{12}^k\right)^2,\quad A_{12}^k=a_{12}^k a_{33}^k-a_{23}^k a_{13}^k,\quad A_{13}^k=a_{11}^k a_{23}^k-a_{13}^k a_{12}^k,$$

$$A_{22}^k=a_{22}^k a_{33}^k-\left(a_{23}^k\right)^2,\quad A_{23}^k=a_{13}^k a_{22}^k-a_{12}^k a_{23}^k,\quad A_{33}^k=a_{11}^k a_{33}^k-\left(a_{13}^k\right)^2, \tag{2.4}$$

$$\Delta^k=a_{11}^k A_{22}^k-a_{12}^k A_{12}^k-a_{13}^k A_{23}^k.$$

Подставив значение $\sigma_{13}^{k(s)}$ в первое уравнение системы (2.2), для определения $U^{k(s)}$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U^{k(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}^k\rho^k\Omega_*^2U^{k(s)}=R_U^{k(s)},\quad R_U^{k(s)}=-a_{55}^k\left(\frac{\partial\sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} \tag{2.5}$$

Подставив значения $\sigma_{23}^{k(s)},\sigma_{33}^{k(s)}$ в систему (2.2), для определения $V^{k(s)}, W^{k(s)}$ получим уравнения

$$\frac{\partial^2 V^{k(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}^k\rho^k\Omega_*^2V^{k(s)}=R_V^{k(s)}, \tag{2.6}$$

$$A_{11}^k\frac{\partial^2 W^{k(s)}}{\partial\zeta^2}+\Delta^k\rho^k\Omega_*^2W^{k(s)}=R_W^{k(s)}, \tag{2.7}$$

где

$$R_V^{k(s)}=-a_{44}^k\left(\frac{\partial\sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{k(s-1)}}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial^2 W^{k(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta},$$

$$R_W^{k(s)}=-\Delta^k\left(\frac{\partial\sigma_{13}^{k(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^{k(s-1)}}{\partial\eta}\right)+A_{23}^k\frac{\partial^2 U^{k(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}+A_{13}^k\frac{\partial^2 V^{k(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}. \tag{2.8}$$

Решениями уравнений (2.5) - (2.7) являются

$$U^{k(s)}=U_0^{k(s)}+U_\tau^{k(s)},\quad (U,V,W), \tag{2.9}$$

где

$$U_0^{k(s)}=C_1^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_1^k\zeta+C_2^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_1^k\zeta,\quad \gamma_1^k=\Omega_*\sqrt{\rho^k a_{55}^k},$$

$$V_0^{k(s)}=C_3^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_2^k\zeta+C_4^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_2^k\zeta,\quad \gamma_2^k=\Omega_*\sqrt{\rho^k a_{44}^k}, \tag{2.10}$$

$$W_0^{k(s)}=C_5^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_3^k\zeta+C_6^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_3^k\zeta,\quad \gamma_3^k=\Omega_*\sqrt{\rho^k\Delta^k/A_{11}^k},$$

$U_\tau^{k(s)}, V_\tau^{k(s)}, W_\tau^{k(s)}$ – частные решения уравнений (2.5) – (2.7)

Используя формулы (2.3), для напряжений $\sigma_{13}^{k(s)},\sigma_{23}^{k(s)},\sigma_{33}^{k(s)}$ будем иметь:

$$\sigma_{13}^{k(s)} = \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k}{a_{55}^k}} \left(C_1^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_1^k\zeta - C_2^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_1^k\zeta \right) + f_{13}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$\sigma_{23}^{k(s)} = \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k}{a_{44}^k}} \left(C_3^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_2^k\zeta - C_4^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_2^k\zeta \right) + f_{23}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta), \quad (2.11)$$

$$\sigma_{33}^{k(s)} = \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k A_{11}^k}{\Delta^k}} \left(C_5^{k(s)}(\xi,\eta)\cos\gamma_3^k\zeta - C_6^{k(s)}(\xi,\eta)\sin\gamma_3^k\zeta \right) + f_{33}^{k(s)}(\xi,\eta,\zeta),$$

где

$$f_{13}^{k(s)} = \frac{1}{a_{55}^k}\left(\frac{\partial U_\tau^{k(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial\xi} \right),$$

$$f_{23}^{k(s)} = \frac{1}{a_{44}^k}\frac{\partial V_\tau^{k(s)}}{\partial\zeta} + \frac{1}{a_{55}^k}\frac{\partial W^{k(s-1)}}{\partial\eta}, \quad (2.12)$$

$$f_{33}^{k(s)} = \frac{A_{11}^k}{\Delta^k}\frac{\partial W_\tau^{k(s)}}{\partial\zeta} - \frac{1}{\Delta^k}\left(A_{23}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial\xi} + A_{13}^k \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial\eta} \right).$$

