

УДК 539.3

**О ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ОРТОТРОПНОЙ
ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ
АКОПЯН В.Н., СИМОНЯН А.Р.**

Ключевые слова: разрез, трещина, включение, смешанная задача, задача Римана

Key words: cut, crack, inclusion, mixed problem, Riemann problem

Հակոբյան Վ.Ն., Միմոնյան Ա.Ր.

Ճեղքեր պարունակող օրթոտրոպ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակի մասին

Աշխատանքում օրթոտրոպ հարթության համար առաձգականության տեսության հավասարումների խզվող լուծումների հիման վրա առաջարկվում են նոր կոմպլեքս ֆունկցիաներ, որոնք թույլ են տալիս օրթոտրոպիայի գլխավոր ուղղություններից մեկի վրա դեֆեկտներ պարունակող օրթոտրոպ հարթության հարթ խնդիրը բերել Ռիմանի խնդրի մեկ կամ երկու ֆունկցիաների համար: Որպես օրինակ բերված է օրթոտրոպիայի գլխավոր ուղղություններից մեկի վրա իրար անմիջապես շարունակող վերջավոր ճաք և բացարձակ կոշտ ներդրակ պարունակող հարթության վերաբերյալ խնդրի փակ լուծումը:

Hakobyan V.N., Simonyan A.R.

On Plane-Deformed State of Orthotropic Plane with Slits

In present paper, on the base of discontinuous solutions of the theory of elasticity for orthotropic plane the new complex potential functions are purposed. Using these functions two-dimensional problem for orthotropic plane with defects on one of the principal direction is reduced to the Riemann problem for one or two functions as in isotropic case. For an example the closed solution of plane-deformed state of orthotropic plane, containing the crack with finite length and the absolutely rigid thin inclusion, continuing each other on one line of orthotropy, is considered.

В настоящей работе, на основе разрывных решений уравнений теории упругости для ортотропной плоскости предлагаются новые комплексные функции, позволяющие, как и в изотропном случае, плоскую задачу для ортотропной плоскости с дефектами на одном из главных направлений ортотропии свести к задаче Римана для одной или двух функций. В качестве примера приведено замкнутое решение задачи о плоско-деформированном состоянии ортотропной плоскости, содержащей на одной из линий ортотропии конечную трещину и абсолютно жесткое тонкое включение непосредственно продолжающие друг друга.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть ортотропная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат Oxy , направления осей которой совпадают с главными направлениями ортотропии материала, на линии $y=0$ по линии L , состоящей из совокупности конечного числа непересекающихся интервалов, содержит разрез. Будем считать, что на интервалах $L^{(+)}$ и $L^{(-)}$ соответственно верхнего и нижнего берегов разреза заданы нормальные $P_0^{(\pm)}(x)$ и касательные напряжения $\tau_0^{(\pm)}(x)$, а на интервалах $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ соответственно верхнего и нижнего берегов разреза заданы вертикальные $v_{\pm}(x)$ и горизонтальные $u_{\pm}(x)$ смещения и равнодействующие действующих там напряжений $P_j^{(\pm)}$.

Ставится задача: построить замкнутое решение.

Мысленно разделим плоскость на верхнюю и нижнюю полуплоскости и снабдим индексами «+» и «-» компоненты тензора напряжений и смещений соответствующих полуплоскостей. Тогда поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(+)}(x, +0) &= \sigma_y^{(-)}(x, -0), \quad \tau_{xy}^{(+)}(x, +0) = \tau_{xy}^{(-)}(x, -0) \\ U_+(x, +0) &= U_-(x, -0), \quad V_+(x, +0) = V_-(x, -0) \end{aligned} \quad (x \notin L) \quad (1.1a)$$

$$\begin{aligned} U_{\pm}(x, \pm 0) &= u_{\pm}(x); \quad V_{\pm}(x, \pm 0) = v_{\pm}(x); \quad (x \in S_{\pm}) \\ \sigma_y^{(\pm)}(x, \pm 0) &= -P_0^{(\pm)}(x); \quad \tau_{xy}^{(\pm)}(x, \pm 0) = \tau_0^{(\pm)}(x) \quad (x \in L_{\pm}) \end{aligned} \quad (1.1b)$$

Здесь $U_{\pm}(x, y)$ и $V_{\pm}(x, y)$ – горизонтальные и нормальные компоненты смещений точек соответствующих полуплоскостей, каждая в своей области определения удовлетворяющая уравнениям [4,5]:

