

УДК 539.3:534.1

**КОЛЕБАНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ОРТОТРОПНОЙ
УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ
СО СВОБОДНЫМ ТОРЦОМ И ТРЕМЯ ЖЁСТКО ЗАЩЕMLЁННЫМИ
КРАЯМИ**

ГУЛГАЗАРЯН Г.Р., ХАЧАНЫАН А.А.

Ключевые слова: колебания, безмоментная, классическая, цилиндрическая, непрерывный спектр, характеристики.

Keywords: vibrations, unmoment, classical, cylindrical, continuous spectrum, characteristics.

Ղուղազարյան Գ.Ր., Խաչանյան Ա.Ա.

**Ազատ ծայրով և մնացած եզրերով կոշտ ամրակցված, փոփոխական կորության բաց անմոմենտ
օրթոտրոպ առաձգական զլանային թաղանթի տատանումները**

Հետազոտվում է ազատ ծայրով և մնացած եզրերով կոշտ ամրակցված, փոփոխական կորության բաց անմոմենտ օրթոտրոպ առաձգական զլանային թաղանթի սեփական տատանումները: Ենթադրվում է, որ ձնիչներն ուղղահայաց են ծայրերին և ծոման կոշտությունը հավասար է զրոյի (անմոմենտ թաղանթ): Մեփական հաճախությունների անչափ բնութագրիչների որոշման համար արտաձված են դիսպերսիոն հավասարումներ: Պարաբոլական տեսքի տարբեր ուղղորդ կորերով և տարբեր երկարություններով զլանային թաղանթների համար կատարված են թվային հաշվարկներ:

Ghulghazaryan G.R., Khachanyan A.A.

Vibrations of an Elastic Orthotropic Unmoment Open Cylindrical Shell with Variable Curvature and Free End, when Other Edges are Rigid-Clamped

The problem of existence of free vibrations of an elastic orthotropic open cylindrical shell (with arbitrary directional curve) with free end, when other edges are rigid – clamped is studied. The investigation is carried out for elastic orthotropic shell when bending rigidity is vanishingly small (the moment free shell). The dispersion equations for finding the natural frequencies of vibrations are derived. The calculations were carried out for the shells with directing curve in form of a parabola with different values of curvature and lengths.

Исследуются собственные колебания незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки с переменной кривизной, со свободным торцом и тремя жёстко зашцеMLёнными краями. Предполагается, что образующие ортогональны к краям оболочки и её жёсткость на изгиб равна нулю (безмоментная оболочка). Найдены дисперсионные уравнения для нахождения характеристики собственных частот колебаний. Конкретные вычисления выполнены для оболочек с направляющими в виде параболы с различной величиной кривизны и длины образующей.

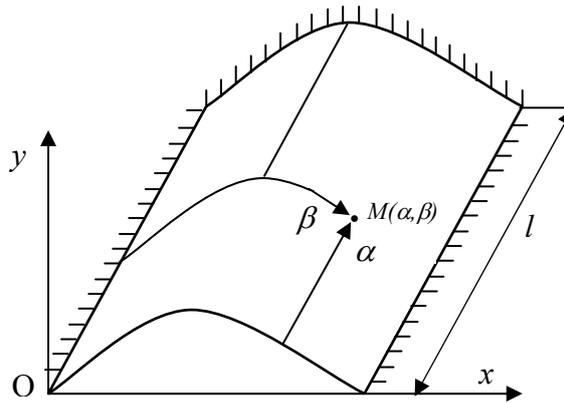
Введение. Исследование собственных колебаний оболочек занимает важное место в динамике деформируемого твёрдого тела. Это обусловлено как потребностями самой теории, так и практическими запросами различных отраслей машиностроения, строительства, приборостроения и т.д. Впервые свободные колебания цилиндрической оболочки со свободным торцом исследованы в [1], где понятие волны Рэлея обобщено к волнам, локализованным у свободного края безмоментной полубесконечной круговой замкнутой цилиндрической оболочки. Особый интерес представляют задачи, связанные с цилиндрическими оболочками переменной кривизны. Для решения таких задач применяются различные аналитические и численные методы [2-7]. Для цилиндрических оболочек со свободным краем первые частоты распределены очень густо [8-11]. Поэтому численный расчет не всегда эффективен. Эти трудности преодолеваются с помощью комбинирования аналитической и асимптотической теорий, а также численными методами. В настоящей работе исследуются собственные колебания безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки переменной кривизны, со свободным торцом и тремя жестко зашцеMLёнными краями. Находятся дисперсионные уравнения и устанавливается асимптотическая связь меж-

ду дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для круговой незамкнутой ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки и ортотропной прямоугольной пластинки соответственно. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки со свободным торцом, когда образующие жестко защемлены. Задача не допускает разделения переменных. Для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм применяется метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича–Власова [12-15]. В качестве базисных функций используются следующие функции:

$$w_m(\beta) = 1 - \cos km\beta, \quad k = 2\pi/s, \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (1)$$

В дальнейшем под s для пластинки подразумевается ширина пластинки, а для цилиндрической оболочки – длина направляющей кривой поверхности. Заметим, что $w_m(0) = w_m(s) = 0, \quad w'_m(0) = w'_m(s) = 0$.

