

УДК 539.3

**РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИХ ШТАМПОВ ПО ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ
БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА**

АМИРДЖАНЫАН А.А.

Ключевые слова: штамп, контактные задачи, равномерное движение, полый цилиндр
Key words: hollow cylinder, contact problems, uniform motion, rigid punch.

Ամիրջանյան Հ. Ա.

**Բացարձակ կոշտ դրոշմների պարբերական համակարգի, հավասարաչափ շարժումը անվերջ,
սնամեջ գլանի միջով**

Դիտարկված է անվերջ, սնամեջ գլանի առանցքաափնետրիկ լարվածային վիճակը, երբ գլանի ներքին մակերևույթով հաստատուն արագությամբ շարժվում է բացարձակ կոշտ դրոշմների պարբերական համակարգ, իսկ արտաքին մակերևույթը ազատ է, կամ կոշտ ամրակցված:

Ուսումնասիրված է դրոշմների տակ գործող լարումների վարքը, կախված գլանի ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերից

Amirjanyan H. A.

On Uniform Motion of a Periodic System of Absolutely Rigid Stamps, in the Hollow Cylinder

Axissymmetric stress state of the infinite hollow cylinder when on the inner surface of the cylinder acts a periodic system of uniformly moving circular stamps and the outer surface is free of loads or rigidly clamped is considered

The behavior of the contact stresses, acting under the stamp, in dependence on the physical and geometrical parameters of the cylinder is studied.

Рассмотрено осесимметричное напряженное состояние бесконечного полого цилиндра, по внутренней поверхности которого с постоянной скоростью движется периодическая система абсолютно жёстких кольцевых штампов, а внешняя поверхность свободна от нагрузок или жестко закреплена.

Исследовано поведение контактных напряжений, действующих под штампами, в зависимости от физических и геометрических параметров цилиндра.

Пусть по внутренней поверхности бесконечного упругого полого цилиндра с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r_1 , изготовленного из материала с модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν , с постоянной скоростью V_0 движется периодическая система абсолютно жёстких, осесимметричных штампов, а внешняя поверхность полого цилиндра свободна от нагрузок или жестко закреплена.

Будем считать, что скорость движения вкладышей V_0 меньше скорости распространения поверхностных волн в полом цилиндре, а в зоне контакта цилиндра с вкладышем имеет место сухое трение, т.е. между касательными напряжениями и давлениями под вкладышем имеется связь по закону Кулона

$$\tau(z) = f \sigma(z), \quad (1)$$

где f – коэффициент трения.

Ставится задача: определить давление в зоне контакта вкладыша с цилиндром и изучить закономерности его изменения в зависимости от физических и геометрических параметров цилиндра и вкладыша.

Предположим, что вкладыши имеют цилиндрическую форму с радиусом $r_0 + \delta$. Тогда, условие контакта в движущейся со скоростью v_0 цилиндрической системе координат $OxOz$, ось Oz которой направлена по главной оси цилиндра, будет иметь вид

$$u_r(r_0, z) = \delta, \quad (2)$$

где $u_r(r_0, z)$ – нормальное смещение точек внутренней границы цилиндра, δ – разность радиусов вкладыша и цилиндра.

Согласно результатам работы [1], радиальная компонента перемещений точек внутренней границы цилиндра под воздействием осесимметрично распределенных сосредоточенных нормальных и касательных нагрузок интенсивности P и Q имеет вид:

$$u_r(r_0, z) = \frac{P}{\pi\mu} \left(\vartheta_1 \ln \frac{1}{|z|} + \int_0^\infty \tilde{K}_{21}(kr_0) \frac{\cos(kz)}{k} dk \right) + \frac{Q}{\pi\mu} \left(\vartheta_0 \vartheta_1 \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} z + \int_0^\infty \tilde{K}_{22}(kr_0) \frac{\sin(kz)}{k} dk \right),$$

где

$$\vartheta_0 = \frac{\beta - \alpha_1 \alpha_2}{(1 - \beta) \alpha_1}; \quad \vartheta_1 = \frac{(1 - \beta) \alpha_1}{2(\beta^2 - \alpha_1 \alpha_2)}; \quad \alpha_1 = \sqrt{1 - \theta \eta}; \quad \alpha_2 = \sqrt{1 - \eta},$$

$$\beta = \frac{1 + \alpha_2^2}{2} = 1 - \frac{\eta}{2}; \quad \eta = \left(\frac{v_0}{c_2} \right)^2; \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad \theta = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)},$$

а значения функций $\tilde{K}_{ij}(z)$ ($i, j = 1, 2$) приведены в работе [1] и здесь не приводятся из-за громоздкости.

