ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №1, 2011 Механика

УДК 539.3

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

АГАЛОВЯН Л.А., САРГСЯН М.З.

Ключевые слова: вязкое сопротивление, частота собственных колебаний, симметричная и антисимметричная задачи, сдвиговые колебания, продольные колебания.
Keywords: viscous resistance, frequency of free vibrations, symmetric and antisymmetric problems, shear vibrations, longitudinal vibrations.

Աղալովյան Լ.Ա., Սարգսյան Մ.Զ.

Մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում օրթոտրոպ սալերի սեփական տատանումների մասին

Դիտարկվում է օրթոտրոպ սալերիի սեփական տատանումների առաձգականության տեսության եռաչափ խնդիրը մածուցիկ շփման հաշվառմամբ, երբ սալի դիմային հարթությունների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ: Ասիմպտոտիկ մեթոդով ցույց է տրված, որ առաջանում են 3 խումբ սեփական տատանումներ– 2 խումբ սահքային, 1 խումբ երկայնական սեփական տատանումներ: Որոշված են սալի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակները, տատանման ձևերը և հաճախությունների գլխավոր արժեքները սեփական տատանումների վերը նշված 3 խմբի համար:

Aghalovyan L.A., Sargsyan M.Z.

On Free Vibrations of Orthotropic Plates in the Presence of Viscous Resistance

The three-dimensional problem of elasticity theory of the free vibrations of orthotropic plates in the presence of viscous resistance, on the facial plane of which mixed-boundary conditions of elasticity theory are given is considered. By the asymptotic method it is shown that 3 groups of free vibrations, 2 groups of shearing and 1 group of longitudinal free vibrations are appeared. The stress-deformed states, principal values of frequencies and the forms of natural vibrations of plates relevant to 3 groups of free vibrations are determined.

Рассматривается трехмерная задача теории упругости о собственных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления, на лицевых плоскостях которых заданы смешанные краевые условия теории упругости. Асимптотическим методом показано, что возникают 3 группы собственных колебаний – 2 группы сдвиговых, 1 группа продольных колебаний. Определены напряженно-деформированные состояния, главные значения частот и формы собственных колебаний пластин, соответствующие трем группам собственных колебаний.

Введение

Для решения динамических задач теории упругости для тонких тел (пластины, оболочки, балки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно-возмущённых дифференциальных уравнений. Этим методом решён ряд класс задач о собственных и вынужденных колебаниях ортотропных балок-полос, пластин и оболочек [1-5].

В работе асимптотическим методом рассмотрены собственные колебания ортотропной пластины, лежащей на жёстком основании, с учётом вязкого сопротивления.

1.Рассмотрим задачу о собственных колебаниях ортотропной пластины $D=\{(x,y,z),\ (x,y)\in D_0,\ |z|\le h,\ h<<l\}$ (где D_0 – срединная поверхность, $2h$ – толщина, l – характерный тангенциальный размер пластины), с учётом вязкого сопротивления [6] при граничных условиях смешанной задачи теории упругости:

$$\sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \text{ при } z=h,\quad w=0,\ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \text{ при } z=-h \tag{1.1}$$

или

$$w=0,\ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \text{ при } z=\pm h \tag{1.2}$$

Условия на боковой поверхности не будем конкретизировать, поскольку они для этих классов задач не влияют на значения частот собственных колебаний. Ими обусловлены собственные колебания в зоне пограничного слоя [5].

Для определения частот собственных колебаний и построения решения внутренней задачи, в уравнениях и соотношениях пространственной задачи теории упругости переходим к безразмерным координатам $\xi = x/l,\ \eta = y/l,\ \zeta = z/l$ и компонентам вектора перемещения $U = u/l,\ V = v/l,\ W = w/l$. В результате получим сингулярно возмущенную геометрическим малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему, решение которой ищем в виде асимптотического представления:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(s)}e^{i\omega t}, \quad \alpha,\beta = x,y,z;\ \ j,k = 1,2,3\ \ s = \overline{0,N},$$
$$\left(U,V,W\right) = \varepsilon^{s}\left(U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}\right)e^{i\omega t},\ \ \omega_* = \varepsilon^{s}\omega_{*s},\ \ \left(\omega_*^{\,2} = \rho h^2\omega^2\right). \tag{1.3}$$

Подставив (1.3) в преобразованную систему уравнений динамической задачи и применив правило Коши умножения рядов $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$, получим рекуррентную систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{13}^{(s)}}{\partial\zeta} + \left(\omega_{*m-n}\omega_{*n} - 2iK\omega_{*m}\right)U^{(s-m)} = 0,\ (1,2,3;U,V,W),$$
$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} = a_{11}\sigma_{11}^{(s)} + a_{12}\sigma_{22}^{(s)} + a_{13}\sigma_{33}^{(s)} \qquad \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi} = a_{66}\sigma_{12}^{(s)},$$
$$\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} = a_{12}\sigma_{11}^{(s)} + a_{22}\sigma_{22}^{(s)} + a_{23}\sigma_{33}^{(s)} \qquad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{55}\sigma_{13}^{(s)}, \tag{1.4}$$
$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{13}\sigma_{11}^{(s)} + a_{23}\sigma_{22}^{(s)} + a_{33}\sigma_{33}^{(s)} \qquad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{44}\sigma_{23}^{(s)},$$
$$2K = k_1 h\big/\sqrt{\rho},\ \ n = \overline{0,m},\ \ m = \overline{0,s},$$

где k_1 – коэффициент вязкого сопротивления, ρ – плотность пластины.