1. Постановка задачи и некоторые математические особенности. Рассматриваются собственные колебания незамкнутой ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями. На поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты



Фиг. 1.

наты (α, β) , где $\alpha (0 \leq \alpha \leq l)$ и $\beta (0 \leq \beta \leq s)$ являются соответственно текущей длиной образующей и текущей длиной дуги направляющей кривой (фиг. 1). l – длина цилиндрической оболочки, а s – длина направляющей кривой. Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой поверхности можно представить в виде $R^{-2} = k^2(r_0/2 + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta)$, $k = 2\pi/s, 0 \leq \beta \leq s, \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| < +\infty$. (1.1)

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанные в выбранных криволинейных координатах α, β [16]

$$\begin{aligned} -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + B_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_3}{R} \right) &= \lambda u_1, \\ -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_3}{R} \right) &= \lambda u_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$-\frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 = \lambda u_3.$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора смещений, соответственно в направлениях α, β и нормали к поверхности оболочки, B_{ik} – коэффициенты упругости, $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$ – кривизна направляющей кривой поверхности. $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – частота собственных колебаний, ρ – плотность материала.

Граничные условия имеют вид [16]:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (1.3)$$

$$u_1|_{\alpha=l} = u_2|_{\alpha=l} = 0, \quad (1.4)$$

$$u_1|_{\beta=0,s} = u_2|_{\beta=0,s} = 0, \quad (1.5)$$

где соотношения (1.3) являются условиями свободного края при $\alpha=0$, а соотношения (1.4), (1.5) – условиями жесткого заземления при $\alpha=l, \beta=0, \beta=s$ соответственно. Для пары вектор-функций $f^{(j)}(\alpha, \beta) = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$, $j=1,2$ введем скалярное произведение по формуле

$$(f^{(1)}, f^{(2)}) = \int_0^l \int_0^s \sum_{j=1}^3 u_j^{(1)} \bar{u}_j^{(2)} d\beta d\alpha. \quad (1.6)$$

Гильбертово пространство вектор-функций со скалярным произведением (1.6) обозначим через $L_2(G)$, где $G = [0, l] \times [0, s]$. Норму в $L_2(G)$, как обычно, вводим по формуле $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Задача (1.2)-(1.5) является самосопряженной и имеет неотрицательный дискретный спектр (ср. с [9], стр. 84, [17]). Соответствующий оператор обозначим через $L_0^{(ск)}$. Спектр оператора $L_0^{(ск)}$ не является чисто дискретным. Оказывается, что при любых самосопряженных граничных условиях операторы, порожденные системой уравнений (1.2), имеют участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком $[0, \lambda_0]$ – множеством значений функции

$$\Omega(\beta, \theta) = \frac{B_{66}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)R^{-2}(\beta) \sin^4 \theta}{B_{66}(B_{11} \sin^4 \theta + B_{22} \cos^4 \theta) + (B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \quad (1.7)$$

$$0 \leq \beta \leq s, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Отметим, что появление этого участка непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (1.2) по Дуглису – Ниренбергу. Как известно, эллиптичности системы недостаточно для того, чтобы задача Дирихле была корректно поставлена даже в случае однородных систем. Для существования нетривиального решения задачи (1.2)-(1.5) следует дополнительно потребовать выполнение вдоль границы некоторого условия алгебраического характера. Это условие называется условием дополненности (условия Шапиро–Лопатинского) [18]. Отметим, что для задачи (1.2)-(1.5) условие Шапиро–Лопатинского эквивалентно условию (ср. с [8]; [9], с. 97; [11])

$$Q(\lambda, \beta) = B_{66}(\lambda - B_{22}R^{-2}(\beta)) + \sqrt{B_{22}\lambda(B_{11}\lambda - (B_{11}B_{22} - B_{12}^2)R^{-2}(\beta))} \neq 0, \quad (1.8)$$

$$0 \leq \beta \leq s$$

Множество значений λ , при которых нарушается условие (1.8), т.е. $Q(\lambda, \beta) = 0$, $0 \leq \beta \leq s$,

обозначим через Ω_γ . Вне множества $[0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$ для оператора $L_0^{(ck)}$ выполняется условие дополнителности (1.8) [8], [11].

Справедливо следующее утверждение: *вне множества $[0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$ спектр оператора $L_0^{(ck)}$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности.*

Это утверждение следует из следующего общего утверждения [8].

Теорема. Для того, чтобы точка λ принадлежала непрерывному спектру оператора $L_0^{(ck)}$, необходимо и достаточно, чтобы при этом λ нарушалось условие эллиптичности в смысле Дуглиса–Ниренберга краевой задачи (1.2)–(1.5), иначе говоря, нарушалось условие эллиптичности системы (1.2) или условие Шапиро–Лопатинского краевой задачи (1.2)–(1.5).

Заметим, что оператор $L_0^{(ck)}$ имеет сколь угодно большие положительные собственные значения. Это следует из его неотрицательности и неограниченности.

