

УДК 539.3

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ  
МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНОМ, ИДЕАЛЬНО  
ПРОВОДЯЩЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ  
МАНУКЯН В.Ф.**

**Ключевые слова:** поверхностная волна, полупространство, трехмерные, магнитное поле, дисперсия.

**Keywords:** surface wave, semi-space, three dimensional, magnetic field, dispersion.

**Մանուկյան Վ. Ֆ.**

**Շռայափ մակերևութային մագնիսառաձգական ալիքների տարածումը իզոտրոպ և իդեալական հաղորդիչ կիսատարածությունում**

Շռայափ դրվածքով դիտարկվում է մագնիսառաձգական մակերևութային ալիքների տարածումը կիսատարածությունում, երբ վերջինիս եզրը ազատ է լարումներից: Կիսատարածության նյութը համարվում է իզոտրոպ և իդեալական հաղորդիչ: Ցույց է տրվում, որ այդ դեպքում մակերևութային ալիքը, ի տարբերություն Ռեյլեյի ալիքի, ունի դիսպերսիայի հատկություն:

**Manukyan V. F.**

**The propagation of the three dimensional surface magnetoelastic wave in isotropic ideal conducting semi-space**

The three dimensional problem of the propagation of the magnetoelastic waves along the free boundary of semi-space is considered. The problem for the model of the isotropic ideal conducting material is investigated.

Рассматривается трехмерная задача распространения магнитоупругих волн вдоль границы полупространства, свободного от напряжений. Задача исследуется для модели изотропного идеально проводящего материала. Установлено, что в этом случае поверхностная волна, в отличие от волн Рэлея для изотропных сред, обладает свойством дисперсии.

Исследованию распространения магнитоупругих поверхностных волн (ПВ) посвящен ряд работ, обзор которых приведен в [1,2]. В этих работах, в основном, рассматривались плоские и антиплоские деформации (двухмерные волны). В статье [3] рассмотрены трехмерные задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропном полупространстве. В работе [4] исследованы трехмерные задачи распространения ПВ в анизотропных средах. В настоящей работе рассматриваются магнитоупругие пространственные ПВ в полубесконечной идеально проводящей изотропной среде.

1. В прямоугольной декартовой системе координат  $(x, y, z)$  идеально проводящее полупространство занимает область:  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-\infty < z < +\infty$ ,  $0 \leq y < +\infty$ . Система уравнений, определяющая волновые процессы в этой среде, имеет вид:

$$\begin{aligned} c_t^2 \Delta u + (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{f_x}{\rho} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ c_t^2 \Delta w + (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{f_z}{\rho} &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$c_t^2 \Delta v + (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{f_y}{\rho} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Здесь  $u, v, w$  – проекции вектора перемещения  $\vec{u}$  на оси координат  $x, y, z$ , соответственно,  $\rho$  – плотность материала среды,  $f_x, f_y, f_z$  – проекции вектора объемной силы  $\vec{f}$ ;  $c_l$  и  $c_t$  – скорости распространения продольной и поперечной волн, соответственно.

Для идеального проводника выражение для объемной пондеромоторной силы имеет вид [1,2]:

$$\vec{f} = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \text{rotrot}(\vec{u} \times \vec{H}_0) \right] \times \vec{H}_0, \quad (1.2)$$

где  $\vec{H}_0$  – вектор магнитной индукции в начальном невозмущенном состоянии,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды. Пусть среда в невозмущенном состоянии находится в постоянном магнитном поле:

$$\vec{H}_0 = H_0 \hat{i}. \quad (1.3)$$

В таком случае, учитывая (1.2) и (1.3), для компонент объемной силы получаем:

$$f_x = 0, \quad f_y = \frac{\mu H_0^2}{4\pi} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right), \quad f_z = \frac{\mu H_0^2}{4\pi} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \quad (1.4)$$

Подстановка (1.4) в (1.1) приводит к следующим уравнениям движения:

$$\begin{aligned} \theta \Delta u + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \theta \Delta w + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \chi \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right) &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \theta \Delta v + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \chi \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\text{где } \theta = \frac{c_t^2}{c_l^2}, \quad \chi = \frac{H_0^2 \mu}{4\pi \rho c_l^2}.$$

Рассмотрим трехмерные волны с амплитудой, затухающей в направлении оси  $y$ :

$$u = A e^{-kvy} \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z), \quad v = B e^{-kvy} \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z) \quad (1.6)$$

$$w = C e^{-kvy} \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z)$$

где  $k_1, k_3$  – волновые числа,  $k = \sqrt{k_1^2 + k_3^2}$ .

