ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №1, 2011 Механика

УДК 539.3

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В УПРУГОМ СЛОЕ

МЕЛКОНЯН А.В.

Ключевые слова: упругий слой, волна, фазовая скорость, динамические потенциалы, уравнение Рэлея.
Keywords: elastic layer, wave, phase speed, dynamic potentials, Rayleigh's equation.

Մելքոնյան Ա.Վ.
Առաձգական շերտում ալիքների տարածման եռաչափ խնդիրը

Աշխատանքում դիտարկված է առաձգական շերտում ալիքների տարածման եռաչափ խնդիրը: Շերտը սահմանափակող հարթությունների վրա տրված են նորմալ լարման, շոշափող լարումներից մեկի և շոշափող տեղափոխություններից մեկի զրոյի հավասարվելու պայմանները: Սիմետրիկ և շեղ սիմետրիկ տատանումների ֆազային արագության համար ստացվել են բնութագրիչ հավասարումներ: Դիտարկվել են սահմանային դեպքեր, երբ ալիքի երկարությունը շատ մեծ է և շատ փոքր է շերտի հաստության համեմատ: Բերված են ալիքի ֆազային արագության համար թվային հաշվարկներ:

Melkonyan A.V.
Three-dimensional Problem of Wave's Propagation in Elastic Layer

The three-dimensional problem of wave's propagation in an elastic layer is considered. On planes limiting a layer, the conditions of equality to zero of a normal stress, one of the tangent stresses and one of the tangent displacements are given. For phase speed of symmetric and antisymmetric vibrations the characteristic equations are received. The limiting cases are considered: length of a wave is very great and very small in comparison with thickness of the layer. The numerical accounts for phase speed of the wave are given.

Рассматривается трехмерная задача распространения волн в упругом слое. На плоскостях, ограничивающих слой, заданы условия равенства нулю нормального напряжения, одного из касательных напряжений и одного из касательных перемещений. Для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний получены характеристические уравнения. Рассмотрены предельные случаи: длина волны очень велика и очень мала по сравнению с толщиной слоя. Приведены числовые расчеты для фазовой скорости волны.

1. Рассмотрим упругий слой толщиной $2h$. В прямоугольной декартовой системе координат $(oxyz)$ слой занимает следующую область: $x \in (-\infty;+\infty)$, $y \in (-\infty;+\infty)$, $z \in [-h,h]$. Пусть в этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью c. Для уравнения распространения упругих волн в слое (уравнение Ламе) [1]

$$c_2^2 \Delta \vec{u} + \left(c_1^2 - c_2^2\right) \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{u} = \ddot{\vec{u}} \qquad (1.1)$$

вводится преобразование Ламе [1]

$$\vec{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \vec{\psi} \quad (\operatorname{div} \vec{\psi} = 0) \qquad (1.2)$$

Здесь приняты следующие общеизвестные обозначения: $c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}, c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ – скорости распространения продольной и поперечной волн соответственно,

$\vec{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ – вектор перемещения, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$,

$\ddot{\vec{u}} = \dfrac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$, $\varphi(x,y,z,t)$ и $\vec{\psi}(x,y,z,t)$ – динамические потенциалы, λ и μ – коэффициенты Ламе.

Подстановка (1.2) в уравнения (1.1) приводит к следующим волновым уравнениям [1-3]:

$$\Delta\varphi - c_1^{-2}\ddot{\varphi} = 0, \quad \Delta\vec{\psi} - c_2^{-2}\ddot{\vec{\psi}} = 0. \tag{1.3}$$