2. Вывод и анализ дисперсионного уравнения оператора $L_0^{(ck)}$. Решение системы (1.2), удовлетворяющее условиям (1.5), ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \exp(k\chi\alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin km\beta \right), \quad u_2 = \exp(k\chi\alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m (1 - \cos km\beta) \right), \\ w &= k \exp(k\chi\alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin km\beta \right), \quad w = u_3 / R. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь u_m, v_m, w_m – неопределенные коэффициенты, χ – неопределенный коэффициент затухания. Подставим выражения (2.1) в систему (1.2). Полученные первые два уравнения умножаем на $\sin km\beta$, $\cos km\beta$ соответственно и интегрируем в пределах от 0 до s . В итоге получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (B_{11}\chi^2 - B_{66}m^2 + \lambda/k^2)u_m + (B_{12} + B_{66})\chi m v_m = B_{12}\chi w_m, \\ (B_{12} + B_{66})\chi m u_m - (B_{66}\chi^2 - B_{22}m^2 + \lambda/k^2)v_m = B_{22}m w_m, \end{cases} \quad (2.2)$$

откуда получаем соотношения:

$$c_m u_m = \chi a_m w_m, \quad c_m v_m = -m b_m w_m, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{B_{12}}{B_{11}}\chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta^2, \quad \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2 B_{66}}, \\ b_m &= \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}\chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta^2, \\ c_m &= \chi^4 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}m^2\chi^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}}\eta^2\chi^2 + (m^2 - \eta^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2 \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обе части третьего уравнения системы (1.2) умножим на R^{-1} и подставим (2.1) в него. Учитывая представление (1.1), соотношения (2.3), правило умножения тригонометрических рядов ([20], стр. 592), затем, умножая обе части полученного уравнения на $\sin km\beta$ и интегрируя в пределах от 0 до s , придём к бесконечной системе уравнений:

$$\left((r_0 - r_{2m})A_m - 2\frac{B_{66}}{B_{22}}\eta^2 \right) w_m + \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} (r_{|n-m|} - r_{n+m})A_n w_n = 0, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (2.5)$$

$$A_n = p_n/c_n, \quad p_n = c_n + n^2 b_n - B_{12}/B_{22} \chi^2 a_n, \quad n = \overline{1, +\infty}. \quad (2.6)$$

Так как в области определения A_n имеем $A_n = O(1/n^2)$, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$. Учитывая также представление (1.1), получим

$$\sum_{n, m=1}^{\infty} |A_n| (|r_{n+m}| + |r_{|n-m|}|) \leq 3 \left(|r_0|/2 + \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \right) < +\infty. \quad (2.7)$$

Следовательно, бесконечный определитель системы (2.5) при $\lambda \notin [0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$ и χ в области определения коэффициентов (2.6) относится к известному классу сходящихся определителей – к нормальным определителям [19]. Чтобы система (2.5) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы её определитель равнялся нулю:

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = 0. \quad (2.8)$$

Предположим, что χ_1, χ_2 – различные корни уравнения (2.8) с неположительными действительными частями, тогда $\chi_3 = -\chi_1$ и $\chi_4 = -\chi_2$ также являются различными корнями уравнения (2.8). Пусть $(w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \dots, w_m^{(j)}, \dots)$, $j = \overline{1, 4}$ являются нетривиальными решениями системы (2.5) при $\chi_j, j = \overline{1, 4}$ соответственно. Представим решение задачи (1.2)-(1.5) в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^4 u_i^{(j)}, \quad i = 1, 2, \quad w = \sum_{j=1}^4 w^{(j)}, \quad (2.9)$$

где $u_i^{(j)}, w^{(j)}$, $i = 1, 2, j = \overline{1, 4}$ – решения системы (1.2), имеющие вид (2.1) при $\chi = \chi_j$. Подставим (2.9) в граничные условия (1.3), (1.4). В полученные первые уравнения из (1.3) и (1.4) умножаем на $\sin km\beta$, а вторые уравнения на $\cos km\beta$, затем интегрируя в пределах от 0 до s , получим совокупность систем уравнений:

$$\sum_{j=1}^4 \frac{R_{1j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{\chi_j R_{2j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_m^{(j)} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.10)$$

$$\sum_{j=1}^4 \frac{\chi_j a_m^{(j)}}{c_m^{(j)}} \exp(z_j) w_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{b_m^{(j)}}{c_m^{(j)}} \exp(z_j) w_m^{(j)} = 0$$

$$R_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} m^2 b_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)}, \quad R_{2j}^{(m)} = (a_m^{(j)} + b_m^{(j)}), \quad z_j = k\chi_j l, \quad (2.11)$$

а $a_m^{(j)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)}$ – значения a_m, b_m, c_m из (2.4) при $\chi = \chi_j$ соответственно. Чтобы совокупность систем уравнений (2.10) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы совокупность уравнений

$$\text{Det} \begin{vmatrix} R_{11}^{(m)} & R_{12}^{(m)} & R_{11}^{(m)} \exp(z_1) & R_{12}^{(m)} \exp(z_2) \\ \chi_1 R_{21}^{(m)} & \chi_1 R_{21}^{(m)} & -\chi_1 R_{21}^{(m)} \exp(z_1) & -\chi_1 R_{21}^{(m)} \exp(z_2) \\ \chi_1 a_m^{(1)} \exp(z_1) & \chi_2 a_m^{(2)} \exp(z_2) & -\chi_1 a_m^{(1)} & -\chi_2 a_m^{(2)} \\ b_m^{(1)} \exp(z_1) & b_m^{(2)} \exp(z_2) & b_m^{(1)} & b_m^{(2)} \end{vmatrix} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.12)$$