Подставляя (1.6) в уравнения (1.5), получим однородную систему уравнений для  $A, B, C$ . Система будет иметь ненулевые решения, если его определитель равен нулю. Это дает

$$\begin{aligned} & \left[ \theta(1 - \eta - v^2) + \chi(1 - \xi^2) \right], \\ & \left[ \theta(1 - \eta - v^2)(1 - \theta\eta - v^2) + \chi(1 - v^2)(1 - \xi^2 - \theta(\eta + v^2 - \xi^2)) \right] 0 = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $\eta$  – безразмерный параметр скорости распространения поверхностной волны:

$$\eta = \omega^2 c_t^{-2} k^{-2}, \quad \xi = k_3 k^{-1}.$$

Для поверхностных волн мы должны рассмотреть только случай положительных корней  $v_1, v_2, v_3$ . Решение (1.6) теперь можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^3 \alpha_k A_k \exp(-k v_k y) \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z), \\ v &= \sum_{k=1}^3 \beta_k A_k \exp(-k v_k y) \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z), \\ w &= \sum_{k=1}^3 \gamma_k A_k \exp(-k v_k y) \exp i(\omega t - k_1 x - k_3 z). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $v_k$  – коэффициенты затухания

$$v_1 = \sqrt{1 - \eta + \chi \theta^{-1} (1 - \xi^2)}, \quad v_k = \sqrt{\frac{a - (-1)^k \sqrt{b}}{2\theta(1 + \chi)}}, \quad (k = 2, 3), \quad (1.9)$$

$$a = \theta(2 - \eta(1 + \theta)) + \chi(1 + \theta - \xi^2 + \theta\xi^2 - \theta\eta),$$

$$b = (1 - \theta)^2 (1 - \xi^2)^2 \chi^2 + \eta^2 \theta^2 (1 - \theta + \chi)^2 - 2\eta\theta\chi(1 - \theta)(1 - \xi^2)(1 - \theta + \chi),$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = -\frac{i\xi}{v_1}, \quad \gamma_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = \frac{i(1 - \theta)v_2 \sqrt{1 - \xi^2}}{\theta - \theta\eta - v_2^2 + \chi(1 - v_2^2) + (1 - \theta)\xi^2}$$

$$\gamma_2 = -\frac{(1 - \theta)\xi \sqrt{1 - \xi^2}}{\theta - \theta\eta - v_2^2 + \chi(1 - v_2^2) + (1 - \theta)\xi^2}, \quad \beta_3 = 1, \quad (1.10)$$

$$\alpha_3 = -\frac{i(1 - \theta)v_3 \sqrt{1 - \xi^2} [\theta(1 - \eta - v_3^2) + \chi(1 - \xi^2)]}{[\chi + \theta(1 - \eta - v_3^2)] [\theta(\eta + v_3^2) - 1] + \chi(1 - \theta)\xi^2},$$

$$\gamma_3 = -\frac{i\xi v_3 [\theta(1 - \eta - v_3^2)(1 - \theta) + \chi(1 - \xi^2 - \theta(\eta + v_3^2 - \xi^2))]}{[\chi + \theta(1 - \eta - v_3^2)] [\theta(\eta + v_3^2) - 1] + \chi(1 - \theta)\xi^2}.$$

В частном случае, при отсутствии магнитного поля ( $\chi = 0$ ) из (1.6) получаем перемещения пространственной задачи, которые приводятся в [3].

2. Предполагая, что плоскость свободна от напряжений, имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_{2i} + t_{2i} = t_{2i}^{(e)}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.1)$$

где  $\sigma_{ki}$  – компоненты тензора напряжения,  $t_{ki}$  и  $t_{ki}^{(e)}$  – возмущения компонент тензоров Максвелла в среде и в вакууме, соответственно. Принимая допущение  $t_{ki}^{(e)} \ll t_{ki}$ , и в граничных условиях (2.1) не учитывая члены, связанные с напряжениями Максвелла в вакууме, внутренняя задача магнитоупругости полностью отделяется от внешней задачи. В этом случае для граничных условий получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + (1 + \theta^{-1}\chi) \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ (1 - 2\theta) \frac{\partial u}{\partial x} + (1 + \chi) \frac{\partial v}{\partial y} + (1 - 2\theta + \chi) \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подстановка (1.8) в (2.2) приводит к однородным алгебраическим уравнениям относительно  $A_1, A_2, A_3$ . Из условия нетривиальности решений этой системы получаем дисперсионное уравнение следующего вида:

$$R(\eta, \theta, \chi, \xi) \equiv \det[a_{ik}] = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{Здесь } a_{1k} = v_k \alpha_k + i\sqrt{1 - \xi^2} (1 + \chi\theta^{-1}) \beta_k$$

$$a_{2k} = i(1 - \theta)\sqrt{1 - \xi^2} \alpha_k + (1 + \chi)\beta_k v_k + i(1 - 2\theta + \chi)\xi\gamma_k, \quad a_{3k} = i\xi\beta_k + \gamma_k v_k,$$

