

УДК 539.1

**ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СОПРЯЖЕНИЮ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ С  
АНАЛИТИЧЕСКИМ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ  
ХАЧИКЯН А.С., СААКЯН А.В., САРГСЯН В.Г.**

**Ключевые слова:** численные решения, аналитические решения, сопряжение, кручение

**Keywords:** numerical solution, analytical solution, conjugation, torsion

**Խաչիկյան Ա.Ս., Սահակյան Ա.Վ., Սարգսյան Վ.Գ.**

**Թվային և անալիտիկ լուծումների համակցման մի մոտեցման մասին ոլորման խնդրի օրինակով**

Առաջարկվում է առաձգականության տեսության խնդիրների լուծման թվային և անալիտիկ մեթոդների համակցման մի մոտեցում: Դիտարկվող տիրույթի մի քանի ենթատիրույթներում խնդրի լուծումը կառուցվում է անալիտիկ մեթոդներով, իսկ մնացած ենթատիրույթներում՝ թվային մեթոդներով: Ձևավորելով կցման պայմանները ենթատիրույթների հպման սահմաններում ստանում ենք դրված ամբողջ խնդրի որոշիչ հավասարումների համակարգը:

Որպես օրինակ բերված է տարբեր առաձգական բնութագրեր ունեցող և ընդհանուր կողով միացած երկու ուղղանկյուններից բաղկացած ուղղանկյան ոլորման խնդիրը: Այս խնդրի անալիտիկ լուծումը հայտնի է: Կառուցված են թվային և թվային-անալիտիկ լուծումները: Լուծումների արդյունքները լավ են համաձայնվում ճշգրիտ անալիտիկ լուծման հետ:

**Khachikyan A.S., Sahakyan A.V., Sargsyan V.G.**

**On an Approach to Conjugation of Numerical and Analytical Solutions on an example of Torsion Problem**

The approach to conjugation of the numerical and analytical solutions of elasticity theory problems is proposed. In several parts of considered region the solution of a problem is constructed by analytical methods, and in the others - by numerical ones. Satisfying the contact conditions on adjacent borders of parts, we come to the system of resolving equations of a problem.

As an example the solution of a problem of torsion of the compound rectangular region is given. The rectangle consists from two rectangles with different elastic characteristics, connected on the common edges. The analytical solution of this problem is known. Numerical and numerically-analytical solutions are constructed. Results of solutions well conforms to the exact analytical solution.

Предлагается подход к сопряжению численного и аналитического решения задач теории упругости. В нескольких подобластях рассматриваемой области решение задачи строится аналитическими методами, а в остальных – численными. Записав условия контакта на смежных границах подобластей, приходим к разрешающей системе уравнений поставленной задачи в целом.

В качестве примера приводится решение задачи кручения прямоугольной области, состоящей из двух прямоугольников, соединенных по общей стороне и имеющих разные упругие характеристики. Аналитическое решение этой задачи известно. Построены численное и численно-аналитическое решения. Результаты решений хорошо согласуются с точным аналитическим решением.

1. Современное состояние вычислительной техники и программного обеспечения позволяет решать много сложных задач. Однако экономичное использование машинного времени актуально всегда. Между тем разбиение больших областей на конечные элементы при методе конечных элементов (МКЭ), или разбиение границы таких областей на граничные элементы при методе граничных элементов (МГЭ) приводит к большому расходу машинного времени. Часто оставляет желать лучшего численное решение задач при наличии в рассматриваемых областях зон концентрации напряжений. Это осознается многими исследователями, которые делают шаги на ее разрешение. В работе [1] авторы стараются решить проблему введением особых сингулярных элементов (МКЭ). В качестве решения для сингулярных элементов принимается линейная комбинация нескольких сингулярных собственных функций от местных решений задачи в сингулярной точке. В работе [2]

автор предлагает совместное решение задачи методом сингулярных интегральных уравнений для бесконечной части области и методом МКЭ для конечной ее части. Существуют и другие аналогичные предложения.