Общее решение уравнений (1.3) представляется в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z,t) &= \varphi^*(z) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\ \vec{\psi}(x,y,z,t) &= \vec{\psi}^*(z) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Согласно (1.4), уравнения (1.3) приводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций $\varphi^*(z)$ и $\vec{\psi}^*(z)$. Решая полученные уравнения для динамических потенциалов, будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z,t) &= (A\mathrm{sh}\nu_1 z + B\mathrm{ch}\nu_1 z) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \\ \vec{\psi}(x,y,z,t) &= \left(\vec{C}\mathrm{sh}\nu_2 z + \vec{D}\mathrm{ch}\nu_2 z\right) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\nu_1^2 = k^2(1-\eta\theta),\ \nu_2^2 = k^2(1-\eta),\ \eta = \frac{c^2}{c_2^2},\ \theta = \frac{c_2^2}{c_1^2},\ k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

$A, B, \vec{C}(C_1, C_2, C_3), \vec{D}(D_1, D_2, D_3)$ – неизвестные постоянные.

Напряжения, согласно закону Гука и преобразованию (1.2), выражаются через динамические потенциалы следующими формулами [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu\left(\partial_1^2\varphi + \partial_1\partial_2\psi_3 - \partial_1\partial_3\psi_2\right) + \lambda\Delta\varphi \\ \sigma_{22} &= 2\mu\left(\partial_2^2\varphi + \partial_2\partial_3\psi_1 - \partial_1\partial_2\psi_3\right) + \lambda\Delta\varphi \\ \sigma_{33} &= 2\mu\left(\partial_3^2\varphi + \partial_1\partial_3\psi_2 - \partial_2\partial_3\psi_1\right) + \lambda\Delta\varphi \\ \sigma_{12} &= \mu\left(2\partial_1\partial_2\varphi + \partial_1\partial_3\psi_1 - \partial_2\partial_3\psi_2 + \partial_2^2\psi_3 - \partial_1^2\psi_3\right) \\ \sigma_{13} &= \mu\left(2\partial_1\partial_3\varphi + \partial_2\partial_3\psi_3 - \partial_1\partial_2\psi_1 + \partial_1^2\psi_2 - \partial_3^2\psi_2\right) \\ \sigma_{23} &= \mu\left(2\partial_2\partial_3\varphi + \partial_1\partial_2\psi_2 - \partial_1\partial_3\psi_3 + \partial_3^2\psi_1 - \partial_2^2\psi_1\right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Примем, что на плоскостях, ограничивающих слой, заданы следующие граничные условия (стесненный свободный край) [4]:

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = 0, \quad u_2 = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h. \tag{1.7}$$

Здесь, в отличие от условий свободной границы, ставится ограничение на перемещение вдоль оси oy. Подставляя (1.5) в (1.2) и (1.6) и используя граничные условия (1.7), получим систему восьми линейных однородных уравнений, содержащих постоянные $A, B, \vec{C}$ и $\vec{D}$. Приравнивание определителя этой системы уравнений нулю приводит к характеристическому уравнению, из которого при заданных значениях θ и k можно найти фазовую скорость c.

2. Упростим задачу, рассмотрев две системы частных решений [1]:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = B\mathrm{ch}\nu_1 z\cdot\exp i\left(k_1x+k_2y-ckt\right)\\
&\psi_{11} = C_1\mathrm{sh}\nu_2 z\cdot\exp i\left(k_1x+k_2y-ckt\right)\\
&\psi_{12} = C_2\mathrm{sh}\nu_2 z\cdot\exp i\left(k_1x+k_2y-ckt\right)\\
&\psi_{13} = D_3\mathrm{ch}\nu_2 z\cdot\exp i\left(k_1x+k_2y-ckt\right)
\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_2 = A\mathrm{sh}\,\nu_1 z\cdot\exp i\left(k_1x+k_2y-ckt\right)\\
&\psi_{21} = D_1\mathrm{ch}\nu_2 z\cdot\exp i\left(k_1x+k_2y-ckt\right)\\
&\psi_{22} = D_2\mathrm{ch}\nu_2 z\cdot\exp i\left(k_1x+k_2y-ckt\right)\\
&\psi_{23} = C_3\mathrm{sh}\nu_2 z\cdot\exp i\left(k_1x+k_2y-ckt\right)
\end{aligned}\tag{2.2}$$