Используя решения (2.9) – (2.11) и удовлетворив условиям (1.1) – (1.3), однозначно определяются значения функций $C_j^{k(s)}$

$$C_1^{I(s)} = b_{10}^{(s)} + \sqrt{\frac{\rho^{II} a_{55}^I}{\rho^I a_{55}^{II}}}\frac{d_1^{(s)}}{\delta_1}, \ C_1^{II(s)} = \frac{d_1^{(s)}}{\delta_1}, \ C_2^{I(s)} = b_7^{(s)} + \frac{d_2^{(s)}}{\delta_1}, \ C_2^{II(s)} = \frac{d_2^{(s)}}{\delta_1},$$

$$d_1^{(s)} = b_5^{(s)}\sin\gamma_1^I\zeta_1 + \left(b_2^{(s)} - b_{10}^{(s)}\cos\gamma_1^I\zeta_1 + b_7^{(s)}\sin\gamma_1^I\zeta_1 \right)\sin\gamma_1^{II}\zeta_2,$$

$$d_2^{(s)} = b_5^{(s)}\sqrt{\frac{\rho^{II} a_{55}^I}{\rho^I a_{55}^{II}}}\cos\gamma_1^I\zeta_1 - \left(b_2^{(s)} - b_{10}^{(s)}\cos\gamma_1^I\zeta_1 + b_7^{(s)}\sin\gamma_1^I\zeta_1 \right)\cos\gamma_1^{II}\zeta_2, \quad (2.13)$$

$$\delta_1 = \cos\gamma_1^{II}\zeta_2\sin\gamma_1^I\zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho^{II} a_{55}^I}{\rho^I a_{55}^{II}}}\cos\gamma_1^I\zeta_1\sin\gamma_1^{II}\zeta_2,$$

$$b_2^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{55}^I}{\rho^I}}\left(X^{+(s)} - f_{13}^{I(s)}(\xi,\eta,\zeta_1) \right),$$

$$b_5^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{55}^{II}}{\rho^{II}}}\left(-X^{-(s)} - f_{13}^{II(s)}(\xi,\eta,-\zeta_2) \right),$$

$$b_7^{(s)} = U_\tau^{II(s)}(\xi,\eta,0) - U_\tau^{I(s)}(\xi,\eta,0),$$

$$b_{10}^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{55}^I}{\rho^I}}\left(f_{13}^{II(s)}(\xi,\eta,0) - f_{13}^{I(s)}(\xi,\eta,0) \right),$$

$$C_3^{I(s)} = b_{11}^{(s)} + \sqrt{\frac{\rho^{II} a_{44}^{I}}{\rho^{I} a_{44}^{II}}} \frac{d_3^{(s)}}{\delta_2}, \quad C_3^{II(s)} = \frac{d_3^{(s)}}{\delta_2}, \quad C_4^{I(s)} = b_8^{(s)} + \frac{d_4^{(s)}}{\delta_2}, \quad C_4^{II(s)} = \frac{d_4^{(s)}}{\delta_2},$$

$$d_3^{(s)} = b_6^{(s)} \sin\gamma_2^I\zeta_1 + \left(b_3^{(s)} - b_{11}^{(s)} \cos\gamma_2^I\zeta_1 + b_8^{(s)} \sin\gamma_2^I\zeta_1\right)\sin\gamma_2^{II}\zeta_2,$$

$$d_4^{(s)} = b_6^{(s)} \sqrt{\frac{\rho^{II} a_{44}^{I}}{\rho^{I} a_{44}^{II}}} \cos\gamma_2^I\zeta_1 - \left(b_3^{(s)} - b_{11}^{(s)} \cos\gamma_2^I\zeta_1 + b_8^{(s)} \sin\gamma_2^I\zeta_1\right)\cos\gamma_2^{II}\zeta_2, \qquad (2.14)$$

$$\delta_2 = \cos\gamma_2^{II}\zeta_2 \sin\gamma_2^I\zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho^{II} a_{44}^{I}}{\rho^{I} a_{44}^{II}}} \cos\gamma_2^I\zeta_1 \sin\gamma_2^{II}\zeta_2,$$

$$b_3^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{44}^I}{\rho^I}}\left(Y^{+(s)} - f_{23}^{I(s)}(\xi,\eta,\zeta_1)\right),$$