вне множества $[0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$ имела λ -решение. Уравнения (2.12) эквивалентны уравнениям:

$$(x_2 - x_1)^2 K_{2m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) Q_{2m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) + 4x_1 x_2 R(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) \exp(z_1 + z_2) - \quad (2.13)$$

$$-(x_1 + x_2)^2 K_{5m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) Q_{5m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) = 0, \quad m = \overline{1, \infty}.$$

$$K_{im}(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + (-1)^i \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4, \quad i = 2, 5,$$

$$Q_{im}(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \gamma_1 x_1^2 x_2^2 + (-1)^i \gamma_2 x_1 x_2 + \gamma_3 (x_1^2 + x_2^2) + \gamma_4, \quad i = 2, 5,$$

$$R(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \bar{R}_{12}^{(m)} \bar{R}_{22}^{(m)} \bar{a}_m^{(1)} \bar{b}_m^{(1)} + \bar{R}_{11}^{(m)} \bar{R}_{21}^{(m)} \bar{a}_m^{(2)} \bar{b}_m^{(2)},$$

$$\delta_1 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right), \quad \eta_m = \frac{\eta}{m},$$

$$\delta_2 = -\eta_m^2 \left(\frac{B_{22}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} + \frac{B_{12}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{22} B_{66} - B_{12} B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^2 \right),$$

$$\delta_3 = \frac{B_{12}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} \eta_m^2 (1 - \eta_m^2), \quad \delta_4 = \frac{B_{12} B_{66} (B_{12} + B_{22})}{B_{11}^3} \eta_m^4 (1 - \eta_m^2),$$

$$\gamma_1 = \frac{B_{12}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66})}{B_{11}^2 B_{66}}, \quad x_j = \frac{\chi_j}{m}, \quad j = 1, 2, \quad (2.14)$$

$$\gamma_2 = - \left(\frac{B_{22}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^2 B_{66}} + \frac{B_{12}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{22} B_{66} - B_{12} B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^2 \right),$$

$$\gamma_3 = - \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11}^2} (1 - \eta_m^2), \quad \gamma_4 = - \frac{B_{22}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right).$$

$$\bar{R}_{1j}^{(m)} = \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 \right) x_j^2 + \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} (1 - \eta_m^2) \eta_m^2,$$

$$\bar{b}_m^{(j)} = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} x_j^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2),$$

$$\bar{R}_{2j}^{(m)} = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} x_j^2 + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}} \eta_m^2, \quad \bar{a}_m^{(j)} = \frac{B_{12}}{B_{11}} x_j^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2, \quad j = 1, 2.$$

Численный анализ показывает, что левые части равенств (2.13) становятся малыми величинами, когда любые два корня уравнения (2.8) становятся близкими друг к другу. Это усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, множитель $(x_2 - x_1)^2$, стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить. Выполняя элементарные действия над столбцами определителя из (2.12), уравнения (2.12) или (2.13) приводятся к эквивалентному виду

$$K_{2m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) Q_{2m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) + \quad (2.15)$$

$$+ 4(m_{11}m_{21}m_{32}m_{42} + m_{12}m_{22}m_{31}m_{41}) \exp(z_1 + z_2) - 4m_{11}m_{21}m_{41}m_{31}[z_1z_2]^2 -$$

$$- 2[m_{11}m_{21}(m_{31}m_{42} + m_{32}m_{41}) + m_{31}m_{41}(m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21})][z_1z_2](\exp(z_2) - \exp(z_1)) -$$

$$- (m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21})(m_{31}m_{42} + m_{32}m_{41})(\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty},$$

$$m_{11} = \overline{R_{11}^{(m)}}, \quad m_{12} = \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_m^2 \right) (x_1 + x_2),$$

$$m_{21} = x_1 \overline{R_{21}^{(m)}}, \quad m_{22} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} (x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) + \frac{B_{12} + B_{22}}{B_{11}} \eta_m^2,$$

$$m_{31} = x_1 \overline{a_m^{(1)}}, \quad m_{32} = \frac{B_{12}}{B_{11}} (x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) + \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2, \quad (2.16)$$

$$m_{41} = \overline{b_m^{(1)}}, \quad m_{42} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} (x_1 + x_2).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение: *если $R^{-2}(\beta)$ можно представить в виде (1.1) и $\lambda \notin [0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$, то уравнения (2.13) и (2.15) являются дисперсионными уравнениями оператора $L_0^{(ck)}$, где $\alpha_2 = mx_2$ и $\alpha_2 = mx_2$ – различные корни уравнения (2.8) с неположительными действительными частями.*

Заметим, что если $\chi_1 = mx_1$ и $\chi_2 = mx_2$ имеют отрицательные действительные части, то при $ml \rightarrow \infty$ уравнения (2.13) и (2.16) преобразуются к уравнениям:

$$K_{2m}(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.17)$$

$$Q_{2m}(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \gamma_1 x_1^2 x_2^2 + \gamma_2 x_1 x_2 + \gamma_3 (x_1^2 + x_2^2) + \gamma_4 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.18)$$

Уравнения (2.17) являются дисперсионными уравнениями для полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом, когда граничные образующие жёстко защемлены (ср. с [11]). Уравнения (2.18) соответствуют тому, что другой торец цилиндрической оболочки жёстко защёмлён.