Из системы (1.4) все искомые величины можно выразить через $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$ по формулам:

$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),\ \ \sigma_{11}^{(s)} = -A_{23}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} + A_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} - A_{12}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta},$$
$$\sigma_{13}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}\right),\ \ \sigma_{22}^{(s)} = -A_{13}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} - A_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} + A_{33}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}, \tag{1.5}$$
$$\sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),\ \ \sigma_{33}^{(s)} = A_{11}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} - A_{23}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} - A_{13}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta},$$

где

$$A_{11} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Delta},\ A_{22} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{\Delta},\ A_{33} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{\Delta},\ A_{12} = \frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}}{\Delta},$$

$A_{13} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{\Delta}, A_{23} = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{\Delta}, \ \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2.$

Для определения функций $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$ из (1.4) получаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}\left(\omega_{*m-n}\omega_{*n} - 2iK\omega_{*m}\right)U^{(s-m)} = R_U^{(s)}, \ n = \overline{0,m}, \ m = \overline{0,s}, \tag{1.6}$$

$\left(U, V, W;\ a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}\right).$

$$R_U^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\zeta\partial\xi} - a_{55}\left(\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right), \quad R_V^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\xi} - a_{44}\left(\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right)$$

$$R_W^{(s)} = \frac{A_{23}}{A_{11}}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial\zeta\partial\xi} + \frac{A_{13}}{A_{11}}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\xi} - \frac{1}{A_{11}}\left(\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right). \tag{1.7}$$

Для определения значений частот собственных колебаний, рассмотрим уравнения (1.6) сначала при $s = 0$:

$$\frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}\left(\omega_{*0}{}^2 - i2K\omega_{*0}\right)U^{(0)} = 0 \ \left(U, V, W;\ a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}\right). \tag{1.8}$$

Решениями уравнений (1.8) являются:

$$U^{(0)} = C_{1U}^{(0)}\cos\sqrt{a_{55}\left(\omega_{*0}{}^2 - i2K\omega_{*0}\right)}\zeta + C_{2U}^{(0)}\sin\sqrt{a_{55}\left(\omega_{*0}{}^2 - i2K\omega_{*0}\right)}\zeta \tag{1.9}$$

$\left(U, V, W;\ a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}\right).$

Используя (1.9), удовлетворив условиям, вытекающим с учётом (1.5) из граничных условий (1.1) или (1.2) относительно σ_{xz}

$$\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta} = 0 \ \text{при} \ \zeta = \pm 1, \tag{1.10}$$

получим систему алгебраических уравнений относительно функций $C_{1U}^{(0)}, C_{2U}^{(0)}$:

$$\begin{cases} -C_{1U}^{(0)}\sin\gamma_{U0} + C_{2U}^{(0)}\cos\gamma_{U0} = 0, \\ \ \ C_{1U}^{(0)}\sin\gamma_{U0} + C_{2U}^{(0)}\cos\gamma_{U0} = 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $\gamma_{U0} = \sqrt{a_{55}\left(\omega_{*0}{}^2 - i2K\omega_{*0}\right)}$. Из существования ненулевого решения этой системы имеем:

$$\sin\gamma_{U0}\cos\gamma_{U0} = 0, \tag{1.12}$$

откуда вытекают 2 случая:

$$\sin\gamma_{U0} = 0 \Rightarrow \gamma_{U0} = \pi n, \quad n \in \mathrm{N}, \tag{1.13}$$

$$\cos\gamma_{U0} = 0 \Rightarrow \gamma_{U0} = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathrm{N}. \tag{1.14}$$

При (1.13) имеем симметричную задачу, где для приведенных частот получим следующие значения:

$$\omega_{*0n} = iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a_{55}} - K^2}, \qquad n \in N. \tag{1.15}$$

1) В случае $K > \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}}}$ имеем:

$$\omega_{*0n} = iK \pm i\sqrt{K^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a_{55}}}, \qquad n \in N. \tag{1.16}$$

Из (1.3), (1.16) следует, что затухание величин будет происходить без колебания, как

$$\exp\frac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(-K - \sqrt{K^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a_{55}}}\right)t \text{ или } \exp\frac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(-K + \sqrt{K^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a_{55}}}\right)t.$$

2) В случае $K < \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}}}$ будем иметь:

$$\omega_{*0n} = iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a_{55}} - K^2}, \qquad n \in \mathrm{N}. \tag{1.17}$$

При этих значениях частот из (1.3) следует, что затухание будет колебательным. Поскольку $1/a_{55} = G_{13}$ – достаточно большое число, второй вариант на практике будет встречаться часто и в дальнейшем сосредоточим внимание на этом случае. Рассмотрим этот случай более подробно.

Итак, определили некоторый класс значений частот собственных колебаний пластины (обозначим индексом “I”). Учитывая, что $\omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2$, имеем

$$\omega_{0n}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a_{55}} - K^2}\right), \qquad n \in \mathrm{N}. \tag{1.18}$$

Из системы (1.11) с учетом (1.13) следует $C_{2U}^{(0)} = 0$, следовательно, (1.9) примет вид:

$$U_{n\mathrm{I}}^{(0)} = C_{1U}^{(0)}(\xi,\eta)\cos\gamma_{U0}\zeta = C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}(\xi,\eta)\cos\pi n\zeta, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{1.19}$$

Случаю (1.14) (антисимметричная задача, где все величины будем обозначать индексом “II”) соответствуют частоты

$$\omega_{0n}^{\mathrm{II}} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{a_{55}}\frac{(2n+1)^2}{4} - K^2}\right), \qquad n \in \mathrm{N} \tag{1.20}$$

