

ЗАДАЧА О ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОЙ ВСТРЕЧЕ НЕСКОЛЬКИХ
УПРАВЛЯЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ
БАРСЕГЯН В.Р., СТЕПАНЯН А.А.

Ключевые слова: космические аппараты, парето-оптимальное управление, встреча, затраты на управление

Keywords: spacecrafts, pareto-optimal control, encounter, charges for control

Բարսեղյան Վ.Ռ., Ստեփանյան Ա.Ա.

Մի քանի ղեկավարվող տիեզերական սարքերի պարետո-օպտիմալ հանդիպման մասին

Գիտարկվում է մի քանի ղեկավարվող տիեզերական սարքերի մոտեցման խնդիրը, երբ շարժումը տեղի է ունենում բարակ սֆերիկ շերտում, շարժիչները աշխատում են անընդհատ, իսկ Երկրի ձգողականության ուժից բացի բոլոր զրգռող ուժերը անտեսվում են: Հաշվի առնելով ղեկավարող կողմերի անհատական շահերը՝ ձևավորված է շահույթի վեկտոր-ֆունկցիան, և կառուցված է պարետո-օպտիմալ լուծումը: Բերված է երեք օբյեկտների հանդիպման օրինակը:

Barseghyan V.R., Stepanyan A.A.

About Pareto-Optimal Encounter of Several Controllable Spacecrafts

The problem of encounter of several controllable spacecrafts is considered, when the motion takes place in the thin spherical layer, the controll engines run continuously and except the forces of the Earth's attraction all disturbing forces are neglected. Taking into consideration the individual interests of controlling sides the vector-function of gain is formed and the pareto-optimal solution is constructed. The example of encounter of three objects is given.

Рассматривается задача встречи нескольких управляемых космических аппаратов, когда движение происходит в тонком сферическом слое, двигатели управления работают непрерывно и кроме сил притяжения Земли все возмущающие силы пренебрегаются. Учитывая индивидуальные интересы управляющих сторон, сформулирована векторная функция выигрыша и построено парето-оптимальное решение. Приведен пример для встречи трех объектов.

1. Рассмотрим процесс управления одновременной встречи нескольких сотрудничающих космических аппаратов [1]. Предполагаем, что все космические аппараты встречаются с фиктивным неманеврирующим объектом (точкой), который находится на фиктивной орбите и является целью. Для описания относительного движения космических аппаратов и цели, считая их материальными точками, пренебрегая возмущениями от несферичности Земли, атмосферным сопротивлением и притяжением других небесных тел, запишем векторные уравнения движения для цели и каждого космического аппарата (управляемого объекта), участвующего в сближении:

$$\ddot{\mathbf{r}}_y + \frac{\mu}{r_y^3} \mathbf{r}_y = 0, \quad \ddot{\mathbf{r}}_a^{(i)} + \frac{\mu}{r_a^{(i)3}} \mathbf{r}_a^{(i)} = \mathbf{u}^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.1)$$

где \mathbf{r}_y и $\mathbf{r}_a^{(i)}$ – геоцентрические радиус-векторы цели и i -ого космического аппарата, $\mathbf{u}^{(i)}$ – равнодействующий вектор ускорения от тяги двигателей i -ого аппарата, μ – гравитационная постоянная Земли.

Вычитая из второго уравнения (1.1) первое и определяя вектор дальности от цели до космических аппаратов $\mathbf{D}^{(i)} = \mathbf{r}_a^{(i)} - \mathbf{r}_y$, получим

$$\ddot{\mathbf{D}}^{(i)} + \frac{\mu}{r_y^3} \left[(\mathbf{r}_y + \mathbf{D}^{(i)}) \left(1 + \frac{\mathbf{D}^{(i)2}}{r_y^2} + \frac{2\mathbf{r}_y \mathbf{D}^{(i)}}{r_y^2} \right)^{-3/2} - \mathbf{r}_y \right] = \mathbf{u}^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

Пусть заданы начальные положения (в момент t_0) всех космических аппаратов

$$D^{(i)}(t_0) = D_0^{(i)}, \quad \dot{D}^{(i)}(t_0) = \dot{D}_0^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.3)$$