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial y^2} + (1 + a_{12}) \frac{\partial^2 V_{\pm}}{\partial x \partial y} &= 0; \\ \frac{\partial^2 V_{\pm}}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 V_{\pm}}{\partial y^2} + (1 + a_{12}) \frac{\partial^2 U_{\pm}}{\partial x \partial y} &= 0; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$\sigma_y^{(\pm)}(x, y)$, $\tau_{xy}^{(\pm)}(x, y)$ – компоненты тензора напряжений этих полуплоскостей – связаны с компонентами напряжений по формулам

$$\sigma_y^{(\pm)} = \mu_{12} \left(a_{12} \frac{\partial U_{\pm}}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial V_{\pm}}{\partial y} \right); \quad \tau_{xy}^{(\pm)} = \mu_{12} \left(\frac{\partial U_{\pm}}{\partial y} + \frac{\partial V_{\pm}}{\partial x} \right). \quad (1.3)$$

Кроме того, $u_{\pm}(x)$, $v_{\pm}(x)$, $P_0^{(\pm)}(x)$ и $\tau_0^{(\pm)}(x)$ – гладкие в указанных областях функции, а $a_{ij} = c_{ij} / c_{33}$; $\mu_{12} = c_{33}$, c_{ij} ($i, j = 1, 2$) – компоненты тензора Коши. Постоянные a_{ij} связаны с физическими постоянными материала плоскости формулами:

$$a_{11} = E_1 \left[\mu_{12} \left(1 - \nu_{12}^2 E_2 / E_1 \right) \right]^{-1}; \quad a_{22} = a_{11} E_2 / E_1; \quad a_{12} = \nu_{12} a_{22} = \nu_{21} a_{11}.$$

Для решения поставленной задачи введём функции скачков смещений и напряжений $U(x)$, $V(x)$, $\sigma(x)$, $\tau(x)$ и условия (1.1a) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(+)}(x, +0) - \sigma_y^{(-)}(x, -0) &= \sigma(x) \\ \tau_{xy}^{(+)}(x, +0) - \tau_{xy}^{(-)}(x, -0) &= \tau(x) \\ U_+(x, +0) - U_-(x, -0) &= U(x) \\ V_+(x, +0) - V_-(x, -0) &= V(x) \end{aligned} \quad (-\infty < x < \infty); \quad (1.4)$$

где

$$U(x) = V(x) = \sigma(x) = \tau(x) = 0. \quad (x \notin L)$$

Используя результаты работы [8], комплексные комбинации смещений и напряжений запишем при помощи введённых функций скачков:

$$\frac{dU_{\pm}(x, -0)}{dx} + i\alpha \frac{dV_{\pm}(x, -0)}{dx} = -\frac{a_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{W'(s)}{s-x} ds + \frac{b_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{\chi(s)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} W'(x); \quad (1.5)$$

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, +0) - i\alpha\tau^{(\pm)}(x, +0) = \frac{c_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{W'(s)}{s-x} ds + \frac{a_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{\chi(s)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} \chi(x). \quad (1.6)$$

$(-\infty < x < \infty).$

Здесь

$$\mu_j = \sqrt{\frac{b_0 + (-1)^{j+1} \sqrt{b_0^2 - 4a_{11}a_{22}}}{2a_{22}}}; \quad b_0 = a_{11}a_{22} - 2a_{12} - a_{12}^2 \quad (j=1, 2);$$

$$a_1 = \frac{(a_{12} - \sqrt{a_{11}a_{22}})}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1 + \mu_2)}; \quad a_2 = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} a_1; \quad b_1 = \frac{(1 + \sqrt{a_{11}a_{22}})}{2\mu_{12}\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1 + \mu_2)};$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} b_1; \quad c_1 = \frac{\mu_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1 + \mu_2)}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} c_1.$$

$$W'(x) = U'(x) + i\alpha V'(x); \quad \chi(x) = \sigma(x) - i\alpha\tau(x); \quad (\alpha = \sqrt[4]{a_{22}/a_{11}}).$$

Теперь, используя полученные формулы, удовлетворим условиям (1.1b), первоначально записав их в виде:

$$\frac{dU_{\pm}(x, -0)}{dx} + i\alpha \frac{dV_{\pm}(x, -0)}{dx} = u_{\pm}(x) + i\alpha v_{\pm}(x) = w_{\pm}(x);$$

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, +0) - i\alpha\tau_0^{(\pm)}(x, +0) = -P_0^{(\pm)}(x) - i\alpha\tau_0^{(\pm)}(x) = \chi_0^{(\pm)}(x).$$