Подставляя формулы (2.1) в соотношения (1.2), нетрудно заметить, что перемещения u_1 и u_2 являются симметричными, а u_3- антисимметричным относительно плоскости $z=0$. Напряжения $\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{22},\sigma_{33}$ симметричны, а σ_{13} и σ_{23} антисимметричны относительно плоскости $z=0$. Решение (2.1) соответствует симметричному виду колебаний. Используя указанные свойства симметрии, достаточно учесть граничные условия только при $z=h$. Граничные условия при $z=h$ согласно (1.2) и (1.6) примут вид:

$$\begin{aligned}
&2\partial_1\partial_3\varphi+\partial_2\partial_3\psi_3-\partial_1\partial_2\psi_1+\partial_1^2\psi_2-\partial_3^2\psi_2=0\\
&2\mu\left(\partial_3^2\varphi+\partial_1\partial_3\psi_2-\partial_2\partial_3\psi_1\right)+\lambda\Delta\varphi=0\\
&\partial_2\varphi+\partial_3\psi_1-\partial_1\psi_3=0
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Подставляя (2.1) в граничные условия (2.3) с учетом условия $\mathrm{div}\vec{\psi}=0$, получим систему четырех однородных уравнений относительно C_1,C_2,B,D_3:

$$\begin{aligned}
&ik_2\mathrm{ch}\nu_1h\cdot B+\nu_2\mathrm{ch}\nu_2h\cdot C_1-ik_1\mathrm{ch}\nu_2h\cdot D_3=0\\
&2ik_1\nu_1\mathrm{sh}\nu_1h\cdot B+k_1k_2\mathrm{sh}\nu_2h\cdot C_1-\left(k_1^2+\nu_2^2\right)\mathrm{sh}\nu_2h\cdot C_2+ik_2\nu_2\mathrm{sh}\nu_2h\cdot D_3=0\\
&\left(\left(\lambda+2\mu\right)\nu_1^2-\lambda k^2\right)\mathrm{ch}\nu_1h\cdot B-2ik_2\nu_2\mu\mathrm{ch}\nu_2h\cdot C_1+2ik_1\nu_2\mu\mathrm{ch}\nu_2h\cdot C_2=0\\
&ik_1\cdot C_1+ik_2\cdot C_2+\nu_2\cdot D_3=0
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Из условия существования нетривиального решения системы уравнений (2.4) получим характеристическое уравнение:

$$\frac{\mathrm{th}\nu_1h}{\mathrm{th}\nu_2h}=\frac{\left(2-\eta\right)^2-\xi^2\eta\left(1-\eta\right)}{4\sqrt{\left(1-\eta\theta\right)\left(1-\eta\right)}}\tag{2.5}$$

где $\xi=k_2/k_1$.

Рассмотрим предельные случаи. Если длина волны $l={}^{2\pi}\!/_{k}$ очень велика по сравнению с толщиной слоя $2h$, то величины ν_1h и ν_2h будут малы при конечном значении c. Заменяя в уравнении (2.5) гиперболические тангенсы их аргументами, получим

$$\left(2-\eta\right)^2-4\left(1-\eta\theta\right)-\xi^2\eta\left(1-\eta\right)=0\,,\tag{2.6}$$

откуда, кроме $\eta=0$ имеем

$$c_\xi=\frac{2c_2}{c_1}\sqrt{\frac{4\left(c_1^2-c_2^2\right)+\xi^2c_1^2}{4\left(1+\xi^2\right)}}\tag{2.7}$$

В частном случае $\xi = 0$ ($k_2 = 0$, плоская деформация) из (2.7) получаем [1]

$$c = c_N = \frac{2c_2}{c_1}\sqrt{c_1^2 - c_2^2} \tag{2.8}$$

Из (2.7) видно, что в отличие от плоской деформации волна обладает свойством дисперсии т.е. зависит от ξ.