и следующие формы собственных колебаний:

$$U_{n\mathrm{II}}^{(0)} = C_{2Un\mathrm{II}}^{(0)}(\xi,\eta)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\zeta, \qquad n \in \mathrm{N}. \tag{1.21}$$

Аналогичным образом, удовлетворив условиям (1.1) или (1.2) относительно σ_{yz}, получим следующие значения частот и формы собственных колебаний:

$$\omega_{0n}^{\mathrm{III}} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a_{44}} - K^2}\right), \quad n \in \mathrm{N} \text{ (симметричная задача)} \tag{1.22}$$

$$\omega_{0n}^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(iK \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{a_{44}}\frac{(2n+1)^2}{4} - K^2}\right), \; n \in \mathrm{N} \text{ (антисимметричная задача)} \tag{1.23}$$

$$V_{n\mathrm{III}}^{(0)} = C_{1Vn\mathrm{III}}^{(0)}(\xi,\eta)\cos\pi n\zeta, \quad n \in \mathrm{N} \text{ (симметричная задача)} \tag{1.24}$$

$$V_{n\mathrm{IV}}^{(0)} = C_{2Vn\mathrm{IV}}^{(0)}\left(\xi,\eta\right)\sin\frac{\left(2n+1\right)\pi}{2}\zeta,\quad n\in\mathrm{N}$$ (антисимметричная задача) (1.25)

Теперь рассмотрим граничные условия (1.1) относительно σ_{zz}, w. Этим условиям соответствуют

$$\frac{\partial W^{(0)}}{\partial\zeta} = 0 \text{ при } \zeta = 1;\quad W^{(0)} = 0 \text{ при } \zeta = -1. \tag{1.26}$$

Удовлетворив условиям (1.26), учитывая (1.9), получим систему алгебраических уравнений относительно функций $C_{1W}^{(0)}, C_{2W}^{(0)}$:

$$\begin{cases} -C_{1W}^{(0)}\sin\gamma_{W0} + C_{2W}^{(0)}\cos\gamma_{W0} = 0, \\ C_{1W}^{(0)}\cos\gamma_{W0} - C_{2W}^{(0)}\sin\gamma_{W0} = 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Из существования ненулевого решения этой системы получим уравнение для определения соответствующих частот собственных колебаний:

$$\cos 2\gamma_{W0} = 0 \Rightarrow \gamma_{W0} = \frac{\left(2n+1\right)\pi}{4},\quad n\in\mathrm{N}, \tag{1.28}$$

которым будут соответствовать частоты

$$\omega_{0n}^{\mathrm{V}} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(iK \pm \sqrt{A_{11}\frac{\pi^2}{16}\left(2n+1\right)^2 - K^2}\right),\ n\in\mathrm{N}. \tag{1.29}$$

Отметим, что при условиях (1.26) симметричная и антисимметричная задачи не разделяются. Из системы (1.27) имеем $C_{2W}^{(0)} = C_{1W}^{(0)}\mathrm{tg}\gamma_{W0}$, следовательно, из (1.9) и (1.28) получим следующие формы собственных колебаний:

$$W_{n\mathrm{V}}^{(0)} = \bar{C}_{1Wn\mathrm{V}}^{(0)}\left(\xi,\eta\right)\cos\frac{\left(2n+1\right)\pi}{4}\left(1-\zeta\right),\ n\in\mathrm{N},\qquad \bar{C}_{1W}^{(0)} = \frac{C_{1W}^{(0)}}{\cos\gamma_{W0}}. \tag{1.30}$$

Условиям (1.2) относительно w будут соответствовать условия

$$W^{(0)} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1. \tag{1.31}$$

Удовлетворив условиям (1.31), учитывая (1.9), получим следующие частоты и формы собственных колебаний:

$$\omega_{0n}^{\mathrm{VI}} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(iK \pm \sqrt{A_{11}\pi^2\frac{\left(2n+1\right)^2}{4} - K^2}\right),\ n\in\mathrm{N}$$ (антисимметричная задача)(1.32)

$$\omega_{0n}^{\mathrm{VII}} = \frac{1}{h\sqrt{\rho}}\left(iK \pm \sqrt{A_{11}\pi^2 n^2 - K^2}\right),\quad n\in\mathrm{N}$$ (симметричная задача) (1.33)

$$W_{n\mathrm{VI}}^{(0)} = C_{1Wn\mathrm{VI}}^{(0)}\left(\xi,\eta\right)\cos\frac{\left(2n+1\right)}{2}\pi\zeta,\quad n\in\mathrm{N}$$ (антисимметричная задача) (1.34)

$$W_{n\mathrm{VII}}^{(0)} = C_{2Wn\mathrm{VII}}^{(0)}\left(\xi,\eta\right)\sin\pi n\zeta,\ n\in\mathrm{N}$$ (симметричная задача) (1.35)

Нужно отметить, что все коэффициенты, участвующие в формулах (1.19), (1.21), (1.24), (1.25), (1.30), (1.34), (1.35), для форм собственных колебаний являются функциями от ξ,η и определяются из условий на боковой поверхности.