В результате придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \pm \frac{1}{2} W'(s) - \frac{a_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{W'(s)}{s-x} ds + \frac{b_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{\chi(s)}{s-x} ds = w_{\pm}(x); & (x \in S^{(\pm)}) \\ \pm \frac{1}{2} \chi(s) + \frac{c_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{W'(s)}{s-x} ds + \frac{a_1}{\alpha\pi i} \int_L \frac{\chi(s)}{s-x} ds = \chi_0^{\pm}(x); & (x \in L^{(\pm)}) \end{cases} \quad (1.7)$$

которую нужно рассматривать совместно с условиями типа

$$\int_{L_j} \chi(x) dx = P_0^{(j)}; \quad W(a_k) = W(b_k) = 0, \quad (1.8)$$

обеспечивающими равновесие на участках, где заданы смещения, а также непрерывность смещений в конечных точках интервалов, составляющих разрез L .

2. Решение системы определяющих уравнений

Перейдем к решению определяющей системы сингулярных интегральных уравнений (1.7). Для этого рассмотрим аналитичные во всей комплексной плоскости кроме, быть может, линии L , функции [6]

$$\Omega_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\chi(s) + k_j W'(s)}{s-z} ds; \quad \left(k_j = \frac{2(-1)^{j+1} c_1}{\alpha - 2(-1)^j a_1} \right); \quad (j=1,2). \quad (2.1)$$

Используя формулы Племеля–Сохоцкого

$$\Omega_j^\pm(x) = \pm \frac{\chi(s) + k_j W'(s)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\chi(s) + k_j W'(s)}{s-x} ds \quad (j=1,2), \quad (2.2)$$

нетрудно убедиться, что система интегральных уравнений (1.7) при помощи функций $\Omega_j(z)$ ($j=1,2$) запишется в виде следующей задачи Римана для двух функций:

$$\begin{cases} \Omega_1^+(x) = v_1(x) \Omega_2^-(x) + f_1(x) \\ \Omega_2^+(x) = v_2(x) \Omega_1^-(x) + f_2(x) \end{cases} \quad (x \in L). \quad (2.3)$$

Здесь $\Omega_j^\pm(x)$ – значения аналитической функции $\Omega_j(z)$ соответственно на верхнем и нижнем берегах линии L , а функции $v_j(x)$ и $f_j(x)$ ($j=1,2$) даются формулами:

$$v_1(x) = \begin{cases} v & x \in L^{(+)} \\ -1 & x \in S^{(+)} \end{cases}; \quad v_2(x) = \begin{cases} 1/v & x \in L^{(-)} \\ -1 & x \in S^{(-)} \end{cases}; \quad v = \frac{\alpha - 2a_1}{\alpha + 2a_1};$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\chi_1(x)}{1+v} & x \in L^{(+)} \\ \frac{b_1}{\alpha} W_1'(x) & x \in S^{(+)} \end{cases}; \quad f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1+v}{v} \chi_2(x) & x \in L^{(-)} \\ \frac{\alpha}{b_1} W_2'(x) & x \in S^{(-)} \end{cases}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению задачи Римана для двух функций (2.3). По результатам работы [1] решение этой задачи всегда можно построить в замкнутом виде, сводя систему уравнений к совместному решению одной линейной и одной нелинейной задач Римана. При этом, когда разрез L состоит из одного интервала (a, b) , функции $\Omega_j(z)$ даются формулами:

$$\Omega_j(z) = X_j(z) \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_L \left[\frac{f_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} + \frac{f_2(\tau)}{X_2^+(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau-z} - \right. \\ \left. - (-1)^j \frac{B_1(z)}{4\pi i} \int_L \left[\frac{f_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} - \frac{f_2(\tau)}{X_2^+(\tau)} \right] \frac{d\tau}{B_1^+(\tau)(\tau-z)} + C_0^j \right\}; \quad (2.4)$$

$$X_j(z) = (z-b)^{-\alpha} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\Gamma_0(z) - (-1)^j \Gamma(z) \right] \right\}; \quad (2.5)$$

$$\Gamma_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln[\alpha(\tau)] \frac{d\tau}{\tau-z}; \quad \Gamma(z) = \frac{B_1(z)}{2\pi i} \int_L \ln[\beta(x)] \frac{d\tau}{B_1^+(\tau)(\tau-z)} \quad (2.6)$$

$$B_1(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}; \quad \alpha(\tau) = v_1(\tau)v_2(\tau); \quad \beta(\tau) = v_1(\tau)/v_2(\tau); \quad (j=1,2)$$