Предположим, что на интервале времени $[t_0, T]$ затраты на управление каждого космического аппарата определяются величиной

$$\mathfrak{Z}_i(u^{(i)}) = \left[\int_{t_0}^T (u^{(i)}(t))^2 dt \right]^{1/2}. \quad (1.4)$$

Каждый космический аппарат стремится к встрече с остальными, определяемой конечным положением (в момент времени T) с заданными параметрами

$$D^{(i)}(T) = D_T(\alpha, \beta), \quad \dot{D}^{(i)}(T) = \dot{D}_T, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.5)$$

перелетая при этом с наименьшими затратами на управление. Здесь α и β – некоторые величины, предстоящие определению.

В рассматриваемой задаче о встрече предполагается, что все управляемые объекты имеют одинаковую информацию и у них есть возможность совместного выбора управлений. Исходя из непротивоположности интересов можно составить кооперацию всех управляемых объектов с векторной функцией выигрыша. Решение полученной задачи должно учитывать как индивидуальные интересы управляющих объектов, так и интересы любых коалиций, которые могут быть образованы внутри кооперации.

Одним из способов решения такой задачи является выбор управляющими объектами парето-оптимальных управлений [2]. Управляемые объекты должны выбрать управляющие воздействия, доставляющие выигрыши, близкие к идеальной точке

$$\mathfrak{Z}^* = \{\mathfrak{Z}_i^*, i = 1, \dots, n \mid \mathfrak{Z}_i^* = \min_u \mathfrak{Z}_i(u^{(i)})\} \quad (1.6)$$

и в качестве меры “близости” используется следующая норма:

$$\|\mathfrak{Z}\| = \sum_{i=1}^n \left| \mathfrak{Z}_i(u^{(i)})^2 - \mathfrak{Z}_i^{*2} \right|. \quad (1.7)$$

Величина $\left| \mathfrak{Z}_i(u^{(i)})^2 - \mathfrak{Z}_i^{*2} \right|$ составляет величину дополнительных затрат на управление i -ого управляемого объекта, а норма $\|\mathfrak{Z}\|$ характеризует “групповую потерю” объектов.

Сформулируем следующую задачу. Требуется найти оптимальные управляющие воздействия $u^{(i)0}(t) = \{u_1^{(i)0}(t), u_2^{(i)0}(t), u_3^{(i)0}(t)\}$, $t \in [t_0, T]$ ($i = 1, \dots, n$) и значения параметров α и β , переводящие сотрудничающие объекты (1.2) из начальных фазовых состояний (1.3) в конечное фазовое состояние (1.5) так, чтобы затраты (1.7) на управляющие воздействия $u^{(i)}(t)$ были наименьшими.

Рассмотрим относительные движения космических аппаратов в орбитальной системе координат, являющейся правым прямоугольным, начало которой находится на фиктивной орбите цели, ось y все время направлена вдоль радиуса-вектора цели, ось x перпендикулярна к ней, лежит в плоскости орбиты и направлена против движения.

Считая фиктивную орбиту цели круговой, линеаризованные уравнения относительных движений космических аппаратов в орбитальной системе координат, начало которой совпадает с целью, имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(i)} - 2\omega\dot{y}^{(i)} &= u_1^{(i)}, & \ddot{y}^{(i)} + 2\omega\dot{x}^{(i)} - 3\omega^2 y^{(i)} &= u_2^{(i)} \\ \ddot{z}^{(i)} + \omega^2 z^{(i)} &= u_3^{(i)} & (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}$ – проекции вектора $D^{(i)}$ – дальности от цели до i -ого космического аппарата, $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}$ – проекции управляющего ускорения i -ого космического аппарата на соответствующие оси орбитальной системы, ω – орбитальная угловая скорость фиктивной цели $\omega^2 = \mu/r_0^3$