В табл.1 приведены значения безразмерного параметра $\beta = \frac{c^2}{c_N^2} = \frac{4(1-\theta)+\xi^2}{4(1-\theta)\left(1+\xi^2\right)}$, определяющие фазовую скорость волны в зависимости от ξ для фиксированных значений θ.

Таблица 1

$\theta = 0(\nu = 0,5)$											
ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4	5	10	100
β	1	0,971	0,897	0,802	0,707	0,625	0,4	0,294	0,279	0,257	0,250
$\theta = 1/3(\nu = 0,25)$											
ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4	5	10	100
β	1	0,976	0,914	0,835	0,756	0,688	0,5	0,412	0,399	0,381	0,375
$\theta = 1/2(\nu = 0)$											
ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4	5	10	100
β	1	0,981	0,931	0,868	0,805	0,75	0,6	0,530	0,519	0,505	0,500

Из табл.1 видно, что с возрастанием ξ безразмерный параметр фазовой скорости β уменьшается. При уменьшении коэффициента Пуассона (ν) безразмерный параметр фазовой скорости β увеличивается при фиксированных значениях ξ.

Отметим, что уравнение (2.6) не имеет решения, удовлетворяющего условию $\eta < 1$.

Предположим, далее, что длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя $2h$. Тогда величины $\nu_1 h$ и $\nu_2 h$ очень велики, а отношение гиперболических тангенсов в левой части уравнения (2.5) можно принять равным единице. В этом предельном случае получим

$$(2-\eta)^2 - 4\sqrt{(1-\eta\theta)(1-\eta)} - \xi^2\eta(1-\eta) = 0. \tag{2.9}$$

В частном случае $\xi = 0$ (плоская деформация) уравнение (2.9) совпадает с классическим уравнением Рэлея. Уравнение (2.9) подробно исследовано в работе [4,5].

В общем случае симметричных колебаний фазовую скорость c требуется определить из уравнения (2.5).

Из уравнения (2.5) делаем вывод, что фазовая скорость c зависит от $k_1 h$ и ξ и поэтому имеет место дисперсия. Из рассмотренных предельных случаев следует, что для первой формы колебаний фазовая скорость лежит в интервале [$c_{R\xi}, c_\xi$]. ($c_{R\xi}$ – значение фазовой скорости поверхностной волны (2.9)).

Перейдем к колебаниям, выраженным формулами (2.2). Подставляя (2.2) в формулы для перемещений (1.2), замечаем, что u_1 и u_2 антисимметричны, а u_3 симметричны относительно плоскости $z = 0$. Используя формулы (1.6), убеждаемся, что напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ антисимметричны относительно плоскости $z = 0$, а

σ_{13},σ_{23} симметричны относительно этой плоскости. Подставляя формулы (2.2) в граничные условия (2.3), получим систему четырех уравнений:

$$
\begin{aligned}
& ik_2 \mathrm{sh}\nu_1 h\cdot A - ik_1 \mathrm{sh}\nu_2 h\cdot C_3 + \nu_2 \mathrm{sh}\nu_2 h\cdot D_1 = 0 \\
& 2ik_1\nu_1 \mathrm{ch}\nu_1 h\cdot A + ik_2\nu_2 \mathrm{ch}\nu_2 h\cdot C_3 + k_1k_2 \mathrm{ch}\nu_2 h\cdot D_1 - \left(k_1^2+\nu_2^2\right)\mathrm{ch}\nu_2 h\cdot D_2 = 0 \\
& \left((\lambda+2\mu)\nu_1^2 - \lambda k^2\right)\mathrm{sh}\nu_1 h\cdot A - 2ik_2\nu_2\mu \mathrm{sh}\nu_2 h\cdot D_1 + 2ik_1\nu_2\mu \mathrm{sh}\nu_2 h\cdot D_2 = 0 \\
& \nu_2\cdot C_3 + ik_1\cdot D_1 + ik_2\cdot D_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Приравнивание определителя этой системы нулю дает характеристическое уравнение