Здесь предлагается подход, позволяющий в задачах для больших, в том числе безграничных, областей и областей, включающих зоны концентрации, совместить аналитическое решение для некоторых подобластей с численным решением для других подобластей.

2. Рассмотрим область, которая имеет достаточно произвольную геометрическую форму (фиг.1). Очевидно, что для такой области применение классических аппаратов аналитического решения затруднительно и эффективное решение задачи можно построить лишь численно.



Фиг. 1

Пусть рассматриваемая область состоит из двух разнородных частей  $B$  и  $C$ . Принципиально такая область позволяет лишь численное решение. Однако для подобласти  $B$  возможно построение аналитического решения. Представим для этой подобласти аналитическое решение, обозначая неизвестные значения напряжений и перемещений на линии контакта подобластей символической записью  $\sigma_b, u_b$ . Представим также численное решение методом МКЭ или МГЭ для подобласти  $C$ , обозначив неизвестные значения напряжений и перемещений записью  $\sigma_c, u_c$ . Написав условия непрерывности решений на

линии контакта подобластей

$$\sigma_b = \sigma_c, \quad u_b = u_c, \quad (1)$$

и присовокупив их к обычному набору уравнений, мы получим полный набор уравнений для решения задачи.

В принципе, разбиение области на подобласти произвольно. Однако для получения непрерывного, удобного для численных расчетов, решения необходимо тщательно выбрать линию раздела подобластей. Во-первых, разделяемая подобласть должна допускать аналитическое решение. Но основное требование, налагаемое на воображаемые линии (или поверхности) контакта, заключается в том, что на линии контакта не должны иметь место условия, нарушающие непрерывность решения. В частности, на поверхности контакта, в особенности на ее краях, не должны быть удовлетворены условия возникновения сингулярностей. Если такие условия имеют место, то такие зоны необходимо выделять в отдельные подобласти.

Например, в представленном на фиг.1 случае, точка  $D$  является концентратором напряжений и в ее окрестности напряжения сколь угодно возрастают, тем самым принуждая к значительному увеличению в этой области числа вычислительных операций. Очевидно, что исключение окрестности точки  $D$ , выделенной на фиг.1 пунктирной линией, из численного расчета, при адекватном учете ее воздействия, приведет к упрощению и стабилизации численного расчета.

Отметим, что условия возникновения сингулярностей в настоящее время достаточно хорошо исследованы [3-7]. Как правило, напряженное состояние в окрестности произвольного концентратора напряжений можно представить в виде произведения определенной функции, описывающей особенность напряжений, и произвольной регулярной функции, определяемой из внешних условий. В частности, в случае, представленном на фиг. 1, напряженное состояние в окрестности точки  $D$  (область  $D$ ) совпадает с напряженным состоянием в вершине составного клина, где напряжения представляются в виде [3,4]:

$$\sigma = r^\lambda f(\theta) \quad (2)$$

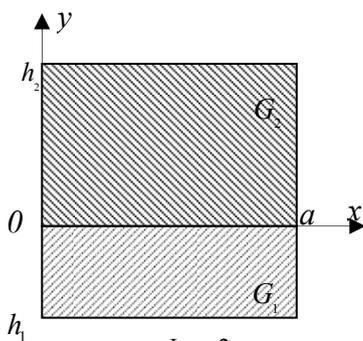
При этом под символом  $\sigma$  понимается соответствующий компонент тензора напряжений, а показатель особенности  $\lambda > -1$  зависит как от упругих характеристик материалов составляющих клиньев, так и от углов их раствора.

На основе местных решений для вершины клина напряженно-деформированное состояние области  $D$  выражается посредством неких произвольных функций  $\varphi_i(\theta)$ , заданных на воображаемой линии раздела области  $D$ , в данном случае – дуге. Число этих функций определяется постановкой задачи: в задачах изгиба и кручения необходима одна функция, в плоской задаче – две функции, а в трехмерной задаче – три функции. В качестве произвольных функций  $\varphi_i(\theta)$  могут выступать значения на линии раздела либо всех компонентов перемещений, либо всех компонентов напряжений, либо частично тех и других, либо неких потенциальных функций. При этом выбор этих функций полностью диктуется методом аналитического решения в этой области и удобством представления через них значений компонентов перемещений и напряжений на линии раздела.