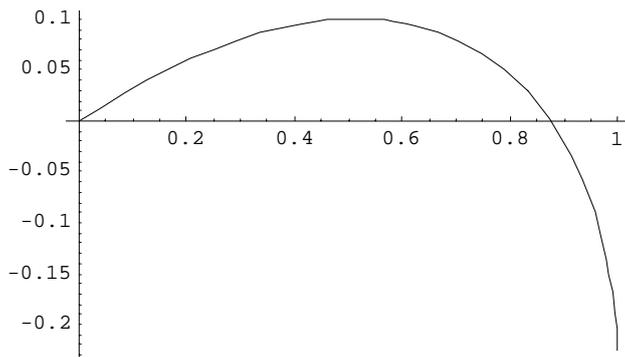
где  $v_k, \alpha_k, \beta_k$  и  $\gamma_k$  определяются по формулам (1.9) и (1.10).

При отсутствии магнитного поля уравнение (2.3) после ряда преобразований приводится к уравнению

$$(2 - \eta)^2 - 4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)} = 0, \quad (2.4)$$

которое совпадает с уравнением Рэлея для пространственной задачи [3]. Из (2.3) следует, что наличие магнитного поля приводит к появлению дисперсии. Решая (2.3), можно найти параметр фазовой скорости  $\eta$  и исследовать влияние магнитного поля на поверхностную волну.

В заключение для количественной оценки влияния магнитного поля рассмотрим числовой пример. Для расчета примем  $H_0 = 1.2 \cdot 10^5$  э,  $\mu = 1$ . В этом случае для разных материалов при любом значении  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) можно построить графики



Фиг. 1. График функции  $R(\eta, 0.5)$  для материала Al (Алюминий)

функций Рэлея  $R(\eta)$ .

Следует отметить, что рассматриваемые графики качественно не отличаются. С этой целью приведём один из них (фиг.1). Фиг.1 показывает, что график функции  $R(\eta, 0.5)$ , начиная с нуля, возрастает, но с некоторого значения  $\eta$  уменьшается и пересекается с осью  $\eta = 0$  в единственной точке. Из этого следует, что дисперсионное уравнение в интервале затухания имеет

единственное решение.

В табл. 1 приводятся корни уравнения  $R(\eta, \xi) = 0$  для материалов Al (алюминий) и Cu (медь).

Таблица 1

Al (алюминий)			Cu (медь)	
$\xi(k_3/k)$	$\eta$	Усл. затухания	$\eta$	Усл. затухания
0	0.875236	(0, 1.00448)	0.876212	(0, 1.00251)
0.2	0.875092	(0, 1.0043)	0.87613	(0, 1.00241)
0.4	0.87466	(0, 1.00376)	0.875885	(0, 1.00211)
0.6	0.87394	(0, 1.00287)	0.875479	(0, 1.00161)
0.8	0.872932	(0, 1.00161)	0.874908	(0, 1.0009)
1	0.871638	(0, 1)	0.874176	(0, 1)

Из табл.1 видно, что с возрастанием  $\xi$  безразмерный параметр  $\eta$  уменьшается, что означает увеличение степени локализации поверхностной волны. Следует отметить, что в некоторых случаях учет естественной анизотропии тоже приводит к подобному результату [4].

В табл. 2 на основе численного анализа приведены зависимости скорости волны от величины напряжённости магнитного поля при различных  $\xi$ .

Таблица 2

Cu (медь).			
$H_0 \times 10^5 \text{ э}$	$\xi = 0$	$\xi = 0.5$	$\xi = 1$
0	0.874145	0.874145	0.874145
0.2	0.874202	0.874188	0.874145
0.4	0.874376	0.874319	0.874148
0.6	0.874661	0.874533	0.874152
0.8	0.875062	0.874837	0.874158
1	0.875578	0.875225	0.874166
1.2	0.876212	0.875702	0.874176
1.4	0.876959	0.876265	0.874187

Табл.2 показывает, что с увеличением напряжённости магнитного поля безразмерный параметр фазовой скорости возрастает, причем это явление усиливается с уменьшением  $\xi$ . Таким образом, поперечное магнитное поле ( $\xi = 1$ ) имеет гораздо меньшее влияние на фазовую скорость, чем продольное поле ( $\xi = 0$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд.ЕГУ, 2006. 492 с.
2. Белубекян М.В. Введение в теорию магнитоупругости. Ереван: Изд.ЕГУ, 1997. 104 с.
3. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трехмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея. //Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. № 4. С.362-368.
4. Мгерян Д.Э. Исследование упругой поверхностной волны в анизотропном полупространстве в трехмерной постановке.// Канд. дисс., Ереван: 2008.108 с.

#### **Сведения об авторе:**

**Манукян Вардан Францевич** – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры физики ГПИ, (374 93) 46 49 03, E-mail: [mvardan\\_1972@mail.ru](mailto:mvardan_1972@mail.ru)

Поступила в редакцию 08.02.2010