$$b_6^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{44}^{II}}{\rho^{II}}}\left(-Y^{-(s)} - f_{23}^{II(s)}(\xi,\eta,-\zeta_2)\right),$$

$$b_8^{(s)} = V_\tau^{II(s)}(\xi,\eta,0) - V_\tau^{I(s)}(\xi,\eta,0),$$

$$b_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{44}^I}{\rho^I}}\left(f_{23}^{II(s)}(\xi,\eta,0) - f_{23}^{I(s)}(\xi,\eta,0)\right),$$

$$C_5^{I(s)} = b_{12}^{(s)} + \sqrt{\frac{\rho^{II} A_{11}^{II}\Delta^{I}}{\rho^{I} A_{11}^{I}\Delta^{II}}} \frac{d_5^{(s)}}{\delta_3}, \quad C_5^{II(s)} = \frac{d_5^{(s)}}{\delta_3}, \quad C_6^{I(s)} = b_9^{(s)} + \frac{d_6^{(s)}}{\delta_3}, \quad C_6^{II(s)} = \frac{d_6^{(s)}}{\delta_3},$$

$$d_5^{(s)} = b_4^{(s)} \sin\gamma_3^I\zeta_1 + \left(b_1^{(s)} - b_{12}^{(s)} \cos\gamma_3^I\zeta_1 + b_9^{(s)} \sin\gamma_3^I\zeta_1\right)\sin\gamma_3^{II}\zeta_2,$$

$$d_6^{(s)} = b_4^{(s)} \sqrt{\frac{\rho^{II} A_{11}^{II}\Delta^{I}}{\rho^{I} A_{11}^{I}\Delta^{II}}} \cos\gamma_3^I\zeta_1 - \left(b_1^{(s)} - b_{12}^{(s)} \cos\gamma_3^I\zeta_1 + b_9^{(s)} \sin\gamma_3^I\zeta_1\right)\cos\gamma_3^{II}\zeta_2, \qquad (2.15)$$

$$\delta_3 = \cos\gamma_3^{II}\zeta_2 \sin\gamma_3^I\zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho^{II} A_{11}^{II}\Delta^{I}}{\rho^{I} A_{11}^{I}\Delta^{II}}} \cos\gamma_3^I\zeta_1 \sin\gamma_3^{II}\zeta_2,$$

$$b_1^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{A_{11}^I\rho^I}}\left(Z^{+(s)} - f_{33}^{I(s)}(\xi,\eta,\zeta_1)\right),$$

$$b_4^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^{II}}{A_{11}^{II}\rho^{II}}}\left(-Z^{-(s)} - f_{33}^{II(s)}(\xi,\eta,-\zeta_2)\right),$$

$$b_9^{(s)} = W_\tau^{II(s)}(\xi,\eta,0) - W_\tau^{I(s)}(\xi,\eta,0),$$

$$b_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}}\left(f_{33}^{II(s)}(\xi,\eta,0) - f_{33}^{I(s)}(\xi,\eta,0)\right).$$

Имея значения функций $C_j^{k(s)}$, по формулам (2.1), (2.3), (2.10) определятся все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения. Это решение будет конечным, если $\delta_1 \neq 0,\ \delta_2 \neq 0,\ \delta_3 \neq 0$. При значениях Ω, когда какое либо $\delta_i = 0$, будет возникать резонанс. Эти значения Ω совпадают с главными значениями частот собственных колебаний двухслойной пластинки [11,12]. Таким образом, решение внутренней задачи полностью определяется после удовлетворения граничным условиям (1.1), (1.2) на лицевых поверхностях двухслойного пакета.

3. Решения частных задач. Если функции, заданные на лицевых поверхностях, являются многочленами от тангенциальных координат, итерационный процесс во внутренней задаче обрывается на определенном приближении, в результате получается математически точное решение. Рассмотрим следующие случаи:

а) $Z^+ = -p_1 = \mathrm{const}, \quad Z^- = p_2 = \mathrm{const},\ X^\pm = Y^\pm = 0.$ (3.1)