Как следует из вышесказанного, полученная разрешающая система разнородна в том плане, что со стороны численного решения имеем алгебраические уравнения, а со стороны аналитического решения – функциональные. Для эффективного совмещения этих уравнений предлагается введенные в аналитические решения произвольные функции  $\varphi_i(\theta)$  заменить интерполяционными многочленами с неизвестными коэффициентами и получить представления перемещений и напряжений на линии раздела, выраженные посредством конечного числа неизвестных коэффициентов. Требуя далее выполнения условия контакта в определенных точках расчетной схемы численного решения, находящихся на линии контакта, получим замкнутую систему алгебраических уравнений, частью неизвестных которой будут коэффициенты интерполяционных многочленов.

3. Проиллюстрируем сказанное на примере решения задачи кручения неоднородного прямоугольника, аналитическое решение которой известно [8,9].

Пусть имеем прямоугольник, подвергнутый кручению и занимающий область  $\Omega = \{0 \leq x \leq a, -h_1 \leq y \leq h_2\}$  (фиг.2). При этом, модуль сдвига для области  $D_1 = \{0 \leq x \leq a, -h_1 \leq y \leq 0\}$  обозначим через  $G_1$ , а для области  $D_2 = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h_2\}$  – через  $G_2$ .



3.1. Следуя работе [8], в которой получено аналитическое решение задачи кручения нескольких прямоугольников, соединенных поочередно по общей стороне, для области  $D_2$  построим аналитическое решение, полагая, что на линии контакта функция напряжений равна некой, пока неизвестной, функции  $f(x)$ . Отметим, что в этой конкретной задаче концы линии контакта двух прямоугольников не являются источниками концентрации напряжений [4].

В области  $D_2 = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h_2\}$  функция напряжений при кручении  $U(x, y)$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2G_2 \quad (3)$$

при следующих граничных условиях:

$$U(0, y) = 0, \quad U(x, h_2) = 0, \quad U(a, y) = 0, \quad U(x, 0) = f(x). \quad (4)$$

Напряжения равны

$$\tau_{13} = \mathfrak{G} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{23} = -\mathfrak{G} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (5)$$

где  $\mathfrak{G}$  – угол кручения.

Вертикальное перемещение  $w(x, y)$  определяется формулой

$$w(x, y) = \mathfrak{G} \left[ \omega(s) + \int_0^s \frac{\partial U}{\partial n} ds \right] + w(x_0, y_0), \quad (6)$$

где  $w(x_0, y_0)$  – перемещение некой точки  $(x_0, y_0)$  рассматриваемой области,  $s$  – координата по линии, соединяющей точки  $(x, y)$  и  $(x_0, y_0)$ ,  $n$  – нормаль этой линии,  $\omega(s)$  – удвоенная площадь области, ограниченной указанной линией и векторами  $(x, y)$  и  $(x_0, y_0)$ .

После перехода к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{y}{a}, \quad h_2^* = \frac{h_2}{a}, \quad W(\xi, \zeta) = \frac{1}{G_2 a^2} U(x, y), \quad f^*(\xi) = \frac{1}{G_2 a^2} f(x)$$

уравнение (3) и условия (4) примут вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} = -2, \quad (7)$$

$$W(0, \zeta) = 0, \quad W(\xi, h_2^*) = 0, \quad W(1, \zeta) = 0, \quad W(\xi, 0) = f^*(\xi).$$

Нетрудно найти, что решением последнего уравнения, удовлетворяющим первым трем условиям (7), является

$$W(\xi, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\sinh \pi k (h_2^* - \zeta)}{\sinh \pi k h_2^*} B_k + \frac{\sinh \pi k h_2^* - \sinh \pi k \zeta}{\sinh \pi k h_2^*} \frac{4}{\pi^3 k^3} (1 - (-1)^k) \right] \sin \pi k \xi. \quad (8)$$

В случае заданной функции  $f^*(\xi)$  очевидно, что коэффициенты  $B_k$  были бы определены из четвертого условия (7), в то время как в случае неизвестной функции  $f^*(\xi)$  удовлетворение указанному условию привело бы лишь к замене одной бесконечной системы неизвестных коэффициентов другой.