Вводя обозначения $x^{(i)} = x_1^{(i)}, \dot{x}^{(i)} = x_2^{(i)}, y^{(i)} = x_3^{(i)}, \dot{y}^{(i)} = x_4^{(i)}, z^{(i)} = x_5^{(i)}, \dot{z}^{(i)} = x_6^{(i)}$, систему уравнений (1.8) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{(i)} &= x_2^{(i)}, & \dot{x}_2^{(i)} &= 2\omega x_4^{(i)} + u_1^{(i)}, & \dot{x}_3^{(i)} &= x_4^{(i)}, \\ \dot{x}_4^{(i)} &= -2\omega x_2^{(i)} + 3\omega^2 x_3^{(i)} + u_2^{(i)}, & \dot{x}_5^{(i)} &= x_6^{(i)}, & \dot{x}_6^{(i)} &= -\omega^2 x_5^{(i)} + u_3^{(i)}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9) в матричной форме запишутся в виде

$$\dot{x}^{(i)} = Ax^{(i)} + Bu^{(i)} \quad (i=1, \dots, n), \quad (1.10)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega^2 & 3\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u^{(i)} = \begin{pmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ u_3^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, требуется найти оптимальные управляющие воздействия $u^{(i)0}(t) = \{u_1^{(i)0}(t), u_2^{(i)0}(t), u_3^{(i)0}(t)\}, t \in [t_0, T]$ ($i=1, \dots, n$) и значения параметров α и β , переводящие систему (1.10) из начальных фазовых состояний $x^{(i)}(t_0) = \{x_1^{(i)}(t_0), x_2^{(i)}(t_0), \dots, x_6^{(i)}(t_0)\}$ в конечное фазовое состояние $x(T, \alpha, \beta) = \{0, V_1, \beta, V_2, \alpha, V_3\}$ так, чтобы затраты (1.7) на управляющие воздействия $u^{(i)}(t)$ были наименьшими.

Отметим, что для определенности значение фазового вектора в конечный момент времени выбрано в виде $x(T, \alpha, \beta) = \{0, V_1, \beta, V_2, \alpha, V_3\}$, координаты которой могли бы иметь иной вид согласно (1.5), что не будет существенно влиять на нижеприведенное решение задачи.

2. Определение оптимальных управлений $u^{(i)0}(t)$ представляет собой краевую задачу. Следуя [3], оптимальные управления представляются в явном виде и зависят линейно от краевых условий:

$$u^{(i)0}(t, \alpha, \beta) = H'[T, t] Q^{-1}(T, t_0) [x^{(i)}(T, \alpha, \beta) - X[T, t_0]x^{(i)}(t_0)] \quad (i=1, \dots, n), \quad (2.1)$$

где $H[T, t] = B X[T, t]$ – переходная матрица, $X[T, t]$ – нормированная фундаментальная матрица решений однородной части уравнения (1.10), $Q(T, t_0)$ – матрица с элементами q_{ij} ,

$$q_{ji} = \sum_{k=1}^3 \int_{t_0}^T h_{jk}(T, \tau) h_{ki}(T, \tau) d\tau, \quad (2.2)$$

h_{ij} – элементы матрицы $H[T, t]$. Здесь штрих означает транспонирование.

Для системы (1.10) (или (1.9)) фундаментальная матрица $X[T, t]$ имеет следующий вид:

$$X [T, t] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\omega} (4 \sin \omega(T-t) - 3\omega(T-t)) & 6(\omega(T-t) - \sin \omega(T-t)) & \frac{2}{\omega} (1 - \cos \omega(T-t)) & 0 & 0 \\ 0 & 4 \cos \omega(T-t) - 3 & 6\omega(1 - \cos \omega(T-t)) & 2 \sin \omega(T-t) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\omega} (\cos \omega(T-t) - 1) & 4 - 3 \cos \omega(T-t) & \frac{1}{\omega} \sin \omega(T-t) & 0 & 0 \\ 0 & -2 \sin \omega(T-t) & 3\omega \sin \omega(T-t) & \cos \omega(T-t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \omega(T-t) & \frac{1}{\omega} \sin \omega(T-t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega \sin \omega(T-t) & \cos \omega(T-t) \end{pmatrix}$$