Для этого случая в формулах (2.12) - (2.15) будем иметь:

$$f_{13}^{(0)} = f_{23}^{(0)} = f_{33}^{(0)} = 0,\ b_{2,3,5-12}^{(0)} = 0,\ d_{1-4}^{(0)} = 0,\ C_{1-4}^{k(0)} = 0,$$

$$b_1^{(0)} = -\frac{\varepsilon p_1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}},\ \ b_4^{(0)} = -\frac{\varepsilon p_2}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^{II}}{\rho^{II} A_{11}^{II}}},$$

$$d_5^{(0)} = -\frac{\varepsilon}{\Omega_*}\left(p_2\sqrt{\frac{\Delta^{II}}{\rho^{II} A_{11}^{II}}}\sin\gamma_3^I\zeta_1 + p_1\sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}}\sin\gamma_3^{II}\zeta_2\right), \tag{3.2}$$

$$d_6^{(0)} = -\frac{\varepsilon}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}}\left(p_2\cos\gamma_3^I\zeta_1 - p_1\cos\gamma_3^{II}\zeta_2\right),$$

$$C_5^{I(0)} = -\frac{\varepsilon}{\delta_3\Omega_*}\left(p_2\sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}}\sin\gamma_3^I\zeta_1 + p_1\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}\sqrt{\frac{\rho^{II} A_{11}^{II}}{\Delta^{II}}}\sin\gamma_3^{II}\zeta_2\right),$$

$$C_5^{II(0)} = -\frac{\varepsilon}{\delta_3\Omega_*}\left(p_2\sqrt{\frac{\Delta^{II}}{\rho^{II} A_{11}^{II}}}\sin\gamma_3^I\zeta_1 + p_1\sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}}\sin\gamma_3^{II}\zeta_2\right),$$

$$C_6^{k(0)} = -\frac{\varepsilon}{\delta_3\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}}\left(p_2\cos\gamma_3^I\zeta_1 - p_1\cos\gamma_3^{II}\zeta_2\right),$$

$$U^{k(0)}=0,\ V^{k(0)}=0,\ \sigma_{13}^{k(0)}=\sigma_{23}^{k(0)}=\sigma_{12}^{k(0)}=0,\ W^{k(0)}=C_5^{k(0)}\sin\gamma_3^k\zeta+C_6^{k(0)}\cos\gamma_3^k\zeta,$$

$$\sigma_{33}^{I(0)}=-\frac{\varepsilon}{\delta_3}\left(\left(p_2\sin\gamma_3^I\zeta_1+p_1\sqrt{\frac{\rho^{II}\Delta^I A_{11}^{II}}{\rho^I\Delta^{II}A_{11}^I}}\sin\gamma_3^{II}\zeta_2\right)\cos\gamma_3^I\zeta-\left(p_2\cos\gamma_3^I\zeta_1-p_1\cos\gamma_3^{II}\zeta_2\right)\sin\gamma_3^I\zeta\right),$$

$$\sigma_{33}^{II(0)} = -\frac{\varepsilon}{\delta_3}\left(\left(p_2\sin\gamma_3^I\zeta_1 + p_1\sqrt{\frac{\rho^{II}\Delta^I A_{11}^{II}}{\rho^I\Delta^{II}A_{11}^I}}\sin\gamma_3^{II}\zeta_2\right)\cos\gamma_3^{II}\zeta - \right.$$

$$\left. -\sqrt{\frac{\rho^{II}\Delta^I A_{11}^{II}}{\rho^I\Delta^{II}A_{11}^I}}\left(p_2\cos\gamma_3^I\zeta_1 - p_1\cos\gamma_3^{II}\zeta_2\right)\sin\gamma_3^{II}\zeta\right),$$

$$\sigma_{11}^{k(0)} = -\frac{A_{23}^k}{\Delta^k}\frac{\partial W^{k(0)}}{\partial\zeta},\ \ \sigma_{22}^{k(0)} = -\frac{A_{13}^k}{\Delta^k}\frac{\partial W^{k(0)}}{\partial\zeta}.$$

При $s \geq 1$ все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения равны нулю. Следовательно, будем иметь следующее окончательное решение:

$$u^k=0,\ \ v^k=0,\ \ \sigma_{xy}^k=\sigma_{xz}^k=\sigma_{yz}^k=0,\ \ w^k=lW^{k(0)}\exp(i\Omega t),\ \ k=I,II$$
$$\sigma_{xx}^k=\varepsilon^{-1}\sigma_{11}^{k(0)}\exp(i\Omega t),\ \sigma_{yy}^k=\varepsilon^{-1}\sigma_{22}^{k(0)}\exp(i\Omega t),\ \sigma_{zz}^k=\varepsilon^{-1}\sigma_{33}^{k(0)}\exp(i\Omega t), \tag{3.3}$$

б) $Z^+=-(p+q_1\xi+q_2\eta),\quad Z^-=0,\quad X^\pm=Y^\pm=0.$ (3.4)