3.2. Решение в смежной прямоугольной области представим методом граничных элементов, следуя работе [10]. Воспользуемся функцией кручения в непрямом методе граничных элементов.

Напряжения и перемещения выражаются формулами

$$u = -\vartheta yz, \quad v = \vartheta xz, \quad w = \vartheta P(x, y), \quad (9)$$

$$\sigma_{13} = \vartheta G_1 \left( \frac{\partial P}{\partial x} - y \right), \quad \sigma_{23} = \vartheta G_1 \left( \frac{\partial P}{\partial y} + x \right). \quad (10)$$

Здесь  $\vartheta$  – угол кручения,  $G_1$  – модуль сдвига материала области  $D_1 = \{0 \leq x \leq a, -h_1 \leq y \leq 0\}$ .

Функция кручения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Сингулярное решение этого уравнения от единичного источника, приложенного в точке  $\xi(\xi, \eta, \zeta)$ , представляется в виде:

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0},$$

где  $r$  есть расстояние между точками  $x(x, y, z)$  и  $\xi(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $r_0$  – произвольная постоянная, не влияющая на решение.

При действии единичного источника для описания напряжений введем в рассмотрение функцию

$$F(x, \xi) = -\frac{(x - \xi)n_1(x) + (y - \eta)n_2(x)}{2\pi r^2},$$

где  $n_i(x)$  – компоненты единичного вектора внешней нормали к линейному элементу.

В случае распределённой по периметру прямоугольника фиктивной нагрузки  $\varphi(\xi)$  будем иметь:

$$P(x) = \int_S G(x, \xi) \varphi(\xi) dS(\xi) + C,$$

$$h(x) = \int_S F(x, \xi) \varphi(\xi) dS(\xi).$$

Условия на свободных сторонах области  $D_1$  имеют вид:

$$h(x) = n_2 x - n_1 y. \quad (11)$$

Подвергнув дискретизации эти выражения, получим

$$P(x_0^p) = \sum_{q=1}^M \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S} G(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q) + C, \quad (12)$$

$$h(x_0^p) = -(1/2)\varphi(x_0^p) + \sum_{q=1}^M \varphi(\xi^q) \int_{\Delta S} F(x_0^p, \xi^q) dS(\xi^q). \quad (13)$$

Здесь  $x_0^p$  – координаты центра  $p$ -ого граничного элемента,  $\Delta S$  – длина  $q$ -ого граничного элемента,  $\varphi(x_0^p)$  – значение фиктивной неизвестной нагрузки в середине  $p$ -ого участка, являющееся основной неизвестной метода решения. При выполнении интегрирований в этих формулах учитывается сингулярность функций  $G(x, \xi), F(x, \xi)$ .

3.3. Таким образом, в области  $D_2$  напряжения и перемещения посредством формул (8), (5) и (6) выражаются через последовательность коэффициентов  $B_k$ , а в области  $D_1$  – посредством формул (12), (13), (9) и (10) через  $M$  значений фиктивной нагрузки  $\varphi(x_0^p)$  на каждом граничном элементе. Поскольку условия контакта (1) могут быть удовлетворены лишь в конечном числе  $K$  граничных элементов, расположенных на линии контакта, а также учитывая факт убывания коэффициентов  $B_k$  с возрастанием индекса  $k$ , можно взять в расчет только первые  $K$  членов последовательности  $B_k$ . Тогда, записав условия контакта (1) в  $K$  точках линии контакта и граничные условия на свободных границах области  $D_1$ , получим разрешающую систему из  $M + K$  алгебраических уравнений относительно  $M$  значений фиктивной нагрузки  $\varphi(x_0^p)$  и  $K$  коэффициентов  $B_k$ .