Элементы q_{ij} (2.2) матрицы Q имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{1}{\omega^3} (140 + 30^3 + 240 \cos \theta - 32 \sin \theta - 3 \sin 2\theta), & q_{12} &= \frac{1}{2\omega^2} (8 + 9\theta^2 - 8 \cos \theta + 12 \sin \theta (\sin \theta - 2\theta)), \\ q_{13} &= \frac{3}{\omega^3} (\sin \theta - \theta)^2, & q_{14} &= \frac{1}{2\omega^2} (16 \sin \theta + 3 \sin 2\theta - 10\theta - 12\theta \cos \theta), \\ q_{22} &= \frac{1}{\omega} (19\theta + 3 \sin 2\theta - 24 \sin \theta), & q_{23} &= \frac{1}{2\omega^2} (22\theta - 28 \sin \theta + 3 \sin 2\theta), & q_{24} &= \frac{12}{\omega} \sin^4 \left(\frac{1}{2}\theta\right), \\ q_{33} &= \frac{1}{4\omega^3} (26\theta - 32 \sin \theta + 3 \sin 2\theta), & q_{34} &= \frac{1}{\omega^2} (5 - 3 \cos \theta) \sin^2 \left(\frac{1}{2}\theta\right), \\ q_{44} &= \frac{1}{\omega} (10\theta - 3 \sin 2\theta), & q_{55} &= \frac{1}{4\omega^3} (2\theta - \sin 2\theta), & q_{56} &= \frac{1}{2\omega^2} \sin^2 \theta, & q_{66} &= \frac{1}{4\omega} (2\theta + \sin 2\theta), \\ q_{15} &= q_{16} = q_{25} = q_{26} = q_{35} = q_{36} = q_{45} = q_{46} = 0, & q_{ij} &= q_{ji} \quad (i, j = 1, \dots, 6), & \theta &= \omega(T - t_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Учитывая начальные и конечные значения системы, согласно формуле (2.1), получаем оптимальные управляющие воздействия в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1^{(i)\circ}(t, \alpha, \beta) &= \alpha A_1^{(i)}(t) + \beta B_1^{(i)}(t) + C_1^{(i)}(t) \\ u_2^{(i)\circ}(t, \alpha, \beta) &= \alpha A_2^{(i)}(t) + \beta B_2^{(i)}(t) + C_2^{(i)}(t) \\ u_3^{(i)\circ}(t, \alpha, \beta) &= \alpha A_3^{(i)}(t) + \beta B_3^{(i)}(t) + C_3^{(i)}(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} A_1^{(i)}(t) &= A_2^{(i)}(t) = B_3^{(i)}(t) = 0, \\ A_3^{(i)}(t) &= \bar{q}_{56} \cos(\omega(T-t)) + \bar{q}_{55} \frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega}, \\ B_1^{(i)}(t) &= 2\bar{q}_{33} \frac{-1 + \cos(\omega(T-t))}{\omega} + \bar{q}_{23} (-3 + 4 \cos(\omega(T-t))) - 2\bar{q}_{34} \sin(\omega(T-t)) + \\ &\quad + \bar{q}_{13} \left(-3T + 3t + \frac{4 \sin(\omega(T-t))}{\omega}\right), \\ B_2^{(i)}(t) &= -2\bar{q}_{13} \frac{-1 + \cos(\omega(T-t))}{\omega} + 2\bar{q}_{23} \sin(\omega(T-t)) + \bar{q}_{34} \cos(\omega(T-t)) + \bar{q}_{33} \frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega} \\ C_1^{(i)}(t) &= (-x_1^{(i)}(t_0) - 2x_4^{(i)}(t_0) \frac{1 - \cos \theta}{\omega} - 6x_3^{(i)}(t_0)(\theta - \sin \theta) - x_2^{(i)}(t_0) \frac{-3\theta + 4 \sin \theta}{\omega}) \times \\ &\quad \times (2\bar{q}_{13} \frac{-1 + \cos(\omega(T-t))}{\omega} + \bar{q}_{12} (-3 + 4 \cos(\omega(T-t))) - 2\bar{q}_{14} \sin(\omega(T-t)) + \\ &\quad + \bar{q}_{11} \left(-3T + 3t + \frac{4 \sin(\omega(T-t))}{\omega}\right)) + (v_1 - 6x_3^{(i)}(t_0)\omega(1 - \cos \theta) - x_2^{(i)}(t_0)(-3 + 4 \cos \theta) - \\ &\quad - 2x_4^{(i)}(t_0) \sin \theta) (2\bar{q}_{23} \frac{-1 + \cos(\omega(T-t))}{\omega} + \bar{q}_{22} (-3 + 4 \cos(\omega(T-t))) - 2\bar{q}_{24} \sin(\omega(T-t)) + \\ &\quad + \bar{q}_{12} \left(-3T + 3t + \frac{4 \sin(\omega(T-t))}{\omega}\right)) + (-x_3^{(i)}(t_0)(4 - 3 \cos \theta) - 2x_2^{(i)}(t_0) \frac{-1 + \cos \theta}{\omega} - x_4^{(i)}(t_0) \frac{\sin \theta}{\omega}) \times \\ &\quad \times (2\bar{q}_{33} \frac{-1 + \cos(\omega(T-t))}{\omega} + \bar{q}_{23} (-3 + 4 \cos(\omega(T-t))) - 2\bar{q}_{34} \sin(\omega(T-t)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{q}_{13}(-3T+3t+\frac{4\sin(\omega(T-t))}{\omega}))+(v_2-x_4^{(i)}(t_0)\cos\theta+x_2^{(i)}(t_0)\sin\theta-3x_3^{(i)}(t_0)\omega\sin\theta)\times \\
& \times(2\bar{q}_{34}\frac{-1+\cos(\omega(T-t))}{\omega}+\bar{q}_{24}(-3+4\cos(\omega(T-t)))-2\bar{q}_{44}\sin(\omega(T-t))+ \\
& +\bar{q}_{14}(-3T+3t+\frac{4\sin(\omega(T-t))}{\omega})). \\
C_2^{(i)}(t)= & (-x_1^{(i)}(t_0)-2x_4^{(i)}(t_0)\frac{1-\cos\theta}{\omega}-6x_3^{(i)}(t_0)(\theta-\sin\theta)-x_2^{(i)}(t_0)\frac{-3\theta+4\sin\theta}{\omega})\times \\
& \times(-2\bar{q}_{11}\frac{-1+\cos(\omega(T-t))}{\omega}+2\bar{q}_{12}\sin(\omega(T-t))+\bar{q}_{14}\cos(\omega(T-t))+ \\
& +\bar{q}_{13}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega})+(v_1-6x_3^{(i)}(t_0)\omega(1-\cos\theta)-x_2^{(i)}(t_0)(-3+4\cos\theta)-2x_4^{(i)}(t_0)\sin\theta)\times \\
& \times(-2\bar{q}_{12}\frac{-1+\cos(\omega(T-t))}{\omega}+\bar{q}_{24}\cos(\omega(T-t))+2\bar{q}_{22}\sin(\omega(T-t))+ \\
& +\bar{q}_{23}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega})+(-x_3^{(i)}(t_0)(4-3\cos\theta)-2x_2^{(i)}(t_0)\frac{-1+\cos\theta}{\omega}-x_4^{(i)}(t_0)\frac{\sin\theta}{\omega})\times \\
& \times(-2\bar{q}_{13}\frac{-1+\cos(\omega(T-t))}{\omega}+\bar{q}_{34}\cos(\omega(T-t))+2\bar{q}_{23}\sin(\omega(T-t))+ \\
& +\bar{q}_{33}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega})+(v_2-x_4^{(i)}(t_0)\cos\theta+2x_2^{(i)}(t_0)\sin\theta-3x_3^{(i)}(t_0)\omega\sin\theta)\times \\
& \times(-2\bar{q}_{14}\frac{-1+\cos(\omega(T-t))}{\omega}+\bar{q}_{44}\cos(\omega(T-t))+2\bar{q}_{24}\sin(\omega(T-t))+\bar{q}_{34}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega}), \\
C_3^{(i)}(t)= & (-x_5^{(i)}(t_0)\cos\theta-x_6^{(i)}(t_0)\frac{\sin\theta}{\omega})(\bar{q}_{56}\cos(\omega(T-t))+\bar{q}_{55}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega})+ \\
& +(v_3-x_6^{(i)}(t_0)\cos\theta+x_5^{(i)}(t_0)\omega\sin\theta)(\bar{q}_{66}\cos(\omega(T-t))+\bar{q}_{56}\frac{\sin(\omega(T-t))}{\omega}).
\end{aligned}$$