Для этого случая отличными от нуля являются приближения $s=0{,}1$. Имеем

$$C_{1-4}^{k(0)}=0,\ \ C_5^{I(0)}=-\frac{\varepsilon\Delta^I}{\delta_3\Omega_*\rho^I A_{11}^I}\sqrt{\frac{\rho^{II}A_{11}^{II}}{\Delta^{II}}}\left(p+q_1\xi+q_2\eta\right)\sin\gamma_3^{II}\zeta_2,$$
$$C_5^{II(0)}=-\frac{\varepsilon}{\delta_3\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}}\left(p+q_1\xi+q_2\eta\right)\sin\gamma_3^{II}\zeta_2, \tag{3.5}$$
$$C_6^{k(0)}=\frac{\varepsilon}{\delta_3\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}}\left(p+q_1\xi+q_2\eta\right)\cos\gamma_3^{II}\zeta_2,$$

В результате, при $s=0$ имеем решение

$$U^{k(0)}{=}0,\ V^{k(0)}{=}0,\ \sigma_{13}^{k(0)}{=}\sigma_{23}^{k(0)}{=}\sigma_{12}^{k(0)}{=}0,\ W^{k(0)}{=}C_5^{k(0)}\sin\gamma_3^k\zeta{+}C_6^{k(0)}\cos\gamma_3^k\zeta,$$
$$\sigma_{33}^{I(0)}{=}{-}\frac{\varepsilon}{\delta_3}\left(p{+}q_1\xi{+}q_2\eta\right)\left(\sqrt{\frac{\rho^{II}\Delta^I A_{11}^{II}}{\rho^I\Delta^{II}A_{11}^I}}\sin\gamma_3^{II}\zeta_2\cos\gamma_3^I\zeta{+}\cos\gamma_3^{II}\zeta_2\sin\gamma_3^I\zeta\right),$$
$$\sigma_{33}^{II(0)}{=}{-}\frac{\varepsilon}{\delta_3}\left(p{+}q_1\xi{+}q_2\eta\right)\sqrt{\frac{\rho^{II}\Delta^I A_{11}^{II}}{\rho^I\Delta^{II}A_{11}^I}}\left(\sin\gamma_3^{II}\zeta_2\cos\gamma_3^{II}\zeta{+}\cos\gamma_3^{II}\zeta_2\sin\gamma_3^{II}\zeta\right), \tag{3.6}$$
$$\sigma_{11}^{k(0)}=-\frac{A_{23}^k}{\Delta^k}\frac{\partial W^{k(0)}}{\partial\zeta},\ \ \sigma_{22}^{k(0)}=-\frac{A_{13}^k}{\Delta^k}\frac{\partial W^{k(0)}}{\partial\zeta}.$$

При $s=1$ имеем

$$C_1^{I(1)}=b_{10}^{(1)}+\sqrt{\frac{\rho^{II}a_{55}^I}{\rho^I a_{55}^{II}}}\frac{d_1^{(1)}}{\delta_1},\ C_1^{II(1)}=\frac{d_1^{(1)}}{\delta_1},\ C_2^{I(1)}=b_7^{(1)}+\frac{d_2^{(1)}}{\delta_1},\ C_2^{II(1)}=\frac{d_2^{(1)}}{\delta_1},$$
$$C_3^{I(1)}=b_{11}^{(1)}+\sqrt{\frac{\rho^{II}a_{44}^I}{\rho^I a_{44}^{II}}}\frac{d_3^{(1)}}{\delta_2},\ C_3^{II(1)}=\frac{d_3^{(1)}}{\delta_2},\ C_4^{I(1)}=b_8^{(1)}+\frac{d_4^{(1)}}{\delta_2},\ C_4^{II(s)}=\frac{d_4^{(1)}}{\delta_2},$$
$$C_5^{I(1)}=\sqrt{\frac{\rho^{II}A_{11}^{II}\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I\Delta^{II}}}\frac{d_5^{(1)}}{\delta_3},\qquad C_5^{II(1)}=\frac{d_5^{(1)}}{\delta_3},\quad C_6^{I(1)}=C_6^{II(1)}=\frac{d_6^{(1)}}{\delta_3},$$
$$b_4^{(1)}{=}b_9^{(1)}{=}b_{12}^{(1)}{=}0,\ b_1^{(1)}{=}\frac{\varepsilon}{\Omega_*}\sqrt{\frac{\Delta^I}{\rho^I A_{11}^I}}\left(p{+}q_1\xi{+}q_2\eta\right),\ b_2^{(1)}{=}{-}\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{55}^I}{\rho^I}}f_{13}^{I(1)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right),$$
$$b_3^{(1)}=-\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{44}^I}{\rho^I}}f_{23}^{I(1)}\left(\xi,\eta,\zeta_1\right),\qquad b_5^{(1)}=-\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{55}^{II}}{\rho^{II}}}f_{13}^{II(1)}\left(\xi,\eta,-\zeta_2\right),$$
$$b_6^{(1)}=-\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{44}^{II}}{\rho^{II}}}f_{23}^{II(1)}\left(\xi,\eta,-\zeta_2\right),\qquad b_7^{(1)}=B_2^{II}-B_2^I,\qquad b_8^{(1)}=B_4^{II}-B_4^I,$$