Тогда, на основании принципа суперпозиции, для периодической с периодом $2L$ системы сил P и Q имеем

$$u_r(r_0, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P}{\pi\mu} \left(\vartheta_1 \ln \frac{1}{|z - 2nL|} + \int_0^\infty \tilde{K}_{21}(kr_0) \frac{\cos k(z - 2nL)}{k} dk \right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Q}{\pi\mu} \left(\vartheta_0 \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(z - 2nL) + \int_0^\infty \tilde{K}_{22}(kr_0) \frac{\sin k(z - 2nL)}{k} dk \right).$$

Для распределённых на интервалах $(-a + 2nL, a + 2nL)$ оси Oz нормальных и касательных нагрузок интенсивности $\sigma(z)$ и $\tau(z)$, связанных условием (1), можем записать:

$$u_r(r_0, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left(G \left(\frac{s-z}{r_0} \right) - \vartheta_1 \ln \sin \frac{\pi|s-z|}{2L} - \frac{\pi}{2} f \vartheta_0 \vartheta_1 \operatorname{sgn}(s-z) \right) \frac{\sigma(s)}{\mu} ds, \quad (3)$$

где

$$G(z) = \frac{\pi}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\pi m} \left(\tilde{K}_{21} \left(\frac{\pi}{\lambda} m \right) \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} mz \right) + f \tilde{K}_{22} \left(\frac{\pi}{\lambda} m \right) \sin \left(\frac{\pi}{\lambda} mz \right) \right) + C_0,$$

$$\lambda = \frac{L}{r_0} \quad C_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left(\mathfrak{G}_1 + \tilde{K}_{21} \left(\frac{\pi}{\lambda} k \right) \right).$$

Здесь использован факт, что на интервале $(-L, L)$ имеют место соотношения:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-2nL} = \frac{\pi}{2L} \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2L}; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln|x-2nL| = \ln \sin \frac{\pi x}{2L},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-2nL) = \delta(x); \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^n} = \operatorname{Li}_n(e^{ix}),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik2Ln} = \frac{\pi}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(k - \frac{\pi}{L} m\right),$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ik(x-2nL)} dk &= \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik2nL} dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik2nL} dk = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} \frac{\pi}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(k - \frac{\pi}{L} m\right) dk = \frac{\pi}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{L} m\right) e^{i\frac{\pi}{L} mx} \end{aligned}$$

Теперь удовлетворим условию контакта (2), первоначально продифференцировав его по z . В итоге, для определения неизвестного контактного давления $\sigma(x)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение второго рода:

$$f \mathfrak{G}_0 \frac{\sigma(z)}{\mu} + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{s-z} \frac{\sigma(s)}{\mu} ds + \frac{1}{\pi \mathfrak{G}_1} \int_{-a}^a \frac{1}{r_0} K\left(\frac{s-z}{r_0}\right) \frac{\sigma(s)}{\mu} ds = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$K(z) = \frac{\pi}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tilde{K}_{21} \left(\frac{\pi}{\lambda} m \right) \sin \frac{\pi m z}{\lambda} + f \tilde{K}_{22} \left(\frac{\pi}{\lambda} m \right) \cos \frac{\pi m z}{\lambda} \right) + \mathfrak{G}_1 \left(\frac{\pi}{2\lambda} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2\lambda} - \frac{1}{z} \right).$$

Для получения однозначного решения к уравнению (4) нужно добавить условие

$$u_r(r_0, 0) = \delta. \quad (5)$$

После решения уравнения (4) при условии (5), легко определить равнодействующее контактных напряжений по формуле

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = P. \quad (6)$$

Заметим, что для численных расчетов в качестве дополнительного условия к уравнению (4) удобнее использовать условие (6), задавая наперед равнодействующее контактных напряжений P , а затем, из условия (5) можно будет найти соответствующую разность радиусов вкладыша и цилиндра. В дальнейшем, мы так и поступим.