Однако, оказывается, что если на берегах линии L коэффициенты $v_j(x)$ ($j=1,2$) – отличные от нуля постоянные, то решение задачи можно свести к

совместному решению двух линейных задач Римана. Действительно, в этом случае, умножая второе уравнение (1.7) на $\lambda_j = (-1)^{j+1} \sqrt{v_1/v_2}$, суммируя с первым и вводя новые функции по формулам

$$\Phi_j(z) = \Omega_1(z) + \lambda_j \Omega_2(z),$$

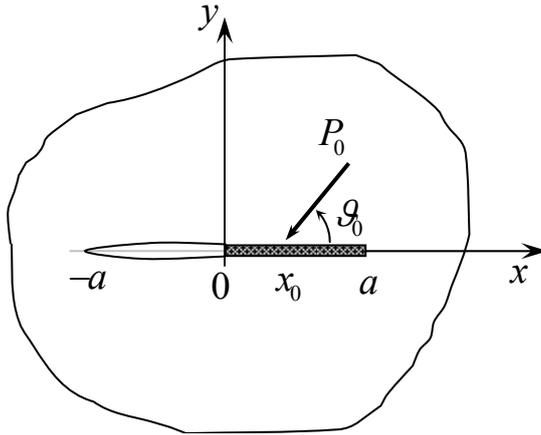
придём к двум обычным линейным уравнениям Римана:

$$\Phi_j^+(x) = G_j \Phi_j^-(x) + Q_j(x) \quad (x \in L); \quad (2.7)$$

$$Q_j(x) = F_1(x) + \lambda_j F_2(x); \quad G_j = (-1)^{j+1} \sqrt{v_1 v_2}; \quad j = 1, 2.$$

3. Плоско-деформированное состояние ортотропной плоскости с конечным разрезом и абсолютно жёстким включением, непосредственно продолжающее разрез

В качестве примера рассмотрим задачу для ортотропной плоскости, содержащей разрез на интервале $(-a, 0)$ и абсолютно жёсткое тонкое включение на интервале $(0, a)$ одного из главных направлений ортотропии $y = 0$. Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием сосредоточенной нагрузки P_0 ,



Фиг. 1

приложенной к включению в точке $x = x_0$ и составляющей угол ϑ_0 с осью ox (фиг.1). Отметим, что аналогичная задача для изотропной плоскости рассмотрена в работе [9].

Требуется определить контактные напряжения, действующие под включением, коэффициент интенсивности напряжений в концевой точке трещины $x = -a$, а также расстояние точки приложения нагрузки x_0 от начала координат, при котором угол поворота включения равен нулю.

В рассматриваемом случае

$$v_1(x) = \begin{cases} v & -a < x < 0 \\ -1 & 0 < x < a \end{cases}; \quad v_2(x) = \begin{cases} 1/v & -a < x < 0 \\ -1 & 0 < x < a \end{cases}; \quad f_1(x) = f_2(x) = 0$$

и система (2.3) принимает вид:

$$\begin{cases} \Omega_1^+(x) = v \Omega_2^-(x) \\ \Omega_2^+(x) = \frac{1}{v} \Omega_1^-(x) \end{cases} \quad (-a < x < 0); \quad \begin{cases} \Omega_1^+(x) = -\Omega_2^-(x) \\ \Omega_2^+(x) = -\Omega_1^-(x) \end{cases} \quad (0 < x < a) \quad (3.1)$$

Тогда, записав функции $v_j(x)$ ($j = 1, 2$) в виде

$$v_1(\tau) = \begin{cases} v e^{2\pi i m} & -a < \tau < 0 \\ e^{2\pi i k + \pi i} & 0 < \tau < a \end{cases}; \quad v_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{v} e^{2\pi i n} & -a < \tau < 0 \\ e^{2\pi i l + \pi i} & 0 < \tau < a \end{cases};$$

где m, n, k и l – целые числа, получим

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} e^{2\pi i(m+n)} & (-a < \tau < 0) \\ e^{2\pi i(k+l+1)} & (0 < \tau < a) \end{cases}; \quad \beta(\tau) = \begin{cases} v^2 e^{2\pi i(m-n)} & (-a < \tau < 0) \\ e^{2\pi i(k-l)} & (0 < \tau < a) \end{cases}.$$