Значения частот ω_{0n}^{I} и $\omega_{0n}^{\mathrm{II}}$ не будут удовлетворять условиям существования ненулевого решения систем алгебраических уравнений соответствующих $\sigma_{yz}^{(0)}$, $W^{(0)}$, и эти системы будут иметь нулевые решения, т.к. их определители будут отличны от нуля, следовательно:

$$V_{n\mathrm{I}}^{(0)} = W_{n\mathrm{I}}^{(0)} = V_{n\mathrm{II}}^{(0)} = W_{n\mathrm{II}}^{(0)} = 0, \; n \in \mathrm{N}. \tag{1.36}$$

Точно так же при случаях $\omega_{0n} = \omega_{0n}^{\mathrm{III}}, \omega_{0n}^{\mathrm{IV}}$ и $\omega_{0n} = \omega_{0n}^{\mathrm{V}}, \omega_{0n}^{\mathrm{VI}}, \omega_{0n}^{\mathrm{VII}}$ будем иметь соответственно

$$U_{n\mathrm{III}}^{(0)} = W_{n\mathrm{III}}^{(0)} = U_{n\mathrm{IV}}^{(0)} = W_{n\mathrm{IV}}^{(0)} = 0, \tag{1.37}$$

$$U_{n\mathrm{V}}^{(0)} = V_{n\mathrm{V}}^{(0)} = U_{n\mathrm{VI}}^{(0)} = V_{n\mathrm{VI}}^{(0)} = U_{n\mathrm{VII}}^{(0)} = V_{n\mathrm{VII}}^{(0)} = 0, \; n \in \mathrm{N}. \tag{1.38}$$

И, наконец, для напряжений соответствующим частотам $\omega_{0n} = \omega_{0n}^{\mathrm{I}}, \omega_{0n}^{\mathrm{II}}$ и $\omega_{0n} = \omega_{0n}^{\mathrm{III}}, \omega_{0n}^{\mathrm{IV}}$ имеем следующие значения:

$$\begin{gathered} \sigma_{jkn\mathrm{I}}^{(0)} = \sigma_{jkn\mathrm{II}}^{(0)} = 0, \; j,k = 1,2,3, \; jk \neq 13, \\ \sigma_{13n\mathrm{I}}^{(0)} = -C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)} \frac{\pi n}{a_{55}} \sin \pi n\zeta, \; \sigma_{13n\mathrm{II}}^{(0)} = C_{2Un\mathrm{II}}^{(0)} \frac{(2n+1)\pi}{2a_{55}} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2}\zeta, \; n \in \mathrm{N} \end{gathered} \tag{1.39}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{jkn\mathrm{III}}^{(0)} = \sigma_{jkn\mathrm{IV}}^{(0)} = 0, \; j,k = 1,2,3, \; jk \neq 23, \\ \sigma_{23n\mathrm{III}}^{(0)} = -C_{1Vn\mathrm{III}}^{(0)} \frac{\pi n}{a_{44}} \sin \pi n\zeta, \; \sigma_{23n\mathrm{IV}}^{(0)} = C_{2Vn\mathrm{IV}}^{(0)} \frac{(2n+1)\pi}{2a_{44}} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2}\zeta, \; n \in \mathrm{N} \end{gathered} \tag{1.40}$$

Напряжения, соответствующие частотам $\omega_{0n} = \omega_{0n}^{\mathrm{V}}, \omega_{0n}^{\mathrm{VI}}$ при (1.1), будут:

$$\begin{gathered} \sigma_{jkn}^{(0)} = 0, \; j,k = 1,2,3, \; j \neq k, \; n \in \mathrm{N}, \\ \sigma_{11n\mathrm{V}}^{(0)} = -A_{23} \bar{C}_{1Wn\mathrm{V}}^{(0)}(\xi,\eta) \frac{(2n+1)\pi}{4} \sin \frac{(2n+1)\pi}{4}(1-\zeta), \; (11,22,33; A_{23}, A_{13}, -A_{11}), \end{gathered} \tag{1.41}$$

а при (1.2) будем иметь:

$$\begin{gathered} \sigma_{jkn\mathrm{VI}}^{(0)} = \sigma_{jkn\mathrm{VII}}^{(0)} = 0, \; j,k = 1,2,3, \; j \neq k, \\ \sigma_{11n\mathrm{VI}}^{(0)} = A_{23} C_{1Wn\mathrm{VI}}^{(0)} \frac{(2n+1)\pi}{2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2}\zeta, \; (11,22,33; A_{23}, A_{13}, -A_{11}), \\ \sigma_{11n\mathrm{VII}}^{(0)} = -A_{23} C_{2Wn\mathrm{VII}}^{(0)} \pi n \cos \pi n\zeta, \; (11,22,33; A_{23}, A_{13}, -A_{11}), \quad n \in \mathrm{N}. \end{gathered} \tag{1.42}$$

Итак, мы получили 3 группы собственных колебаний, из которых две группы – сдвиговые колебания с частотами $\omega_{0n}^{\mathrm{I}}, \omega_{0n}^{\mathrm{II}}, \omega_{0n}^{\mathrm{III}}, \omega_{0n}^{\mathrm{IV}}$ и одна группа – продольные колебания с частотами $\omega_{0n}^{\mathrm{V}}, \omega_{0n}^{\mathrm{VI}}$.