3. Частные случаи. В общем случае решение уравнения (2.8) представляет собой сложную задачу. Поэтому рассмотрим следующие частные случаи.

Случай а) $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$ ($r_m = 0, m = \overline{1, +\infty}$), т.е. имеем безмоментную круговую ортотропную цилиндрическую оболочку открытого профиля со свободным торцом и тремя защёмлёнными краями. В этом случае система (2.5) принимает вид

$$\left((r_0 - r_{2m}) A_m - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 \right) w_m = 0, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (3.1)$$

следовательно, уравнение (2.8) распадается на совокупность уравнений

$$r_{mm} = r_0 p_m - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 c_m = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.2)$$

или уравнений

$$\left(\eta^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2} \right) \chi^4 - \eta^2 \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} m^2 - \frac{(B_{11} + B_{66})}{B_{11}} \eta^2 + \right.$$

$$+ \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 + B_{66}B_{22}r_0}{B_{11}B_{66}} \frac{r_0}{2} \chi^2 + \eta^2(m^2 - \eta^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 + \frac{B_{22}r_0}{B_{11}2} \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.3)$$

Пусть $\lambda \notin [0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$ и χ_1, χ_2 являются корнями уравнения (3.3) с неположительными действительными частями. Так как уравнения (3.3) биквадратны, то однозначно определяются выражения $\chi_1^2 \chi_2^2, \chi_1^2 + \chi_2^2$. Подставляя эти выражения в (2.13), придём к дисперсионным уравнениям для безмоментной ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом и тремя защемлёнными краями.

$$(x_2 - x_1)^2 K_{2m}(\eta_m^2, r_0) Q_{2m}(\eta_m^2, r_0) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) - \\ - 4x_1 x_2 R(\eta_m^2, r_0) \exp(z_1 + z_2) - (x_2 + x_1)^2 K_{5m}(\eta_m^2, r_0) Q_{5m}(\eta_m^2, r_0) \times \\ \times (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) = 0, \quad m = \overline{1, \infty} \quad (3.4)$$

$$K_{im}(\eta_m^2, r_0) = (1 - \eta_m^2) \left[(1 + \varepsilon_m) \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right] + (-1)^{i-1} x_1 x_2 \left(\eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \varepsilon_m \right), \quad i = 2, 5, \\ Q_{im}(\eta_m^2, r_0) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m \right) + (-1)^i x_1 x_2 \left(\eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \varepsilon_m \right), \quad i = 2, 5; \\ R(\eta_m^2, r_0) = 2(1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m \right) \left[\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} (1 + \varepsilon_m) - \frac{B_{11} + B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right], \quad \varepsilon_m = \frac{r_0}{2m^2}. \quad (3.5)$$

Заметим, что если $\chi_1 = mx_1$ и $\chi_2 = mx_2$ имеют отрицательные действительные части, то при $l \rightarrow \infty$ уравнения (3.4) преобразуются к уравнениям:

$$K_{2m}(\eta_m^2, r_0) = (1 - \eta_m^2) \left[(1 + \varepsilon_m) \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right] - x_1 x_2 \left(\eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \varepsilon_m \right) = 0, \quad (3.6)$$

$$Q_{2m}(\eta_m^2, r_0) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m \right) + x_1 x_2 \left(\eta_m^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \varepsilon_m \right) = 0, \quad (3.7) \\ m = \overline{1, +\infty}.$$

Уравнения (3.6) являются дисперсионными уравнениями безмоментной ортотропной полубесконечной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом и жестко защемленными граничными образующими.

Существует асимптотическая связь между уравнениями (3.7) и условием нарушения нормальной разрешимости задачи (1.2)-(1.5) (см. (1.8) и (1.9)).

Действительно, заметим, что уравнения (3.7) эквивалентны уравнениям

$$(1 - \frac{\eta^2}{m^2}) \left(\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 - \frac{B_{22}r_0}{B_{11}2} \right) + \\ + \eta \sqrt{\left(1 - \frac{\eta^2}{m^2} \right) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \left(1 + \frac{r_0}{2m^2} \right) - \frac{B_{66}}{B_{11}} \frac{\eta^2}{m^2} \right) \left(\eta^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 r_0}{B_{11}B_{66}2} \right)} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.8)$$

При $m \rightarrow \infty$ уравнения (3.8) преобразуются в уравнение

$$\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 - \frac{B_{22}r_0}{B_{11}2} + \sqrt{\frac{B_{22}}{B_{11}} \eta^2 \left(\eta^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 r_0}{B_{11}B_{66}2} \right)} = 0, \quad (3.9)$$

которое эквивалентно условию нарушения нормальной разрешимости задачи (1.2) – (1.5) при $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$. При $\varepsilon_m \rightarrow 0$ уравнения (3.3) преобразуются в уравнения

$$c_m = \chi^4 - \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} m^2 - \frac{(B_{11} + B_{66})}{B_{11}} \eta^2 \right) \chi^2 + (m^2 - \eta^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.10)$$