Очевидно, что искомые функции $\Omega_j(z)$ в точках $x = -a, 0, a$ могут иметь интегрируемые особенности. Это возможно только в двух случаях, когда $m = 1, n = k = l = 0$ или $n = 1, m = k = l = 0$. Для этих двух случаев по формулам (2.5) и (2.6) найдём

$$\Gamma_0^{(1)}(z) = \Gamma_0^{(2)}(z) = \ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right); \quad \Gamma^{(j)}(z) = \frac{C_j^{(0)}}{2} \left\{ 1 - \frac{B_1(z)}{\pi i} \int_0^a \frac{d\tau}{B_1^+(\tau)(\tau-z)} \right\}; \quad (3.2)$$

$$C_j^{(0)} = 2 \ln v - (-1)^j 2\pi i.$$

При этом,

$$\Gamma^{(j)\pm}(x) = \frac{C_j^{(0)}}{2} \left\{ 1 \mp \frac{1}{\pi i} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| \right\} \quad (-a < x < 0), \quad (3.3)$$

$$\Gamma^{(j)\pm}(x) = \mp \frac{C_j^{(0)}}{2\pi i} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| \quad (0 < x < a).$$

Приняв в формуле (2.4) $\alpha = 1$, получим

$$X_j^{(k)}(z) = \frac{\exp\left\{-(-1)^j \Gamma^{(k)}(z)/2\right\}}{\sqrt{z^2 - a^2}}; \quad (j, k = 1, 2).$$

Далее, учитывая линейность системы (3.1), её общее решение запишем в виде линейной комбинации полученных решений, т.е.

$$\Omega_j(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left[C_1 \exp\left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \Gamma^{(1)}(z)\right) + C_2 \exp\left(\frac{(-1)^{j+1}}{2} \Gamma^{(2)}(z)\right) \right],$$

где C_j – неизвестные постоянные, подлежащие определению. Для определения постоянных C_j ($j = 1, 2$) и x_0 используем уравнение равновесия включения и равенства нулю скачков смещений в концевых точках трещины, которые запишем в следующей форме:

$$\int_0^a \chi(x) dx = P_0^*; \quad \operatorname{Re} \left\{ \int_0^a x \chi(x) dx \right\} = P_0 x_0 \sin \vartheta_0; \quad (3.4)$$

$$\int_{-a}^0 W'(x) dx = 0; \quad (P_0^* = P_0 (\sin \vartheta_0 - i\alpha \cos \vartheta_0)).$$

Используя формулы (2.3), легко установить, что

$$\chi(x) = \Omega_1^+(x) - \Omega_1^-(x) \quad (0 < x < a); \quad (3.5)$$

$$W'(x) = (\Omega_1^+(x) - \Omega_1^-(x)) / k_1 \quad (-a < x < 0);$$

или

$$\chi(x) = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - x^2}} \left\{ C_1 \left[\omega^{1/2 - i\gamma}(x) + \omega^{-1/2 + i\gamma}(x) \right] + C_2 \left[\omega^{1/2 + i\gamma}(x) + \omega^{-1/2 - i\gamma}(x) \right] \right\}; \quad (0 < x < a) \quad (3.6)$$

$$W'(x) = \frac{\sqrt{\nu}}{k_1 \sqrt{a^2 - x^2}} \left\{ C_1 \left[\omega^{-1/2 + i\gamma}(x) + \omega^{1/2 - i\gamma}(x) \right] - C_2 \left[\omega^{1/2 + i\gamma}(x) + \omega^{-1/2 - i\gamma}(x) \right] \right\}; \quad (-a < x < 0) \quad (3.7)$$

$$\left(\omega(x) = \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|; \quad \gamma = \ln \nu / 2\pi \right).$$

Подставим значения функций $\chi(x)$ и $W'(x)$ в условия (3.4) и учтём значение интегралов [7]

$$\int_{-a}^0 \frac{\omega^p(x) + \omega^{-p}(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{\pi}{2 \cos(\pi p / 2)}; \quad (-1 < \operatorname{Re} p < 1)$$

$$\int_0^a \frac{x \left[\omega^p(x) + \omega^{-p}(x) \right]}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{\pi a}{\sin(\pi p / 2)};$$

которые можно получить при помощи замены переменной $\omega(x) = \exp(u)$. В итоге, из первого и последнего условий (3.4) для коэффициентов C_j ($j = 1, 2$) получим значения:

$$C_1 = \frac{iP_0^*}{2\pi} \cos(\pi / 4 - i\pi\gamma / 2); \quad C_2 = \frac{iP_0^*}{2\pi} \cos(\pi / 4 + i\pi\gamma / 2).$$