Уравнение (4) будем решать при помощи метода дискретных особенностей [2]. Для этого, при помощи замены переменных

$$z = at; \quad s = a\tau; \quad s, z \in (-a, a),$$

интегральное уравнение (4) запишем на интервале $(-1, 1)$ и введём обозначения

$$\sigma^*(t) = \frac{1}{\mu} \sigma(at); \quad p^* = \frac{P}{a\mu}; \quad K^*(t) = \frac{1}{\vartheta_1 r_0} K\left(\frac{a}{r_0}(t)\right).$$

Получим уравнение

$$f\vartheta_0\sigma^*(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma^*(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K^*(\tau-t)\sigma^*(\tau) d\tau = 0. \quad (7)$$

Условие (6), при этом, принимает вид:

$$\int_{-1}^1 \sigma^*(\tau) d\tau = p^*. \quad (8)$$

Используя известные результаты Н.И.Мусхелишвили [3] о поведении сингулярного интеграла у концов отрезка интегрирования, решение уравнения (7) представим в виде:

$$\sigma^*(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \varphi(t) = \omega(t)\varphi(t), \quad (9)$$

где α и β – те решения уравнений

$$\text{ctg}(\alpha\pi) + f\vartheta_0 = 0; \quad -\text{ctg}(\beta\pi) + f\vartheta_0 = 0; \quad 0 < |\alpha|, |\beta| < 1,$$

которые обеспечивают надлежащее поведение искомых функций в точках ± 1 . Очевидно, что в рассматриваемом случае искомая функция в конечных точках неограничена. Следовательно, α и β будут даваться формулами:

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \gamma; \quad \beta = -\frac{1}{2} - \gamma; \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \arctg(f\vartheta_0).$$

Неизвестную функцию $\varphi(t)$ заменим интерполяционным многочленом $\varphi_n(t)$, определяемым формулой

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{(t-\tau_i) P_n^{(\alpha,\beta)}(\tau_i)}, \quad (10)$$

где $\varphi_m = \varphi(\tau_m)$, а $\{\tau_m\}_{m=1}^n$ – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$.

Как и в [4], для функции $K(z)$ в окрестности точки $z=0$ имеет место следующее представление:

$$K(z) = -\log|z| K_L(z) + \frac{\pi}{2} \text{sgn}(z) K_S(z) + K_{RP}(z), \quad (11)$$

где $K_{L,S,RP}(z)$ – достаточно гладкие функции, хорошо аппроксимируемые полиномами, и $K_L(z)$ и $K_S(z)$ совпадают с соответствующими функциями в [4].

Сохраняя обозначения работы [4] и используя приведённые там квадратурные формулы для интегралов, содержащих $\log|z|$ и $\text{sgn}(z)$, заменим в (7) и (8) интегралы квадратурными формулами. Далее, приравнявая обе части уравнения (7) в корнях полинома Якоби $P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(z)$, $z = \zeta_j$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно φ_i :

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i}{(\tau_i - \zeta_j)} + w_i K_{RP}^*(z_i, \zeta_j) + \chi_{Si}(\zeta_j) K_S^*(z_i, \zeta_j) + \chi_{Li}(\zeta_j) K_L^*(z_i, \zeta_j) \right) \varphi_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_i = p^*, \quad (12)$$