2. Об ортогональности форм собственных колебаний. Можно показать, что каждое из семейств функций $\{U_{n\mathrm{I}}^{(0)}\}\{U_{n\mathrm{II}}^{(0)}\}, \{V_{n\mathrm{III}}^{(0)}\}, \{V_{n\mathrm{IV}}^{(0)}\}, \{W_{n\mathrm{V}}^{(0)}\}\{W_{n\mathrm{VI}}^{(0)}\}\{W_{n\mathrm{VII}}^{(0)}\}$ составляет ортогональную систему на интервале $-1 \le \zeta \le 1$, т.е., например,

$$\int_{-1}^{1} U_{n\mathrm{I}}^{(0)} U_{m\mathrm{I}}^{(0)} d\zeta = 0, \text{ при } n \neq m \; (U,V,W), \; n,m \in \mathrm{N}. \tag{2.1}$$

Чтобы показать справедливость выполнения (2.1), запишем уравнение (1.8) для функций $U_{m\mathrm{I}}^{(0)}$:

$$\frac{\partial^2 U_{m\mathrm{I}}{}^{(0)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\left(\left(\omega^{\mathrm{I}}_{*0m}\right)^2-i2K\omega^{\mathrm{I}}_{*0m}\right)U_{m\mathrm{I}}{}^{(0)}=0\,. \qquad (2.2)$$

Умножив обе части уравнения (2.2) на $U^{(0)}_{n\mathrm{I}}$ и проинтегрировав по ζ на интервале $[-1,1]$, получим:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 U^{(0)}_{m\mathrm{I}}}{\partial\zeta^2}U^{(0)}_{n\mathrm{I}}d\zeta+a_{55}\left(\left(\omega^{\mathrm{I}}_{*0m}\right)^2-i2K\omega^{\mathrm{I}}_{*0m}\right)\int_{-1}^{1}U^{(0)}_{n\mathrm{I}}U^{(0)}_{m\mathrm{I}}d\zeta=0\,. \qquad (2.3)$$

Проинтегрировав по частям (2.3) и учитывая условия (1.10), будем иметь:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 U^{(0)}_{n\mathrm{I}}}{\partial\zeta^2}U^{(0)}_{m\mathrm{I}}d\zeta=\left.\frac{\partial U^{(0)}_{n\mathrm{I}}}{\partial\zeta}U^{(0)}_{m\mathrm{I}}\right|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\partial U^{(0)}_{n\mathrm{I}}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(0)}_{m\mathrm{I}}}{\partial\zeta}d\zeta=-\int_{-1}^{1}\frac{\partial U^{(0)}_{n\mathrm{I}}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(0)}_{m\mathrm{I}}}{\partial\zeta}d\zeta$$

и (2.3) примет вид:

$$-\int_{-1}^{1}\frac{\partial U^{(0)}_{n\mathrm{I}}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(0)}_{m\mathrm{I}}}{\partial\zeta}d\zeta+a_{55}\left(\left(\omega^{\mathrm{I}}_{*0m}\right)^2-i2K\omega^{\mathrm{I}}_{*0m}\right)\int_{-1}^{1}U^{(0)}_{n\mathrm{I}}U^{(0)}_{m\mathrm{I}}d\zeta=0\,. \qquad (2.4)$$

Подобным образом написав уравнение (1.8) для функций $U^{(0)}_{n\mathrm{I}}$, но на этот раз умножив на $U^{(0)}_{m\mathrm{I}}$, будем иметь:

$$-\int_{-1}^{1}\frac{\partial U^{(0)}_{nv}}{\partial\zeta}\frac{\partial U^{(0)}_{m\mathrm{I}}}{\partial\zeta}d\zeta+a_{55}\left(\left(\omega^{\mathrm{I}}_{*0m}\right)^2-i2K\omega^{\mathrm{I}}_{*0m}\right)\int_{-1}^{1}U^{(0)}_{n\mathrm{I}}U^{(0)}_{m\mathrm{I}}d\zeta=0\,. \qquad (2.5)$$

Вычитав из (2.4) соотношение (2.5), будем иметь:

$$a_{55}\left(\omega^{\mathrm{I}}_{*0n}-\omega^{\mathrm{I}}_{*0m}\right)\left(\omega^{\mathrm{I}}_{*0n}+\omega^{\mathrm{I}}_{*0m}-i2K\right)\int_{-1}^{1}U^{(0)}_{n\mathrm{I}}U^{(0)}_{m\mathrm{I}}d\zeta=0. \qquad (2.6)$$

При $n\neq m$, $\omega^{\mathrm{I}}_{*0n}\neq\omega^{\mathrm{I}}_{*0m}$ из (2.6) вытекает:

$$\int_{-1}^{1}U^{(0)}_{n\mathrm{I}}U^{(0)}_{m\mathrm{I}}d\zeta=0\,. \qquad (2.7)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что функции

$$\Psi_{n\mathrm{I}}=\frac{U^{(0)}_{n\mathrm{I}}}{C^{(0)}_{1Un\mathrm{I}}(\eta,\xi)},\qquad \{\Psi_{n\mathrm{I}}\}=\{\cos\pi n\zeta\},\quad n\in\mathrm{N} \qquad (2.8)$$

составляют ортонормированное множество на интервале $-1\le\zeta\le1$.

Ортогональность остальных семейств функций и ортонормированность соответствующих Ψ_n доказывается подобным образом.

3. О приближениях $s\ge1$. Рассмотрим уравнения (1.6) при $s=1$ и $\omega_{*0n}=\omega^{\mathrm{I}}_{*0n}$. Сперва рассмотрим первое уравнение (1.6):

$$\frac{\partial^2 U^{(1)}_{n\mathrm{I}}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\omega^{\mathrm{I}}_{*0n}\left(\omega^{\mathrm{I}}_{*0n}-2iK\right)U^{(1)}_{n\mathrm{I}}+a_{55}\omega^{\mathrm{I}}_{*1n}\left(2\omega^{\mathrm{I}}_{*0n}-2iK\right)U^{(0)}_{n\mathrm{I}}=R^{(1)}_{Un\mathrm{I}} \quad (3.1)$$