Здесь \bar{q}_{ij} – элементы матрицы $Q^{-1}(T, t_0)$.

Выражения (2.4) характеризуют зависимость оптимального управления каждого объекта от конечного положения.

Оптимальную фазовую траекторию для i -ого управляющего объекта получим, интегрируя (1.9) (или (1.10)) с учетом $u^{(i)0}(t, \alpha, \beta)$ (2.4) при начальном условии $x^{(i)}(t_0)$

$$x^{(i)0}(t, \alpha, \beta) = X[t, t_0]x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^t X[t, \tau]Bu^{(i)0}(\tau, \alpha, \beta)d\tau. \quad (2.5)$$

Затраты на движения (2.5) согласно (1.4) будут

$$\mathfrak{I}_i(u^{(i)0}(\alpha, \beta)) = \left[\int_{t_0}^T \left[\left(u_1^{(i)0}(t, \alpha, \beta) \right)^2 + \left(u_2^{(i)0}(t, \alpha, \beta) \right)^2 + \left(u_3^{(i)0}(t, \alpha, \beta) \right)^2 \right] dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Выполняя интегрирование, получим, что затраты на управления выражаются величиной

$$\mathfrak{I}_i(u^{(i)0}(\alpha, \beta)) = \mathfrak{I}_i(\alpha, \beta) = (a_1^{(i)}\alpha^2 - 2b_1^{(i)}\alpha + a_2^{(i)}\beta^2 - 2b_2^{(i)}\beta + c^{(i)})^{\frac{1}{2}}, \quad (2.6)$$

где

$$a_1^{(i)} = \int_{t_0}^T \left[\sum_{j=1}^3 (A_j^{(i)}(t))^2 \right] dt, \quad b_1^{(i)} = - \int_{t_0}^T \left[\sum_{j=1}^3 A_j^{(i)}(t)C_j^{(i)}(t) \right] dt,$$

$$a_2^{(i)} = \int_{t_0}^T \left[\sum_{j=1}^3 (B_j^{(i)}(t))^2 \right] dt, \quad b_2^{(i)} = - \int_{t_0}^T \left[\sum_{j=1}^3 B_j^{(i)}(t) C_j^{(i)}(t) \right] dt.$$

$$c^{(i)} = \int_{t_0}^T \left[\sum_{j=1}^3 (C_j^{(i)}(t))^2 \right] dt.$$

Из (2.6) получим, что минимальные затраты на управление i -ого управляющего объекта будут при

$$\alpha_i^o = \frac{b_1^{(i)}}{a_1^{(i)}}, \quad \beta_i^o = \frac{b_2^{(i)}}{a_2^{(i)}},$$

следовательно,

$$\mathfrak{I}_i^* = \mathfrak{I}_i(u^{(i)o}(\alpha_i^o, \beta_i^o)) = (a_1^{(i)}\alpha_i^{o2} - 2b_1^{(i)}\alpha_i^o + a_2^{(i)}\beta_i^{o2} - 2b_2^{(i)}\beta_i^o + c^{(i)})^{\frac{1}{2}} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.7)$$

Подставляя выражения (2.6) и (2.7) в минимизируемый функционал (1.7), получим, что для определения парето-оптимального набора управления, необходимо решить задачу минимизации функции переменных α и β . Считая величины α и β определенными, можно найти соответствующий им набор управлений из соотношения (2.4), решающих задачу встречи, а также затраты на управление каждого объекта из формулы (2.6). С помощью найденных управлений объектов, можно построить фазовые траектории, переводящие объекты к точке встречи. Для этого необходимо воспользоваться формулой (2.5).

3. В качестве примера рассмотрим задачу встречи трех объектов.