Относительно произвольных постоянных интегрирования, выражающих жесткое смещение области, отметим что они определяются благодаря дополнительным уравнениям равновесия системы. В случае нашей конкретной задачи эти постоянные равны нулю, так как уравнения равновесия заранее удовлетворены.

Исходя из полученных выше представлений, описанный подход к получению системы уравнений, разрешающей задачу в целом, является наиболее очевидным и органически вписывается в схему решения поставленной задачи.

Однако, в данном конкретном случае мы поступим несколько иначе.

Неизвестную функцию  $f^*(\xi)$ , входящую в граничные условия (7), заменим интерполяционным многочленом Лежандра по корням многочлена Чебышева первого рода.

Построим следующий интерполяционный многочлен Лежандра, который в  $N$  узлах совпадает с функцией  $f^*(\xi)$ ,

$$f_N(\xi) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \frac{f^*(s_i) T_N(2\xi - 1)}{(\xi - s_i) U_{N-1}(2s_i - 1)} = \sum_{i=1}^N f^*(s_i) g_i(\xi), \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad (14)$$

где  $T_N(\xi)$  и  $U_N(\xi)$  – многочлены Чебышева первого и второго рода,

$$g_i(\xi) = \frac{1}{N} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} T_k(2\xi - 1) T_k(2s_i - 1) \right],$$

$$s_i = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{(2i-1)\pi}{2N} \right) \quad (i = 1, \dots, N).$$

Разложим многочлены  $g_i(\xi)$  в тригонометрический ряд по синусам

$$g_i(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m^i \sin(\pi m \xi), \quad \text{где} \quad d_m^i = 2 \int_0^1 g_i(\xi) \sin(\pi m \xi) d\xi$$

и перепишем интерполяционный многочлен  $f_N(\xi)$  в виде, удобном для удовлетворения четвертому граничному условию (7),

$$f_N(\xi) = \sum_{i=1}^N f^*(s_i) \sum_{m=1}^{\infty} d_m^i \sin(\pi m \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^N f^*(s_i) d_m^i \right\} \sin(\pi m \xi). \quad (15)$$

Заменяя в граничном условии (7) функцию  $f^*(\xi)$  интерполяционным многочленом  $f_N(\xi)$  в полученном виде и удовлетворяя этому условию, найдем

$$B_k = -\frac{4}{\pi^3 k^3} \left( 1 - (-1)^k \right) + \sum_{i=1}^N d_k^i f(s_i)$$

Следовательно, для функции напряжения будем иметь выражение

$$\begin{aligned} W(\xi, \zeta) = & \sum_{i=1}^N f^*(s_i) \sum_{k=1}^{\infty} d_k^i \frac{\sinh \pi k (h_2^* - \zeta)}{\sinh \pi k h_2^*} \sin \pi k \xi + \\ & + \frac{16}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sinh \pi k \frac{(h_2^* - \zeta)}{2} \sinh \pi k \frac{\zeta}{2} \sin \pi k \xi}{\cosh \pi k \frac{h_2^*}{2} k^3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Нетрудно убедиться, что бесконечные ряды, входящие в последнее выражение, сходятся и могут быть вычислены независимо от функции  $f^*(\xi)$ .

Таким образом, в представлении функции напряжений при кручении для области  $D_2$  неизвестными остались  $N$  значений функции  $f^*(\xi)$  в узловых точках, которые должны быть определены из условий контакта областей  $D_1$  и  $D_2$ .