Из второго условия (3.4) найдем

$$x_0 = \frac{1 + 2\gamma \operatorname{sh}(\pi\gamma)}{2 \operatorname{ch}(\pi\gamma)} a = \frac{\sqrt{\nu} + \gamma(\nu - 1)}{\nu + 1} a. \quad (3.8)$$

Используя полученные значения для постоянных C_j ($j = 1, 2$), формулы (3.6) и (3.7) запишем в виде:

$$\chi(x) = \frac{\sqrt{2}P_0^* Q_0(x)}{2\pi\sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}}; \quad W'(x) = -\frac{\sqrt{2\nu}P_0^* Q_1(x)}{2\pi k_1 \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}}, \quad (3.9)$$

где

$$Q_0(x) = \left\{ [1 + \omega(x)] \operatorname{ch}(\pi\gamma / 2) \cos(\gamma \ln \omega(x)) - [1 - \omega(x)] \operatorname{sh}(\pi\gamma / 2) \sin(\gamma \ln \omega(x)) \right\};$$

$$Q_1(x) = \left\{ [1 + \omega(x)] \operatorname{sh}(\pi\gamma / 2) \cos(\gamma \ln \omega(x)) + [1 - \omega(x)] \operatorname{ch}(\pi\gamma / 2) \sin(\gamma \ln \omega(x)) \right\}.$$

Следовательно, для скачков напряжений и производных разности смещений берегов разреза получим выражения:

$$\sigma(x) = \frac{\sqrt{2}P_0 \sin \vartheta_0 Q_0(x)}{2\pi\sqrt{\omega(x)(a^2-x^2)}}, \quad \tau(x) = \frac{\sqrt{2}P_0 \cos \vartheta_0 Q_0(x)}{2\pi\sqrt{\omega(x)(a^2-x^2)}},$$

$$V'(x) = \frac{\sqrt{2\nu}P_0 \cos \vartheta_0 Q_1(x)}{2\pi k_1 \sqrt{\omega(x)(a^2-x^2)}}, \quad U'(x) = -\frac{\sqrt{2\nu}P_0 \sin \vartheta_0 Q_1(x)}{2\pi k_1 \sqrt{\omega(x)(a^2-x^2)}}.$$

Как и следовало ожидать, в случае $\vartheta_0 = 0$, из-за симметрии рассмотренной задачи относительно оси Ox , скачок нормальных контактных напряжений, действующих на включение, и производная разности горизонтальных смещений берегов разреза равны нулю. В случае же $\vartheta_0 = \pi/2$ равны нулю скачок касательных контактных напряжений и производная разности вертикальных смещений берегов разреза.

Теперь определим коэффициент интенсивности напряжений в концевой точке трещины $x = -a$. С этой целью вычислим напряжения на линии $y = 0$ вне интервала $(-a, a)$. По формуле (1.6), обозначив

$$f(x) = 1 - \operatorname{sign}(x) \arccos(-a/x) / \pi, \text{ найдем}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(\pm)}(x, 0) - i\alpha\tau^{(\pm)}(x, 0) &= -\frac{b_1 k_2}{\alpha} [\Omega_1(x) - \nu\Omega_2(x)] = \\ &= -\frac{\sqrt{2} b_1 k_2 i P_0^*}{2\pi\alpha\sqrt{x^2-a^2}} \left\{ \left(v^{f(x)/2} - v^{1-f(x)/2} \right) \operatorname{ch}(\pi\gamma/2) \cos(\pi f(x)/2) - \right. \\ &\quad \left. - \left(v^{f(x)/2} + v^{1-f(x)/2} \right) \operatorname{sh}(\pi\gamma/2) \sin(\pi f(x)/2) \right\}; \quad (|x| > a). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тогда для коэффициента интенсивности напряжений в концевой точке трещины $x = -a$ имеем

$$\begin{aligned} K_I(-a) - i\alpha K_{II}(-a) &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow -a-0} \sqrt{-x-a} [\sigma_y(x, 0) - i\alpha\tau_{xy}(x, 0)] = \\ &= \frac{2\sqrt{\nu} k_2 b_1 i P_0^*}{\alpha\sqrt{2\pi a}} \operatorname{sh}(\pi\gamma/2), \end{aligned}$$

или

$$K_I(-a) = \frac{2\sqrt{\nu} k_2 b_1 P_0}{\sqrt{2\pi a}} \cos \vartheta_0 \operatorname{sh}(\pi\gamma/2);$$

$$K_{II}(-a) = -\frac{2\sqrt{\nu} k_2 b_1 P_0}{\alpha^2 \sqrt{2\pi a}} \sin \vartheta_0 \operatorname{sh}(\pi\gamma/2).$$