Решение (3.1) представим в виде ряда по собственным функциям $U^{(1)}_{n\mathrm{I}}$ нулевого приближения:

$$U^{(1)}_{n\mathrm{I}}=\sum_{m=1}^{\infty}b_{nm}U^{(0)}_{m\mathrm{I}}\,,\quad n\in\mathrm{N}\,. \qquad (3.2)$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям (1.1) и (1.2), соответствующим σ_{xz}. Подставив (3.2) в (3.1) и учитывая, что из (2.2) следует $\dfrac{\partial^2 U_{m\mathrm{I}}^{(0)}}{\partial\zeta^2} = -a_{55}\left(\left(\omega_{*0m}^{\mathrm{I}}\right)^2 - i2K\omega_{*0m}^{\mathrm{I}}\right)U_{m\mathrm{I}}^{(0)}$, получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}} - \omega_{*0m}^{\mathrm{I}}\right)\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}} + \omega_{*0m}^{\mathrm{I}} + i2K\right)b_{nm}a_{55}U_{m\mathrm{I}}^{(0)} = -2a_{55}\omega_{*1n}^{\mathrm{I}}\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}} - iK\right)U_{n\mathrm{I}}^{(0)} + R_{Un\mathrm{I}}^{(1)} \quad (3.3)$$

Умножив (3.3) на $U_{k\mathrm{I}}^{(0)}$ и проинтегрировав по ζ на отрезке $[-1, 1]$, учитывая ортогональность функций $\left\{U_{n\mathrm{I}}^{(0)}\right\}$, получим:

$$b_{nk}a_{55}\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}} - \omega_{*0k}^{\mathrm{I}}\right)\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}} + \omega_{*0k}^{\mathrm{I}} + i2K\right) = -2a_{55}\omega_{*1n}^{\mathrm{I}}\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}} - iK\right)C_{Unk\mathrm{I}}^{(0)}\delta_{nk} + R_{Unk\mathrm{I}}^{(1)} \quad (3.4)$$

где δ_{nk} – символ Кронекера, а

$$C_{Unk\mathrm{I}}^{(0)} = \frac{C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}}{C_{1Uk\mathrm{I}}^{(0)}},\quad R_{Unk\mathrm{I}}^{(1)} = \frac{1}{\left(C_{1Uk\mathrm{I}}^{(0)}\right)^2}\int_{-1}^{1} R_{Un\mathrm{I}}^{(1)}U_{k\mathrm{I}}^{(0)}d\zeta,\quad n \in \mathrm{N}. \quad (3.5)$$

При $n = k$ из (3.4) будем иметь:

$$\omega_{*1n}^{\mathrm{I}} = \frac{R_{Unn\mathrm{I}}^{(1)}}{2a_{55}\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}} - iK\right)},\quad n \in \mathrm{N}, \quad (3.6)$$

а при $n \neq k$:

$$b_{nk} = \frac{R_{Unk\mathrm{I}}^{(1)}}{a_{55}\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}} - \omega_{*0k}^{\mathrm{I}}\right)\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}} + \omega_{*0k}^{\mathrm{I}} + i2K\right)},\quad n \in \mathrm{N}. \quad (3.7)$$

Из (1.5), (1.7), (1.36) следует $R_{Un\mathrm{I}}^{(1)} = 0$, следовательно, из (3.5) и (3.7) имеем:

$$b_{nk} = 0,\ n \neq k,\ \omega_{*1n}^{\mathrm{I}} = 0,\ n \in N. \quad (3.8)$$

Для определения b_{nn} нормируем U_n:

$$\frac{1}{\left\|U_{n\mathrm{I}}^{(0)}\right\|^2}\int_{-1}^{1}\left(U_{n\mathrm{I}}^{(0)} + \varepsilon U_{n\mathrm{I}}^{(1)}\right)^2 d\zeta = 1, \text{ где } \left\|U_{n\mathrm{I}}^{(0)}\right\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(U_{n\mathrm{I}}^{(0)}\right)^2 d\zeta, \quad (3.9)$$

откуда получим:

$$\int_{-1}^{1} U_{n\mathrm{I}}^{(0)}U_{n\mathrm{I}}^{(1)}d\zeta = 0,\quad n \in \mathrm{N}. \quad (3.10)$$

Подставив $U_{n\mathrm{I}}^{(1)}$ в (3.10), используя (3.2), будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_{nk}\int_{-1}^{1} U_{n\mathrm{I}}^{(0)}U_{k\mathrm{I}}^{(0)}d\zeta + b_{nn}\int_{-1}^{1} U_{n\mathrm{I}}^{(0)}U_{n\mathrm{I}}^{(0)}d\zeta = 0.$$

Так как $n \neq k$, то из последнего следует $b_{nn}\int_{-1}^{1} U_{n\mathrm{I}}^{(0)}U_{n\mathrm{I}}^{(0)}d\zeta = 0$, или

$$b_{nn} = 0,\quad n \in \mathrm{N}. \quad (3.11)$$

Итак, при $\omega_{*0n} = \omega_{*0n}^{\mathrm{I}}$ имеем:

$$U_{n\mathrm{I}}^{(1)} = 0,\quad \omega_{*1n}^{\mathrm{I}} = 0,\quad n \in \mathrm{N}. \quad (3.12)$$

Теперь рассмотрим приближение $s=2$. Первое уравнение (1.6) при $s=2$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U_{n\mathrm{I}}^{(2)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}-2iK\right)U_{n\mathrm{I}}^{(2)}+a_{55}\omega_{*2n}^{\mathrm{I}}\left(2\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}-2iK\right)U_{n\mathrm{I}}^{(0)}=R_{Un\mathrm{I}}^{(2)} \quad (3.13)$$