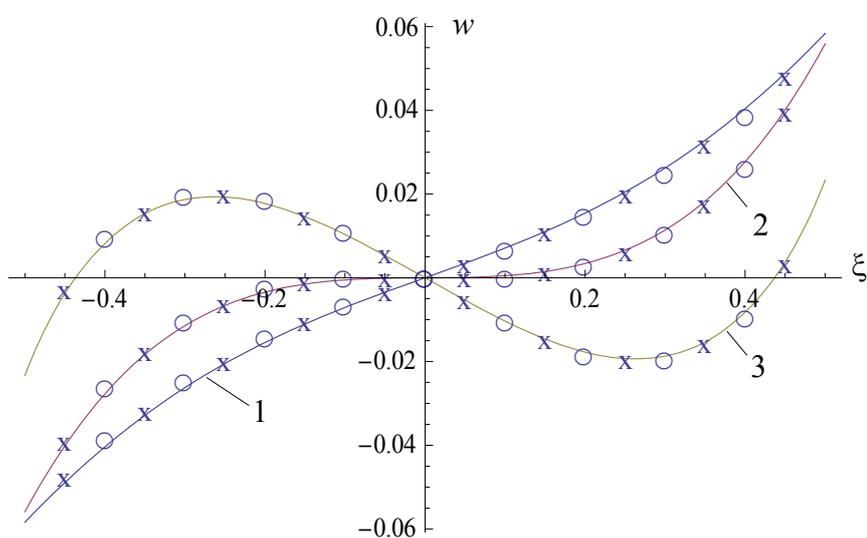
Как было отмечено выше, максимальным числом разрешающей системы алгебраических уравнений является  $M + K$ . Однако, исходя из различия в подходах к приближению неизвестных функций на контактной линии, очевидно, что число  $N$  коэффициентов интерполяционного многочлена может быть существенно ниже числа  $K$  участков разделки контактной линии. То есть, при полном удовлетворении условий контакта во всех расчетных точках контактной линии мы будем иметь переполненную систему уравнений. Возникает вопрос рационального выбора  $K + N$  точек линии контакта и условий, которые будут там удовлетворены.

Разрешающая система была построена обеспечением выполнения условий равенства перемещений во всех  $K$  расчетных точках контактной линии, а условия равенства напряжений – лишь в  $N$  ближайших к концам контактной линии точках. Таким образом, выписав все необходимые для решения задачи условия, получим систему из  $M + N$  алгебраических уравнений.

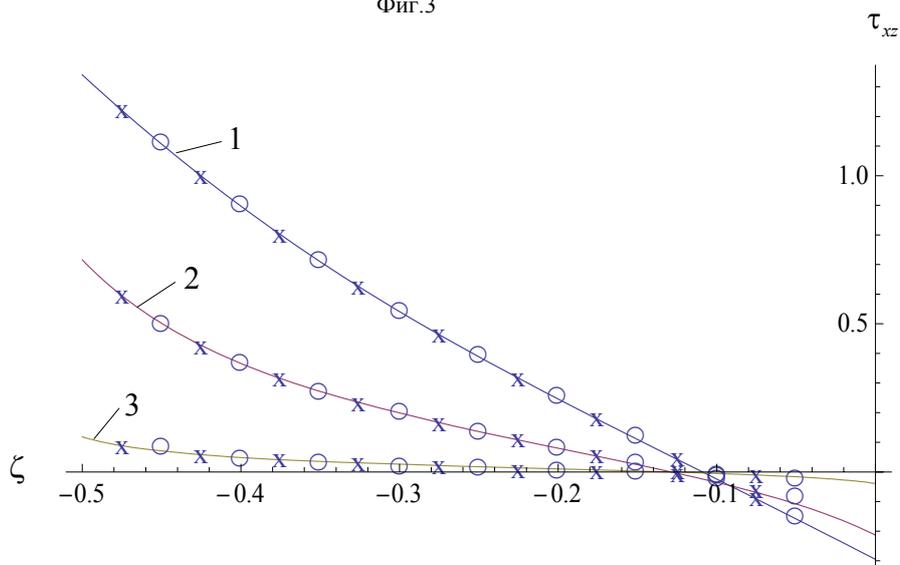
Для проведения сравнительного анализа, согласно [8], было выписано аналитическое решение всей задачи, а также построен алгоритм ее численного решения.