которые являются характеристическими уравнениями системы, моделирующей планарные колебания прямоугольной пластинки с одним свободным и тремя жестко заземленными сторонами. Уравнения (3.4) в этом случае преобразуются в уравнения

$$(x_2 - x_1)^2 K_{2m}(\eta_m^2) Q_{2m}(\eta_m^2) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) - 4x_1 x_2 R(\eta_m^2) \exp(z_1 + z_2) - (x_2 + x_1)^2 K_{5m}(\eta_m^2) Q_{5m}(\eta_m^2) \times (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) = 0, \quad m = \overline{1, \infty}; \quad (3.11)$$

$$K_{im}(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) + (-1)^{i-1} \eta_m^2 x_1 x_2, \quad i = 2, 5,$$

$$Q_{im}(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \frac{B_{66}}{B_{11}} + (-1)^i x_1 x_2 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad i = 2, 5, \quad (3.12)$$

$$R(\eta_m^2) = 2 \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{11} + B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right).$$

Здесь $\chi_1 = x_1 m$, $\chi_2 = x_2 m$ – корни уравнения (3.10) с неположительными действительными частями. Уравнения (3.11) являются дисперсионными уравнениями прямоугольной пластинки с одним свободным и тремя жестко заземленными сторонами.

Если $\chi_1 = mx_1$ и $\chi_2 = mx_2$ имеют отрицательные действительные части, то при $l \rightarrow \infty$ уравнения (3.11) распадаются на совокупность уравнений

$$K_{2m}(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 x_1 x_2 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.13)$$

$$Q_{2m}(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \frac{B_{66}}{B_{11}} + x_1 x_2 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (3.14)$$

Уравнения (3.13) являются уравнениями Рэлея для полубесконечной ортотропной пластинки–полосы со свободным торцом и жестко заземленными боковыми краями [11].

Случай б) $R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$ ($r_m = 0$, $m = \overline{2, +\infty}$). В этом случае система уравнений (2.5) принимает вид:

$$\{r_1 p_{m-1} \omega_{m-1} + r_{mm} \omega_m + r_1 p_{m+1} \omega_{m+1} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.15)$$

$$\omega_m = w_m / c_m, \quad r_{mm} = r_0 p_m - 2B_{66} \eta^2 c_m / B_{22}, \quad (3.16)$$

где p_m, c_m определяются формулами (2.6), (3.10). Так как определитель системы (3.15) также относится к нормальному типу, то для нахождения нетривиального решения приравняем к нулю её определитель

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1) = 0, \quad (3.17)$$

χ^2 -решение уравнения (3.17) вычисляется следующим образом. Возьмём усечённый определитель из D при конечном n и приравним к нулю:

$$D_n(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1) = 0. \quad (3.18)$$

Найдём χ_n -решений алгебраических уравнений (3.18). Точное решение уравнения (3.17) получится из χ_n при $n \rightarrow \infty$. Раскрывая определитель D_m по элементам последнего столбца или строки, получим следующую рекуррентную последовательность:

$$\begin{cases} D_1 = r_{11}, & D_2 = r_{22}D_1 - r_1^2 p_1 p_2 \\ D_m = r_{mm}D_{m-1} - r_1^2 p_{m-1} p_m D_{m-2} & m \geq 3 \end{cases} \quad (3.19)$$

Справедливо следующее утверждение [11]: при фиксированном $m \geq 2$ и при условии $\lambda \notin [0, \lambda_0] \cup \Omega_\gamma$ уравнения (3.17) имеют χ^2 -формальные решения вида

$$(\chi_j^{(i)})^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_{jm}^{(i)} r_1^4 + \dots, \quad i, j = 1, 2, \quad (3.20)$$

где $\chi_j^{(m)}$ – корни уравнения $r_{mm} = 0$ (или уравнения (3.3)) с неположительными действительными частями и

$$\alpha_j^{(m)} = \frac{p_m(p_{m-1}r_{m+1m+1} + p_{m+1}r_{m-1m-1})}{r_{m-1m-1}r_{m+1m+1}r'_{mm}} \Big|_{\chi=\chi_j^{(m)}}, \quad j = 1, 2. \quad (3.21)$$

Здесь r'_{mm} – производная по χ^2 . Таким образом, в этом случае для нахождения безразмерных характеристик коэффициентов затухания $k\chi_j^{(i)}$, $i, j = 1, 2$ можно использовать приближённые формулы

$$\chi_j^{(i)} \approx -\left((\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2\right)^{1/2}, \quad i, j = 1, 2, \quad (3.22)$$

а для нахождения характеристик собственных частот η/m -уравнения (2.13), (2.15).

Случай в) $R^{-2} = k^2 r_1 \cos k\beta$ ($r_0 = 0, r_m = 0, m = \overline{2, +\infty}$).

В этом случае все полученные формулы в данном пункте сохраняются, только всюду надо подставить $r_0 = 0$ (ср. с [21]). Существенные изменения приобретают r_{mm} и $\alpha_j^{(m)}$, $j = 1, 2$ в формулах (3.16), (3.21) соответственно:

$$r_{mm} = -2B_{66} / B_{22} \eta^2 c_m, \quad \alpha_j^{(m)} = \frac{p_m(p_{m-1}c_{m+1} + p_{m+1}c_{m-1})}{4(B_{66} / B_{22} \eta^2)^2 c_{m-1} c_{m+1} c'_m} \Big|_{\chi=\chi_j^{(m)}}, \quad j = 1, 2, \quad m = \overline{0, +\infty}. \quad (3.23)$$

В (3.23) $\chi_j^{(m)}$, $j = 1, 2$ – корни характеристического уравнения планарного колебания пластинки (3.10) с неположительными действительными частями.