Решение снова ищем в виде:

$$U_{n\mathrm{I}}^{(2)}=\sum_{r=1}^{\infty}c_{nr}U_{r\mathrm{I}}^{(0)}, \quad n\in\mathrm{N}\,. \quad (3.14)$$

Повторив те же действия, получим:

$$\omega_{*2n}^{\mathrm{I}}=\frac{R_{Unn\mathrm{I}}^{(2)}}{2a_{55}\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}-iK\right)}\ ,\ n=k\,, \quad (3.15)$$

$$c_{nk}=\frac{R_{Unk\mathrm{I}}^{(2)}}{a_{55}\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}-\omega_{*0k}^{\mathrm{I}}\right)\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}+\omega_{*0k}^{\mathrm{I}}+i2K\right)},\ n\neq k\,, \quad (3.16)$$

$$R_{Unk\mathrm{I}}^{(2)}=\frac{1}{\left(C_{1Uk\mathrm{I}}^{(0)}\right)^2}\int_{-1}^{1}R_{Un\mathrm{I}}^{(2)}U_{k\mathrm{I}}^{(0)}d\zeta=\frac{1}{C_{1Uk\mathrm{I}}^{(0)}}\int_{-1}^{1}R_{Un\mathrm{I}}^{(2)}\Psi_{k\mathrm{I}}d\zeta\,. \quad (3.17)$$

Для определения $R_{Un\mathrm{I}}^{(2)}$, учитывая (1.5), (1.7), (1.36), будем иметь:

$$R_{Un\mathrm{I}}^{(2)}=\left(a_{55}A_{23}-1\right)\frac{\partial^2 W_{n\mathrm{I}}^{(1)}}{\partial\zeta\partial\xi}-a_{55}\left(A_{22}\frac{\partial^2 U_{n\mathrm{I}}^{(0)}}{\partial\xi^2}+\frac{1}{a_{66}}\frac{\partial^2 U_{n\mathrm{I}}^{(0)}}{\partial\eta^2}\right). \quad (3.18)$$

В соотношении (3.18) неизвестными остаются только функции $W_{n\mathrm{I}}^{(1)}$, определяющиеся из третьего уравнения (1.6), которое с учетом (1.13) будет:

$$\frac{\partial^2 W_{n\mathrm{I}}^{(1)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\pi^2 n^2}{a_{55}A_{11}}W_{n\mathrm{I}}^{(1)}=R_{Wn\mathrm{I}}^{(1)},\ \ n\in\mathrm{N}\,, \quad (3.19)$$

где $R_{Wn\mathrm{I}}^{(1)}$ можно определить, используя соотношения (1.5), (1.7) ,(1.19):

$$R_{Wn\mathrm{I}}^{(1)}=\frac{1}{A_{11}}\left(A_{23}-\frac{1}{a_{55}}\right)\frac{\partial^2 U_{n\mathrm{I}}^{(0)}}{\partial\xi\partial\zeta}=-\left(C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}\right)_{\xi}\frac{1}{A_{11}}\left(A_{23}-\frac{1}{a_{55}}\right)\pi n\sin\pi n\zeta\,. \quad (3.20)$$

Решив однородное уравнение (3.19), получим:

$$W_{n01}^{(1)}=D_{W1}^{(1)}\sin\frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}\zeta+D_{W2}^{(1)}\cos\frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}\zeta\,.$$

Из (3.19), (3.20) получим частное решение уравнения (3.19):

$$W_{n\mathrm{I}\tau}^{(1)}=\left(C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}\right)_{\xi}\frac{1-a_{55}A_{23}}{\pi n\left(1-a_{55}A_{11}\right)}\sin\pi n\zeta\,.$$

Итак, для $W_{n\mathrm{I}}^{(1)}$ имеем

$$W_{n\mathrm{I}}^{(1)}=D_{W1}^{(1)}\sin\frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}\zeta+D_{W2}^{(1)}\cos\frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}\zeta+\left(C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}\right)_{\xi}\frac{1-a_{55}A_{23}}{\pi n\left(1-a_{55}A_{11}\right)}\sin\pi n\zeta \quad (3.21)$$

Для определения коэффициентов $D_{W1}^{(1)}, D_{W2}^{(1)}$ удовлетворим условиям, вытекающим из граничных условий (1.1) и (1.2) . Этими условиями при (1.1) будут:

$$W_{n\mathrm{I}}^{(1)}(\zeta=-1)=0; \qquad \left.\left(A_{11}\frac{\partial W_{n\mathrm{I}}^{(1)}}{\partial\zeta}-A_{23}\frac{\partial U_{n\mathrm{I}}^{(0)}}{\partial\xi}\right)\right|_{\zeta=1}=0. \tag{3.22}$$

Из (3.22), используя (1.19) и (3.21), получим неоднородную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $D_{W1}^{(1)}, D_{W2}^{(1)}$, определитель которой не равен нулю, следовательно, эта система будет иметь единственное ненулевое решение:

$$D_{W1}^{(1)}=\frac{\sqrt{a_{55}A_{11}}}{A_{11}\pi n\cos\frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}(-1)^{n+1}\left(C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}\right)_{\xi}\frac{A_{11}-A_{23}}{1-a_{55}A_{11}}\cos\frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}},$$

$$D_{W2}^{(1)}=\frac{\sqrt{a_{55}A_{11}}}{A_{11}\pi n\cos\frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}(-1)^{n+1}\left(C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}\right)_{\xi}\frac{A_{11}-A_{23}}{1-a_{55}A_{11}}\sin\frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}. \tag{3.23}$$