3.4. Вычисления были проведены по всем указанным схемам: на основе аналитического решения, численно и по предлагаемому численно – аналитическому подходу. При этом густота сетки в двух последних схемах выбрана одинаковой – 20 точек на единицу длины, а порядок интерполяции  $N$  для предлагаемой схемы изменялся от 4-ех до 14-ти. Оказалось, что результаты при  $N = 5$  и  $N = 14$  отличаются друг от друга на сотые доли процента.

Некоторые результаты проведенных вычислений показаны на фиг. 3,4. На фиг.3 показаны безразмерные перемещения точек линий  $y = -0.2$  (кривая 1),  $y = -0.35$  (кривая 2) и  $y = -0.49$  (кривая 3). На фиг.4 представлены кривые распределения безразмерных тангенциальных напряжений по площадкам  $x = 0.23$ ,  $x = 0.42$ ,  $x = 0.49$  области  $D_1$ . Сплошные линии представляют результаты аналитического решения, кружочки представляют численное решение, а крестики – численно-аналитическое решение. Вычисления проведены при отношении модулей сдвига прямоугольников  $G_1/G_2 = 5/2$ . Как видно из приведенных графиков, совпадение результатов вычислений достаточно хорошее. Сравнение численных значений перемещений и напряжений в одинаковых точках показало, что результаты численно-аналитического расчета находятся между результатами аналитических и чисто численных расчетов.



Фиг.3



Фиг.4

4. Приведенный пример имеет целью показать основные этапы применения предлагаемой методики. Однако, он не может претендовать на полноту, в основном, из-за большого разнообразия представлений аналитических решений. Выбор примера для иллюстрации продиктован наличием возможности сравнения полученных результатов с имеющимся аналитическим решением общей задачи, а также отсутствием сингулярных точек в области. К последнему случаю авторы намерены обратиться в следующей работе. Тем не менее, авторы надеются, что статья в достаточной мере выявляет суть вопроса и окажется полезной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Борзенков С.М., Матвеев В.П. Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости. //Изв. РАН. МТТ. 1995. №6. С. 48-61.
2. Ladopoulos E.G. Coupling of singular integral equation methods and finite elements in 2-D elasticity. *Forschung im Ingenieurwesen* 69 (2004) 11-16.
3. Williams M.L. Stress Singularities Resulting from various Boundary Conditions in angular corners of plates in extension. *J. of Appl. Mech.*, 19, 1952, p. 526-528.
4. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. НАН РА, 1987. 338 с.
5. Боджи Д. В. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. //Прикладная механика. Тр. Америк. о-ва инж.-механиков. Сер. Е. 1971. Т.38. №2. С.87-96.
6. Sinclair G.B. Logarithmic stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. // *Trans. of the ASME, J. appl. Mech.*, 1999. vol. 66. July, p. 556-560.
7. Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. Влияние типа граничных условий на поведение напряжений в окрестности угловой точки тонкого пьезоэлектрического клина. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. № 3. С.74-81.
8. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 688с.
9. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 720с.
10. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М: Мир, 1984. 494с.

#### Сведения об авторах:

##### **Хачикян Альберт Серобович,**

Кандидат техн. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА

Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>

Е-mail: [albert\\_khachikyan@yahoo.com](mailto:albert_khachikyan@yahoo.com)

##### **Саакян Аветик Вараздатович,**

Кандидат физ.-мат. наук. Зам.директора Института механики НАН РА,

Тел.: (37410) 568188, (37494)579348

Е-mail: [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am), [avsahakyan@gmail.com](mailto:avsahakyan@gmail.com)

##### **Саргсян Вардан Гарегинович,**

Канд. техн. наук, ведущий научн. сотр. Института механики НАН Армении

Адрес: Ереван 0064, ул. А. Бабаджаняна 67, кв. 36; Тел.: (+37410)74-02-89

Поступила в редакцию 02.03.2010