В табл. 1–4, используя дисперсионные уравнения (2.15), (3.4), (3.11), приведены безразмерные характеристики собственных значений η/m и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм в зависимости от m, a, b для оболочек с направляющими

$$y = ba^{-2}(a^2 - x^2), \quad |x| \leq a; \quad a = 2, b = 1; \quad a = 2, b = 2. \quad (3.24)$$

В качестве коэффициентов затухания, приведены значения следующих величин:
 $k\chi_0 / m = \max \{k \operatorname{Re} \chi_1 / m, k \operatorname{Re} \chi_2 / m\}$ (3.25)

В табл. 1–4 представлены результаты для вариантов 1,2,3 соответственно при $R^{-2} = 0$; $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$; $R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$ применительно к ортотропным цилиндрическим оболочкам с направляющими (3.24), изготовленными из стеклопластика с механическими параметрами [22]

$\rho = 2.4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $E_1 = 6.37 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2$; $E_2 = 1.47 \cdot 10^{10}$; $G = 4.9 \cdot 10^6$; $\nu_1 = 0.26$;
 $\nu_2 = 0.06$ (3.26)

и геометрическими параметрами: $a=2, b=1, l=15, s=4.5912, r_0=0.205, r_1=0.0306$;
 $a=2, b=1, l=5, s=4.5912, r_0=0.205, r_1=0.0306$; $a=2, b=2, l=15, s=5.9158$,
 $r_0=0.8653, r_1=0.3021$; $a=2, b=2, l=5, s=5.9158, r_0=0.8653, r_1=0.3021$.

Таблица 1

| m | Вариант 1 | | Вариант 2 | | Вариант 3 | |
|-----|---------------|------------|---------------|------------|---------------|------------|
| | $k\chi_0 / m$ | η / m | $k\chi_0 / m$ | η / m | $k\chi_0 / m$ | η / m |
| 1 | -0.0650 | 0.9900 | | | | |
| 2 | -0.0856 | 0.9825 | -0.0689 | 0.9850 | -0.0689 | 0.9850 |
| 3 | -0.0865 | 0.9822 | -0.0733 | 0.9831 | -0.0733 | 0.9831 |
| 4 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0743 | 0.9826 | -0.0743 | 0.9826 |
| 5 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0747 | 0.9824 | -0.0747 | 0.9824 |
| 10 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0752 | 0.9822 | -0.0752 | 0.9822 |
| 20 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0754 | 0.9821 | -0.0754 | 0.9821 |
| 100 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0754 | 0.9821 | -0.0754 | 0.9821 |

Таблица 2

| m | Вариант 1 | | Вариант 2 | | Вариант 3 | |
|-----|---------------|------------|---------------|------------|---------------|------------|
| | $k\chi_0 / m$ | η / m | $k\chi_0 / m$ | η / m | $k\chi_0 / m$ | η / m |
| 3 | -0.0650 | 0.9900 | -0.0373 | 0.9956 | -0.0373 | 0.9956 |
| 4 | -0.0797 | 0.9849 | -0.0634 | 0.9874 | -0.0634 | 0.9874 |
| 5 | -0.0840 | 0.9832 | -0.0704 | 0.9844 | -0.0704 | 0.9844 |
| 6 | -0.0856 | 0.9826 | -0.0731 | 0.9832 | -0.0731 | 0.9832 |
| 7 | -0.0862 | 0.9823 | -0.0742 | 0.9827 | -0.0742 | 0.9827 |
| 10 | -0.0865 | 0.9821 | -0.0752 | 0.9822 | -0.0752 | 0.9822 |
| 20 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0754 | 0.9821 | -0.0754 | 0.9821 |
| 100 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0754 | 0.9821 | -0.0754 | 0.9821 |

Таблица 3

| m | Вариант 1 | | Вариант 2 | | Вариант 3 | |
|-----|---------------|------------|---------------|------------|---------------|------------|
| | $k\chi_0 / m$ | η / m | $k\chi_0 / m$ | η / m | $k\chi_0 / m$ | η / m |
| 1 | -0.0650 | 0.9900 | | | | |
| 2 | -0.0856 | 0.9825 | -0.0349 | 0.9935 | -0.0341 | 0.9934 |
| 3 | -0.0865 | 0.9822 | -0.0513 | 0.9861 | -0.0513 | 0.9862 |
| 4 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0549 | 0.9842 | -0.0548 | 0.9842 |
| 5 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0562 | 0.9834 | -0.0562 | 0.9835 |
| 10 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0580 | 0.9825 | -0.0580 | 0.9825 |
| 20 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0584 | 0.9822 | -0.0584 | 0.9822 |
| 100 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0585 | 0.9821 | -0.0585 | 0.9821 |