$$
\begin{aligned}
&b_{10}^{(1)}=\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{55}^{I}}{\rho^{I}}}\left(\frac{1}{a_{55}^{II}}\left(B_1^{II}\gamma_3^{II}+\frac{\partial C_6^{II(o)}}{\partial\xi}\right)-\frac{1}{a_{55}^{I}}\left(B_1^{I}\gamma_3^{I}+\frac{\partial C_6^{I(o)}}{\partial\xi}\right)\right),\\
&b_{11}^{(1)}=\frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{44}^{I}}{\rho^{I}}}\left(\frac{B_3^{II}\gamma_3^{II}}{a_{44}^{II}}+\frac{1}{a_{55}^{II}}\frac{\partial C_6^{II(o)}}{\partial\eta}-\frac{B_3^{I}\gamma_3^{I}}{a_{44}^{I}}-\frac{1}{a_{55}^{I}}\frac{\partial C_6^{I(o)}}{\partial\eta}\right),\\
&d_1^{(1)}=b_5^{(1)}\sin\gamma_1^{I}\zeta_1+\left(b_2^{(1)}-b_{10}^{(1)}\cos\gamma_1^{I}\zeta_1+b_7^{(1)}\sin\gamma_1^{I}\zeta_1\right)\sin\gamma_1^{II}\zeta_2,\\
&d_2^{(1)}=b_5^{(1)}\sqrt{\frac{\rho^{II}a_{55}^{I}}{\rho^{I}a_{55}^{II}}}\cos\gamma_1^{I}\zeta_1-\left(b_2^{(1)}-b_{10}^{(1)}\cos\gamma_1^{I}\zeta_1+b_7^{(1)}\sin\gamma_1^{I}\zeta_1\right)\cos\gamma_1^{II}\zeta_2,\\
&d_3^{(1)}=b_6^{(1)}\sin\gamma_2^{I}\zeta_1+\left(b_3^{(1)}-b_{11}^{(1)}\cos\gamma_2^{I}\zeta_1+b_8^{(1)}\sin\gamma_2^{I}\zeta_1\right)\sin\gamma_2^{II}\zeta_2,\\
&d_4^{(1)}=b_6^{(1)}\sqrt{\frac{\rho^{II}a_{44}^{I}}{\rho^{I}a_{44}^{II}}}\cos\gamma_2^{I}\zeta_1-\left(b_3^{(1)}-b_{11}^{(1)}\cos\gamma_2^{I}\zeta_1+b_8^{(1)}\sin\gamma_2^{I}\zeta_1\right)\cos\gamma_2^{II}\zeta_2,\\
&d_5^{(1)}=b_1^{(1)}\sin\gamma_3^{II}\zeta_2,\quad d_6^{(1)}=-b_1^{(1)}\cos\gamma_3^{II}\zeta_2,\\
&\delta_1=\cos\gamma_1^{II}\zeta_2\sin\gamma_1^{I}\zeta_1+\sqrt{\frac{\rho^{II}a_{55}^{I}}{\rho^{I}a_{55}^{II}}}\cos\gamma_1^{I}\zeta_1\sin\gamma_1^{II}\zeta_2,\\
&\delta_2=\cos\gamma_2^{II}\zeta_2\sin\gamma_2^{I}\zeta_1+\sqrt{\frac{\rho^{II}a_{44}^{I}}{\rho^{I}a_{44}^{II}}}\cos\gamma_2^{I}\zeta_1\sin\gamma_2^{II}\zeta_2,\\
&\delta_3=\cos\gamma_3^{II}\zeta_2\sin\gamma_3^{I}\zeta_1+\sqrt{\frac{\rho^{II}A_{11}^{II}\Delta^{I}}{\rho^{I}A_{11}^{I}\Delta^{II}}}\cos\gamma_3^{I}\zeta_1\sin\gamma_3^{II}\zeta_2,\\