$$\frac{\mathrm{th}\nu_1 h}{\mathrm{th}\nu_2 h} = \frac{4\sqrt{(1-\eta\theta)(1-\eta)}}{(2-\eta)^2 - \xi^2\eta(1-\eta)}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим и здесь предельные случаи. Пусть длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя $2h$ и $c < c_2$. Разлагая гиперболические тангенсы в ряд и сохраняя три члена ряда, после некоторых преобразований и исключая корень $\eta = 0$, получим

$$\eta - \frac{4}{3}(kh)^2(1-\theta) - \xi^2(1-\eta)\left(1 - \frac{(kh)^2}{3}(1-\eta\theta)\right) = 0. \tag{2.12}$$

Учитывая, что $kh = k_1 h\sqrt{1+\xi^2}$, уравнение (2.12) можно записать в виде

$$\eta - \frac{4}{3}(k_1 h)^2\left(1+\xi^2\right)(1-\theta) - \xi^2(1-\eta)\left(1 - \frac{(k_1 h)^2}{3}\left(1+\xi^2\right)(1-\eta\theta)\right) = 0. \tag{2.13}$$

Из уравнения (2.13) можно определить фазовую скорость волн изгиба. Здесь мы имеем дело с дисперсией волны – фазовая скорость зависит от $k_1 h$ и ξ. При $\xi = 0$ из (2.13) получаем $c^2 = \frac{4}{3}c_2^2(k_1 h)^2(1-\theta)$ – значение фазовой скорости волн изгиба в случае плоской деформации [1,6].

В табл.2 приведены безразмерные значения фазовой скорости волн изгиба. При фиксированных $k_1 h$ с возрастанием ξ безразмерное значение фазовой скорости волн изгиба увеличивается. При $\xi \to \infty$ фазовая скорость в слое стремится к c_2.

Таблица 2

$\theta = \frac{1}{3}(\nu = 0,25)$						
$\xi = 0$		$\xi = 0,4$	$\xi = 0,8$	$\xi = 1$	$\xi = 4$	$\xi = 10$
$k_1 h$	η_1	η_1	η_1	η_1	η_1	η_1
0	0	0,137931	0,390244	0,5	0,941176	0,990099
0,001	0,000001	0,137932	0,390245	0,500001	0,941177	0,9901
0,003	0,000008	0,137939	0,390251	0,500007	0,941183	0,990105
0,005	0,000022	0,137952	0,390263	0,500019	0,941193	0,990116
0,01	0,000089	0,138016	0,390321	0,500075	0,941244	0,990166
0,03	0,0008	0,138692	0,390942	0,500675	0,941785	0,990712
0,05	0,002222	0,140044	0,392184	0,501877	0,942876	0,991868
0,1	0,008889	0,146387	0,398019	0,507525	0,948175	0,998698

При другом предельном случае длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя, имеем, что при $k_1 h \to \infty$ и $c < c_2$ левая часть уравнения (2.11) стремится к единице и уравнение (2.11) сводится к уравнению (2.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA., vol. 93, 1917.
3. Ишков П.К. О распространении упругих волн в слое, лежащем на жёстком основании. //Изв. АН СССР. Сер. географическая и геофизическая.1941. №2.
4. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трехмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея. //Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. №4.
5. Knowles J. K. A note on surface waves. Journal of Geophysical Research. 1966, vol. 21, №22.
6. Мелконян А.В., Саркисян С.В. К пространственной задаче распространения упругих волн в пластинке. //Сб. трудов международной школы-конференции молодых ученых. Механика, 2009. Ереван: 2009.

Мелконян Аветик Варданович
Аспирант кафедры механики факультета математики и механики ЕГУ
Адрес: ул. Алека Манукяна 1, ЕГУ, Ереван, Армения
Тел.: (+37491) 31-50-57, E-mail: av.mlk@inbox.ru

Поступила в редакцию 27.05. 2010