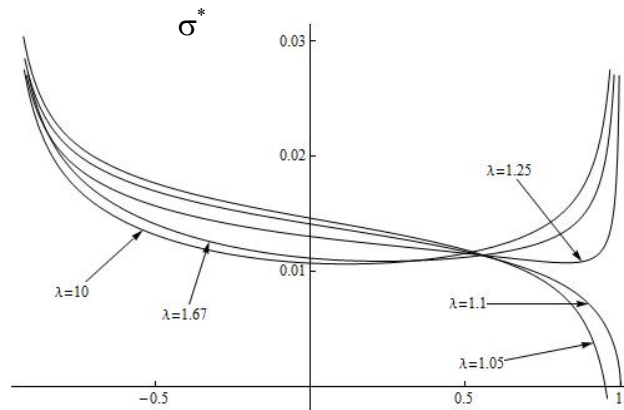
где

$$w_i = -\frac{2^{\alpha+\beta}}{\sin \pi \alpha} \frac{P_{n+\alpha+\beta}^{(-\alpha, -\beta)}(\tau_i)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(\tau_i)}.$$

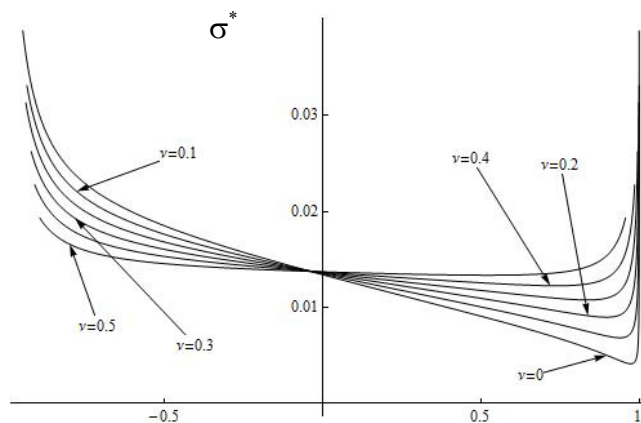
Проведен численный анализ и изучено изменение контактного давления в зависимости от физических и геометрических параметров цилиндра и вкладыша с плоским основанием. Результаты вычислений приведены в виде графиков на фиг.1 и фиг.2. На фиг.1 приведены графики контактного давления для различных значений параметра $\lambda = L/a$ в случае, когда внешняя поверхность цилиндра свободна от напряжений и $\nu = 0,3$, $f = 0,3$, $\eta = 0,4$, $p^* = 0,1$, $r_1/r_0 = 2,5$, $a/r_0 = 1$. Как видно из графиков, при уменьшении этого параметра, т.е. когда вкладыши приближаются друг к другу, контактное давление в передней части контактной зоны уменьшается и при $\lambda < 1,101$ становится отрицательным. Это означает, что чем меньше расстояние между вкладышами, тем больше вероятность отрыва передней части вкладыша от матрицы. При увеличении же расстояний между вкладышами контактные напряжения под вкладышами стремятся к определенному закону распределения, соответствующему случаю движения одного вкладыша в цилиндре с цилиндрической выемкой.

Нужно отметить также, что при увеличении толщины цилиндра предельное значение λ , при котором нормальные напряжения меняют знак, уменьшается.

На фиг. 2 приведены графики контактного давления для различных значений коэффициента Пуассона в случае, когда внешняя поверхность цилиндра закреплена, $f = 0,3$, $\eta = 0,4$, $p^* = 0,1$, $r_1/r_0 = 2,5$, $a/r_0 = 1$, $L/a = 1,2$. Как видно из графиков, при увеличении коэффициента Пуассона контактное давление в передней части контактной зоны уменьшается, а в задней части увеличивается.



Фиг.1



Фиг.2

ЛИТЕРАТУРА

1. Амирджанян А.А. Равномерное движение силовых нагрузок по внутренней поверхности бесконечного полого цилиндра //Тр.Международной школы-конференции молодых учёных “Механика –2009”, М550, Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2009. С.140-144.
2. Саакян А.В. Численный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с комплексным коэффициентом //Докл. НАН Армении. 1997. Т.97. №4. С.32-36.
3. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 510с.
4. Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Равномерное движение абсолютно жёсткого штампа по внутренней поверхности бесконечного полого цилиндра. //В сб. научных трудов Международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Т.1. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2010. С.81-85.

Сведения об авторе:

Амирджанян Арутюн Арменович – аспирант Института механики НАН Армении
Тел.: (37410) 27-62-23
E-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 03.11.2010