&B_1^{I}=m_1\cos\gamma_3^{II}\zeta_2,\quad B_1^{II}=m_2\cos\gamma_3^{II}\zeta_2,\quad B_2^{I}=\sqrt{\frac{\rho^{II}A_{11}^{II}\Delta^{I}}{\rho^{I}A_{11}^{I}\Delta^{II}}}m_1\sin\gamma_3^{II}\zeta_2,\quad B_2^{II}=m_2\sin\gamma_3^{II}\zeta_2,\\
&B_3^{I}=m_3\cos\gamma_3^{II}\zeta_2,\quad B_3^{II}=m_4\cos\gamma_3^{II}\zeta_2,\quad B_4^{I}=\sqrt{\frac{\rho^{II}A_{11}^{II}\Delta^{I}}{\rho^{I}A_{11}^{I}\Delta^{II}}}m_3\sin\gamma_3^{II}\zeta_2,\quad B_4^{II}=m_4\sin\gamma_3^{II}\zeta_2,\\
&m_1=-\frac{\left(a_{55}^{I}A_{23}^{I}-\Delta^{I}\right)\gamma_3^{I}q_1\varepsilon}{\left(a_{55}^{I}\rho^{I}\Omega_*^2-(\gamma_3^{I})^2\right)\delta_3\Omega_*\sqrt{A_{11}^{I}\Delta^{I}\rho^{I}}},\quad m_2=-\frac{\left(a_{55}^{II}A_{23}^{II}-\Delta^{II}\right)\gamma_3^{II}q_1\varepsilon}{\left(a_{55}^{II}\rho^{II}\Omega_*^2-(\gamma_3^{II})^2\right)\delta_3\Omega_*\Delta^{II}}\sqrt{\frac{\Delta^{I}}{A_{11}^{I}\rho^{I}}},\\
&m_3=-\frac{\left(a_{44}^{I}A_{13}^{I}-\Delta^{I}\right)\gamma_3^{I}q_2\varepsilon}{\left(a_{44}^{I}\rho^{I}\Omega_*^2-(\gamma_3^{I})^2\right)\delta_3\Omega_*\sqrt{A_{11}^{I}\Delta^{I}\rho^{I}}},\quad m_4=-\frac{\left(a_{44}^{II}A_{13}^{II}-\Delta^{II}\right)\gamma_3^{II}q_2\varepsilon}{\left(a_{44}^{II}\rho^{II}\Omega_*^2-(\gamma_3^{II})^2\right)\delta_3\Omega_*\Delta^{II}}\sqrt{\frac{\Delta^{I}}{A_{11}^{I}\rho^{I}}},\\
&f_{13}^{k(1)}=\frac{1}{a_{55}^{k}}\left(B_1^{k}\gamma_3^{k}+\frac{\partial C_6^{k(o)}}{\partial\xi}\right)\cos\gamma_3^{k}\zeta+\left(\frac{\partial C_5^{k(o)}}{\partial\xi}-B_2^{k}\gamma_3^{k}\right)\sin\gamma_3^{k}\zeta,\\
&f_{23}^{k(1)}=\left(\frac{1}{a_{55}^{k}}\frac{\partial C_5^{k(o)}}{\partial\eta}-\frac{B_4^{k}\gamma_3^{k}}{a_{44}^{k}}\right)\sin\gamma_3^{k}\zeta+\left(\frac{1}{a_{55}^{k}}\frac{\partial C_6^{k(o)}}{\partial\eta}+\frac{B_3^{k}\gamma_3^{k}}{a_{44}^{k}}\right)\cos\gamma_3^{k}\zeta,\\
&f_{33}^{k(1)}=0
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$U_{\tau}^{k(1)} = B_1^k \sin\gamma_3^k\zeta + B_2^k \cos\gamma_3^k\zeta, \quad V_{\tau}^{k(1)} = B_3^k \sin\gamma_3^k\zeta + B_4^k \cos\gamma_3^k\zeta, \; W_{\tau}^{k(1)} = 0.$$