Таким же путем для коэффициента концентрации напряжений в концевой точке включения $x = a$ найдём

$$K_I(a) - i\alpha K_{II}(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow a+0} \sqrt{x-a} [\sigma_y(x,0) - i\alpha \tau_{xy}(x,0)] = \\ = \frac{b_1 k_2 (\nu - 1) i P_0^*}{\alpha \sqrt{2\pi a}} \operatorname{ch}(\pi\gamma/2),$$

или

$$K_I(a) = \frac{k_2 b_1 (\nu - 1) P_0}{\sqrt{2\pi a}} \cos \vartheta_0 \operatorname{ch}(\pi\gamma/2);$$

$$K_{II}(a) = -\frac{k_2 b_1 (\nu - 1) P_0}{\alpha^2 \sqrt{2\pi a}} \sin \vartheta_0 \operatorname{ch}(\pi\gamma/2).$$

Напишем также формулы для определения контактных напряжений под включением. Для этого опять используем формулу (1.6). При этом учтём, что при $x \in (0, a)$ справедливы соотношения:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{W'(s)}{s-x} ds = \frac{2}{k_1 - k_2} [\Omega_1^+(x) + \Omega_1^-(x)];$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\chi(s)}{s-x} ds = -\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} [\Omega_1^+(x) + \Omega_1^-(x)].$$

$$\Omega_1^+(x) = \frac{C_1 \omega^{-1/2+i\gamma}(x) + C_2 \omega^{1/2+i\gamma}(x)}{i\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \Omega_1^-(x) = -\frac{C_1 \omega^{1/2-i\gamma}(x) + C_2 \omega^{-1/2-i\gamma}(x)}{i\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

В итоге, после некоторых элементарных выкладок получим

$$\sigma_y^{(\pm)}(x,0) - i\alpha \tau^{(\pm)}(x,0) = \pm \frac{\chi(x)}{2} + \frac{i\sqrt{2} A_* P_0^* Q_2(x)}{2\pi \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}} = \\ = \frac{\sqrt{2} P_0^* [2i A_* Q_2(x) \pm Q_0(x)]}{4\pi \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}}. \quad (3.11)$$

Здесь

$$Q_2(x) = \left\{ [1 - \omega(x)] \operatorname{sh}(\pi\gamma/2) \cos(\gamma \ln \omega(x)) + \right. \\ \left. = [1 + \omega(x)] \operatorname{ch}(\pi\gamma/2) \sin(\gamma \ln \omega(x)) \right\};$$

$$A_* = 2(b_1 c_1 + a_1^2) / \alpha^2.$$

Отделив в (3.11) действительную и мнимую части, для нормальных и касательных контактных напряжений под включением получим выражения:

$$\sigma_y^{(\pm)}(x,0) = \frac{\sqrt{2} P_0^* [2\alpha A_* Q_2(x) \cos \vartheta_0 \pm Q_0(x) \sin \vartheta_0]}{4\pi \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}}, \\ \tau_{xy}^{(\pm)}(x,0) = -\frac{\sqrt{2} P_0^* [2A_* Q_2(x) \sin \vartheta_0 \pm \alpha Q_0(x) \cos \vartheta_0]}{4\pi \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}}.$$

Аналогичным образом для производных смещений берегов разреза найдем:

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\pm}(x, -0)}{dx} + i\alpha \frac{dV_{\pm}(x, -0)}{dx} &= \pm \frac{1}{2} W'(x) + B_* [\Omega_1^+(x) + \Omega_1^-(x)] = \\ &= \frac{\sqrt{2iP_0^*} [2k_1 B_* Q_3(x) \pm iQ_1(x)]}{4\pi k_1 \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}}, \quad (-a < x < 0) \end{aligned}$$

$$Q_3(x) = \{[1 - \omega(x)] \operatorname{ch}(\pi\gamma/2) \cos(\gamma \ln \omega(x)) - [1 + \omega(x)] \operatorname{sh}(\pi\gamma/2) \sin(\gamma \ln \omega(x))\}$$

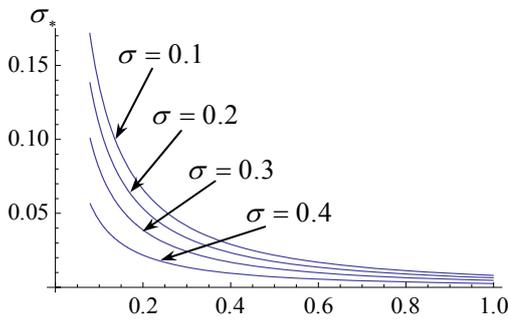
$$B_* = \frac{4b_1(b_1 c_1 + a_1^2)}{v\alpha^2(\alpha + 2a_1)}.$$