Таблица 4

| m | Вариант 1 | | Вариант 2 | | Вариант 3 | |
|-----|---------------|------------|---------------|------------|---------------|------------|
| | $k\chi_0 / m$ | η / m | $k\chi_0 / m$ | η / m | $k\chi_0 / m$ | η / m |
| 3 | -0.0650 | 0.9900 | | | | |
| 4 | -0.0797 | 0.9849 | -0.0278 | 0.9960 | -0.0277 | 0.9960 |
| 5 | -0.0840 | 0.9832 | -0.0460 | 0.9889 | -0.0460 | 0.9890 |
| 6 | -0.0856 | 0.9826 | -0.0522 | 0.9858 | -0.0522 | 0.9858 |
| 7 | -0.0862 | 0.9823 | -0.0550 | 0.9842 | -0.0550 | 0.9842 |
| 10 | -0.0865 | 0.9821 | -0.0576 | 0.9827 | -0.0576 | 0.9827 |
| 20 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0584 | 0.9822 | -0.0584 | 0.9822 |
| 100 | -0.0866 | 0.9821 | -0.0585 | 0.9821 | -0.0585 | 0.9821 |

Заклучение. В статье показано, что у свободного торца ортотропной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки, когда остальные края жестко зашпемлены и квадрат кривизны можно представить в виде (1.1), могут существовать колебания, затухающие от свободного края вдоль её образующих. Частоты собственных колебаний таких ортотропных цилиндрических оболочек определяются совокупностью уравнений (2.13) или (2.15). Для круговой незамкнутой цилиндрической оболочки – (3.4) или (2.15) и пластинки – (3.11) или (2.15). Численный анализ показывает, что у свободного торца незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки существуют бесконечное число затухающих и незатухающих собственных колебаний. Существования у свободного торца, затухающие вдоль образующих колебания, зависят от длины образующей, кривизны направляющей кривой и коэффициентов упругости. При больших m или при малой кривизне все характеристики собственных колебаний безмоментной цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам планарных колебаний пластинки со свободной стороной, когда остальные стороны жестко зашпемлены. Более того, при $ml \rightarrow \infty$ все характеристики стремятся к характеристикам планарных колебаний полубесконечной пластинки–полосы со свободным торцом, когда смежные границы жестко зашпемлены. С увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки первые частоты увеличиваются, а процесс затухания ослабевает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке // В. сб.: Волновые задачи механики. Нижний Новгород. 1992. С. 87-91.
2. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. Вычислит. математ. и мат. физика. 1961. Т.1. № 3. С. 542-545.
3. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарёв А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. Киев: Наукова Думка, 1986. 170 с.
4. Гулгазарян Г.Р. Формула распределения частот цилиндрической оболочки с произвольной направляющей // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 2. С.139-143.
5. Костромин В.П., Мяченков В.И. Колебания незамкнутых цилиндрических оболочек переменной кривизны // Прикл. Механика. 1972. Т.8. Вып.8. С.113–116.
6. Grigorenko Ya.M., Rozhok L. S. Solving the Stress Problem for Hollow Cylinders with Corrugated Elliptical Cross Section// Int. Appl. Mech. 2004, 40, № 2. p. 169-175.
7. Semenyuk N.P., Babich I.Yu., Zhukova N.B. Natural Vibrations of Corrugated cylindrical Shells //Int. Appl. Mech. 2005, 41, № 5. p. 512-519.

8. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.И. Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания // Сибирский матем. журнал. 1973. Т.4. № 5. С.978-986.
9. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383с.
10. Асланян А.Г., Лидский В.Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1974. 156с.
11. Гулгазарян, Г.Р. Колебания безмоментной консольной ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны// Изв. РАН. МТТ. 2007. №1. С. 84–99.
12. Власов В.З. Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек // Строительная промышленность. 1932. № 11. С.33-38; № 12. С.21-26.
13. Канторович Л.В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла// Изв. АН СССР. Отд. Мат. и ест. наук. 1933. № 5. С.647-653.
14. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. Метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Л.В. Канторовича и общий метод решения многомерных задач теплопереноса // Инж. физ. журн. 1982. Т.44. № 6. С. 1007-1013.
15. Беспалова Е.И. К решению стационарных задач теории пологих оболочек обобщенным методом Канторовича–Власова // Прикл. Механика. 2008. Т.44. № 11. С.99-111.
16. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
17. Рисс Ф., Секефальви – Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587с.
18. Солонников В.А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса–Л. Ниренберга //Изв. АН СССР. Математика. 1964. Т. 28. С. 665-706. Труды Матем. ин-та АН СССР, 1970. Т. 110. №6. С.233-297.
19. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 695 с.
20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М.: Физматгиз, 1963. 656с.
21. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Колебания ортотропной гофрированной цилиндрической оболочки со свободными краями // Прикл. Механика. 2006. Т.42. № 12. С.97-114.
22. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев. // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С.171-174.

Сведения об авторах:

Гулгазарян Гурген Рубенович – доктор ф.-м. н., профессор кафедры мат. анализа и теории функций АГПУ им. Х. Абовяна. Тел.: (+37410) 64-91-21; E-mail: ghulgr@yahoo.com

Хачанян Алвард Артаваздовна – соискатель АГПУ им. Х. Абовяна. Тел.: (37410)63-86-83

Поступила в редакцию 27.05.2010