Пусть длина промежутка времени управления равна $T - t_0 = 30$ сек ($t_0 = 0$), фиктивная орбита имеет радиус 6600км, а $\omega = 1.176 * 10^{-3} \frac{1}{\text{сек}}$.

Пусть начальным положением для первого, второго и третьего объектов являются соответственно векторы

$$x^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.2328 \\ 60 \\ -4.1115 \\ 80 \\ 0.0369 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 40 \\ -9.0613 \\ -50 \\ 7.6229 \\ 60 \\ 0.065 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad x^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} -10 \\ -4.9545 \\ -80 \\ -7.2583 \\ -30 \\ -0.0841 \end{pmatrix}.$$

Тогда, значения функционалов (1.4) для каждого объекта получаются

$$\mathfrak{I}_1 = (0.0004443\alpha^2 - 0.07159\alpha + 0.0004448\beta^2 + 0.001045\beta + 3.674057)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathfrak{I}_2 = (0.0004443\alpha^2 - 0.05418\alpha + 0.0004448\beta^2 - 0.0599846\beta + 12.208928)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1)$$

$$\mathfrak{I}_3 = (0.0004443\alpha^2 + 0.02778\alpha + 0.0004448\beta^2 + 0.166386\beta + 21.929144)^{\frac{1}{2}}.$$

Согласно (2.7), получены следующие минимальные значения затрат на управления:

$$\mathfrak{I}^*(u) = (0.790181, 8.5348, 5.93659).$$

Подставляя последнее и (3.1) в (1.7), будем иметь:

$$\|\mathfrak{I}\| = 0.001333\alpha^2 - 0.09799\alpha + 0.001334\beta^2 + 0.10744\beta + 22.5506. \quad (3.2)$$

Минимизируя (3.2) по параметрам α и β , получаем, что минимум достигается при следующих значениях: $\alpha_0 = 36.7$, $\beta_0 = -40.25$.

Таким образом, получены парето-оптимальные управления, которые имеют следующий вид:

$$u^{(1)\circ}(t) = \begin{pmatrix} 28.98 + 0.027t - 28.795 \cos(\lambda t) - 30.359 \sin(\lambda t) \\ 15.059 - 15.179 \cos(\lambda t) + 14.398 \sin(\lambda t) \\ -0.293 \cos(\lambda t) + 16.536 \sin(\lambda t) \end{pmatrix},$$

$$u^{(2)\circ}(t) = \begin{pmatrix} 78.636 + 0.124t - 77.696 \cos(\lambda t) - 142.684 \sin(\lambda t) \\ 70.384 - 71.342 \cos(\lambda t) + 38.848 \sin(\lambda t) \\ -0.164 \cos(\lambda t) + 9.144 \sin(\lambda t) \end{pmatrix},$$

$$u^{(3)\circ}(t) = \begin{pmatrix} -113.16 + 0.116t + 113.881 \cos(\lambda t) - 128.746 \sin(\lambda t) \\ 65.608 - 64.373 \cos(\lambda t) - 56.941 \sin(\lambda t) \\ 0.456 \cos(\lambda t) - 25.68 \sin(\lambda t) \end{pmatrix},$$

где $\lambda = 0.00117689$. Значения затрат на управления будут:

$$\mathfrak{I}_1(u^{(1)\circ}(t)) = 2.32199, \quad \mathfrak{I}_2(u^{(2)\circ}(t)) = 13.9532, \quad \mathfrak{I}_3(u^{(3)\circ}(t)) = 17.5734.$$

Законы движения объектов примут следующий вид:

$$x_1^{(1)}(t) = 3.3366300964 \times 10^8 \sin^2(\lambda t / 2) + 179756.452t - 43.4631t^2 - 0.01329t^3 +$$

$$+ 64489.171t \cos(\lambda t) - 5 \times 10^{-12}t \cos(2\lambda t) - (2.07535841 \times 10^8 + 61168.27t) \sin(\lambda t)$$

$$x_3^{(1)}(t) = 8.7329105 \times 10^7 - 49240.658t - 22.5886t^2 -$$

$$- (8.73290425 \times 10^7 + 30584.137t) \cos(\lambda t) + (6.78234 \times 10^7 - 32244.586t) \sin(\lambda t)$$