Из (3.18), учитывая (3.21), (3.23) и (1.19), будем иметь:

$$R_{Un\mathrm{I}}^{(2)}=\left(C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}\right)_{\xi\xi}\frac{a_{55}A_{23}-1}{(1-a_{55}A_{11})}(-1)^{n+1}\frac{A_{11}-A_{23}}{A_{11}\cos\frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}\cos\frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}(1+\zeta)-$$

$$-\left(\left(a_{55}A_{22}-\frac{(1-a_{55}A_{23})^2}{(1-a_{55}A_{11})}\right)\left(C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}\right)_{\xi\xi}+\frac{a_{55}}{a_{66}}\left(C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}\right)_{\eta\eta}\right)\cos\pi n\zeta, \tag{3.24}$$

а для определения $R_{Unk\mathrm{I}}^{(2)}$ имеем:

$$R_{Unk\mathrm{I}}^{(2)}=\frac{1}{C_{1Uk\mathrm{I}}^{(0)}}\int_{-1}^{1}R_{Un\mathrm{I}}^{(2)}\sin\pi k\zeta d\zeta. \tag{3.25}$$

Учитывая (3.24) и (3.25), будем иметь:

$$R_{Unk\mathrm{I}}^{(2)}=(-1)^{n+k+2}\frac{2a_{55}k(a_{55}A_{23}-1)(A_{11}-A_{23})}{\pi(1-a_{55}A_{11})(n^2-a_{55}A_{11}k^2)}\frac{\sin^2\frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}{\cos\frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}\frac{\left(C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}\right)_{\xi\xi}}{C_{1Uk\mathrm{I}}^{(0)}}. \tag{3.26}$$

В итоге, по формулам (3.15), (3.16), учитывая (3.26), определятся $\omega_{*2n}^{\mathrm{I}}$ и c_{nk}:

$$\omega_{*2n}^{\mathrm{I}}=\frac{\left(C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}\right)_{\xi\xi}}{C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}}\frac{(a_{55}A_{23}-1)(A_{11}-A_{23})}{(1-a_{55}A_{11})^2(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}-iK)}\frac{\sin^2\frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}{\pi n\cos\frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}, \quad n\in\mathrm{N}. \tag{3.27}$$

$$c_{nk}=\frac{\left(C_{1Un\mathrm{I}}^{(0)}\right)_{\xi\xi}2k(-1)^{n+k+2}(a_{55}A_{23}-1)(A_{11}-A_{23})\sin^2\frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}}{C_{1Uk\mathrm{I}}^{(0)}\pi\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}-\omega_{*0k}^{\mathrm{I}}\right)\left(\omega_{*0n}^{\mathrm{I}}+\omega_{*0k}^{\mathrm{I}}+i2K\right)(1-a_{55}A_{11})(n^2-a_{55}A_{11}k^2)\cos\frac{2\pi n}{\sqrt{a_{55}A_{11}}}} \tag{3.28}$$

Для определения c_{nn} поступим так же, как в случае b_{nn}, в результате получим:

$$c_{nn} = 0\,, \quad n \in \mathrm{N}\,. \tag{3.29}$$

Итак, мы определили $U_{n\mathrm{I}}^{(2)}$ и $\omega_{*2n}^{\mathrm{I}}$, которые отличны от нуля. Следовательно, имеем:

$$\begin{cases} \omega_{*n}^{\mathrm{I}} = \omega_{*0n}^{\mathrm{I}} + \varepsilon^2 \omega_{*2n}^{\mathrm{I}}, \\ U_{n\mathrm{I}} = U_{n\mathrm{I}}^{(0)} + \varepsilon^2 U_{n\mathrm{I}}^{(2)}, \qquad n \in \mathrm{N}. \end{cases} \tag{3.30}$$

Аналогичным образом при условиях (1.2) и для остальных случаев найденных частот получаются подобные результаты.

Поскольку $W_{n\mathrm{I}}^{(1)} \neq 0$, можем заключить, что сдвиговые собственные колебания порождают продольные собственные колебания и наоборот, т.е. при высших приближениях один тип собственных колебаний будет сопровождаться другим типом собственных колебаний. Однако, поскольку $W_{n\mathrm{I}}^{(0)} = 0\,, W_{n\mathrm{I}}^{(1)} \neq 0$ и аналогично для остальных случаев, амплитуда сопутствующего колебания будет на порядок меньше основного.

Из полученных результатов следует, что начальное приближение дает достаточно точные значения для частот и форм собственных колебаний. И поэтому в практических приложениях можно ограничиться этими значениями частот для исходного приближения, которые назовем главными значениями частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин.// Изв. ВУЗ-ов РФ, Северо-Кавказский регион. Ест. науки. 2000. №3. С.8-11.
2. Агаловян Л.А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин.// Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: Изд-во “Гитутюн” НАН Армении, 2002. С.9-19.
3. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек.// ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.
4. Агаловян Л.А., Азатян Г.Л. Собственные колебания ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления. // Изв.НАН Армении.Механика. 2005. Т.58. №2. С.48-58.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория деформируемых тонкостенных систем. //Труды международной школы-конференции молодых ученых. Механика. Ереван. 2009. с. 5-35.
6. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1959. 439с.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович, академик НАН РА, зав. отделом,
советник директора Института механики НАН РА.
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б,
Тел: (+37410) 52-58-35, E-mail: aghal@mechins.sci.am

Саргсян Месроп – аспирант Института механики НАН Армении
Тел.: (093)069950, дом: (0224)22335
E-mail: messarg@gmail.com

Поступила в редакцию 12.05.2010