Отметим, что во всех полученных формулах приняв

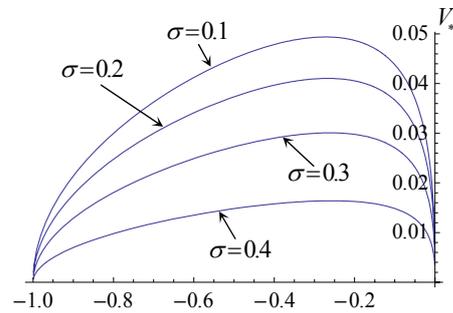
$$\begin{aligned} a_{jj} = a_{12} + 2 &= \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}; \quad \mu_{12} = \frac{E}{2(1+\sigma)}; \quad a_j = -\frac{(1-2\sigma)}{4(1-\sigma)}; \quad b_j = \frac{(1+\sigma)(3-4\sigma)}{4E(1-\sigma)}; \\ c_j &= \frac{E}{4(1-\sigma^2)}; \quad \mu_j = \alpha = 1; \quad A_* = 1/2; \quad B_* = 1/2k_1; \quad (j=1,2) \end{aligned}$$

где σ и E – соответственно коэффициент Пуассона и модуль Юнга для изотропного тела, получим соответствующие формулы для изотропной плоскости.

Проведён численный анализ рассматриваемой задачи в случае изотропной плоскости. Изучены закономерности изменения приведённых контактных напряжений $\sigma_* = a\sigma_y^+ / P_0$; $\tau_* = a\tau_y^+ / P_0$, приведённого расстояния точки приложения нагрузки от начала координат $x_0^* = x_0 / a$ и приведённого раскрытия разреза $V_*(x) = V(x) / a$ в зависимости от изменения коэффициента Пуассона, когда $\vartheta_0 = 0$ и $P_0 / aE = 0,1$. Результаты вычислений показывают, что касательные контактные напряжения практически не зависят от коэффициента Пуассона. В то же время, при увеличении коэффициента Пуассона нормальные контактные напряжения и максимальное раскрытие разреза уменьшаются (фиг.2-3), а точка приложения нагрузки, исключая поворот включения, приближается к центру включения (табл. 1).



Фиг.2



Фиг.3

Таблица 1

σ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
x_0^*	0,5204	0,5155	0,5106	0,5059	0,5019	0,5

Нельзя не отметить также, что нормальные контактные напряжения в концевой точке включения $x = a$ оказываются ограниченными (фиг.2), в чём легко убедиться аналитически. Действительно, нетрудно проверить, что

$$\lim_{x \rightarrow a} a \sigma_y^{\pm}(x, 0) / P_0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a \sqrt{2} Q_2(x)}{4\pi \sqrt{\omega(x)(a^2 - x^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} (2\gamma \operatorname{ch}(\pi\gamma/2) - \operatorname{sh}(\pi\gamma/2)). \quad (3.12)$$

Следовательно, в случае горизонтальной нагрузки нормальные контактные напряжения в концевой точке включения $x = a$ ограничены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и её приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. // ПММ. 1962. Т.26. Вып. 5. С.907-912.
2. Морарь Г.А. Метод разрывных решений в механике деформируемых тел. Кишинев: Штиинца, 1990. 130с.
3. Попов Г.Я. Избранные труды. Изд. типография «ВМВ», 2007. Т.1. 440с.
4. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995. 351с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415с.
6. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю. А., Маричев О.И. Интегралы и ряды (элементарные функции). М.: Наука, 1981. 800с.
8. Акопян В.Н., Симонян А.Р. Смешанная задача для ортотропной плоскости с трещиной //В сб. трудов II-ой Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2010. Т.1. С.66-70.
9. Бережницкий Л.Т., Стащук Н.Г. Коэффициенты интенсивности напряжений возле трещины на продолжении линейного жёсткого включения //Докл. УССР. 1981. № 11. Сер.А. С.49-53.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович,

Доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН Армении
 Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б,
 Тел: (+374 10) 52-48-90, E-mail: vhakobyan@sci.am

Симонян Артур Рафикович,

соискатель Института механики НАН Армении
 Тел.: (093) 195-193; E-mail: sim-ar@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.04.2011