В результате получим

$$U^{k(1)} = C_1^{k(1)} \sin\gamma_1^k\zeta + C_2^{k(1)} \cos\gamma_1^k\zeta + U_{\tau}^{k(1)}, \quad V^{k(1)} = C_3^{k(1)} \sin\gamma_2^k\zeta + C_4^{k(1)} \cos\gamma_2^k\zeta + V_{\tau}^{k(1)}$$

$$W^{k(1)} = C_5^{k(1)} \sin\gamma_3^k\zeta + C_6^{k(1)} \cos\gamma_3^k\zeta + W_{\tau}^{k(1)},$$

$$\sigma_{13}^{k(1)} = \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k}{a_{55}^k}} \left(C_1^{k(1)} \cos\gamma_1^k\zeta - C_2^{k(1)} \sin\gamma_1^k\zeta \right) + f_{13}^{k(1)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$\sigma_{23}^{k(1)} = \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k}{a_{44}^k}} \left(C_3^{k(1)} \cos\gamma_2^k\zeta - C_4^{k(1)} \sin\gamma_2^k\zeta \right) + f_{23}^{k(1)}(\xi,\eta,\zeta), \tag{3.8}$$

$$\sigma_{33}^{k(1)} = \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^k A_{11}^k}{\Delta^k}} \left(C_5^{k(1)} \cos\gamma_3^k\zeta - C_6^{k(1)} \sin\gamma_3^k\zeta \right) + f_{33}^{k(1)}(\xi,\eta,\zeta),$$

$$\sigma_{11}^{k(1)} = -\frac{A_{23}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W^{k(1)}}{\partial\zeta}, \quad \sigma_{22}^{k(1)} = -\frac{A_{13}^k}{\Delta^k} \frac{\partial W^{k(1)}}{\partial\zeta}, \quad \sigma_{12}^{k(1)} = 0.$$

Окончательным решением будет

$$u^k = hU^{k(1)} \exp(i\Omega t), \; v^k = hV^{k(1)} \exp(i\Omega t), \; w^k = l\left(W^{k(0)} + \varepsilon W^{k(1)}\right) \exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{xx}^k = (\varepsilon^{-1}\sigma_{11}^{k(0)} + \sigma_{11}^{k(1)}) \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{yy}^k = (\varepsilon^{-1}\sigma_{22}^{k(0)} + \sigma_{22}^{k(1)}) \exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{zz}^k = (\varepsilon^{-1}\sigma_{33}^{k(0)} + \sigma_{33}^{k(1)}) \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{xz}^k = \sigma_{13}^{k(1)} \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{yz}^k = \sigma_{23}^{k(1)} \exp(i\Omega t), \tag{3.9}$$

$$\sigma_{xy}^k = 0, \qquad k = I, II.$$

Найденное выше решение внутренней задачи, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пластинки. Для удовлетворения этим условиям необходимо построить решения для пограничного слоя. Это решение строится и сопрягается с решением внутренней задачи, описанным в [1,17] способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с.
3. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. ВУЗов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8-11.
4. Агаловян Л.А., Халатян Л.М. Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях.//Докл. НАН Армении. 1999. Т.99 №4. С. 315-321.
5. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. Неклассические краевые задачи о собственных и вынужденных колебаниях анизотропных пластин.// В сб.: “Механика оболочек и пластин” (Тр. XIX Международной конф. по теории оболочек и пластин). Изд-во. Нижегородского университета. Нижний Новгород. 1999. С. 16-20.
6. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. // ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.

7. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. О характере вынужденных колебаний трехслойной ортотропной пластинки при смешанной краевой задаче. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.186-192.
8. Агаловян Л.А., Погосян А.М. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С.36-47.
9. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы. //Прикл. мат. и мех. (ПММ). 2008. Т.72. Вып.4. С.633-634: Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 72 (2008), pp 452-460. Elsevier 2008.
10. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Асимптотическое решение динамической первой краевой задачи теории упругости для ортотропной полосы. // В сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2007. С. 21-27.
11. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О частотах и формах собственных колебаний орто-тропной полосы со свободными продольными краями. // В сб.: “ Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван: 2008. С.36-42.
12. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки.// Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. №4. С.304-309.
13. Геворкян Р.С. Асимптотические решения установившихся динамических (связанных) задач термоупругости для изотропных пластин. // ПММ. 2008. Т.72. Вып.1. С.148-156.
14. Саркисян С.О. Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек. // Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. Вып.2. С.154-166.
15. Атоян А.А., Саркисян С.О. Задача динамики тонкой пластинки на основе несимметричной теории упругости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.1–17.
16. Вартанов А.Г. Решение задачи собственных колебаний конечной плиты с закреплённым основанием и метод Левинсона. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №4. С.23-30.
17. Закарян Т.В. О пограничном слое в трёхмерной задаче о вынужденных колебаниях ортотропных пластин. // В сб. Механика 2009: Труды межд. школы – конференции молодых учёных. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2009. С. 214-218.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович, академик НАН Армении,
зав. отделом Института механики НАН Армении
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б},
Тел: (+37410) 52-58-35, E-mail: aghal@mechins.sci.am

Закарян Татевик Владиковна, научн.сотр. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел: (+37410) 63-88-82, E-mail: zaqaryantatevik83@rambler.ru

Поступила в редакцию 08. 04. 2011