$$x_5^{(1)}(t) = (80 - 7025.269t) \cos(\lambda t) + (5.969382 \times 10^6 - 124.5t) \sin(\lambda t)$$

$$x_1^{(2)}(t) = 4.514890997 \times 10^8 + 842185.517t - 117.9536t^2 - 0.062126t^3 +$$

$$+ (-4.514890597 \times 10^8 + 303095.91t) \cos(\lambda t) - 2 \times 10^{-11}t \cos(2\lambda t) -$$

$$- (9.731499845 \times 10^8 + 165044.695t) \sin(\lambda t)$$

$$x_3^{(2)}(t) = 4.09313029 \times 10^8 - 133633.101t - 105.57665t^2 - (4.09313079 \times 10^8 +$$

$$+ 82522.3473t) \cos(\lambda t) + (1.83673131 \times 10^8 - 151547.954t) \sin(\lambda t)$$

$$x_5^{(2)}(t) = (60 - 3884.7826t) \cos(\lambda t) + (3.300944 \times 10^6 - 69.479) \sin(\lambda t)$$

$$x_1^{(3)}(t) = -6.55694178 \times 10^8 + 774172.554t + 169.7403t^2 - 0.05791t^3 +$$

$$+ (6.55694168 \times 10^8 + 273487.44t) \cos(\lambda t) - 2 \times 10^{-11}t \cos(2\lambda t) +$$

$$+ (-8.9019785 \times 10^8 + 241911.18t) \sin(\lambda t)$$

$$x_3^{(3)}(t) = 3.75384401 \times 10^8 + 192303.753t - 98.4115t^2 + (-3.7538448102 \times 10^8 +$$

$$+ 120955.5893t) \cos(\lambda t) - (2.6618171715 \times 10^8 + 136743.72t) \sin(\lambda t)$$

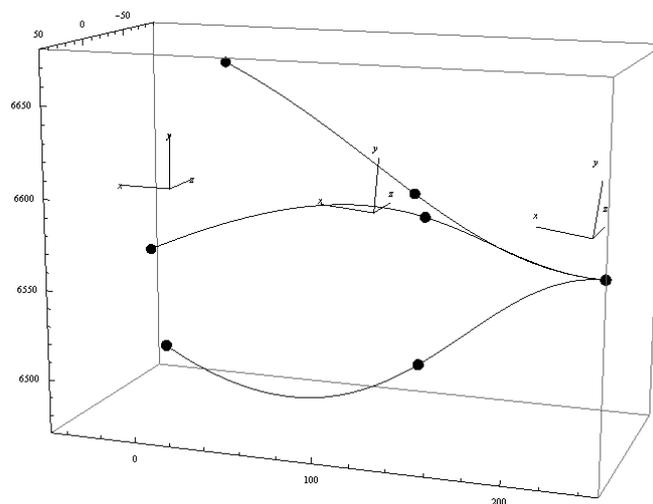
$$x_5^{(3)}(t) = (-30 + 10910.058t) \cos(\lambda t) + (-9.270315 \times 10^6 + 193.812) \sin(\lambda t).$$

В нижеследующей таблице приведены значения координат объектов в промежуточные моменты времени:

Таблица

$x(t) \backslash t$	$t = 0$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 30$
$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_3^{(1)}(t) \\ x_5^{(1)}(t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5.34422 \\ 15.8021 \\ 68.9528 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.60426 \\ -23.3328 \\ 48.0493 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.58794 \times 10^{-8} \\ -40.2557 \\ 36.7558 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_3^{(2)}(t) \\ x_5^{(2)}(t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ -50 \\ 60 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -10.2766 \\ -13.265 \\ 54.2627 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9.39724 \\ -25.5143 \\ 42.9265 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8.19564 \times 10^{-8} \\ -40.2557 \\ 36.7558 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1^{(3)}(t) \\ x_3^{(3)}(t) \\ x_5^{(3)}(t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -10 \\ -80 \\ -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -29.9452 \\ -101.657 \\ -13.0669 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -14.1183 \\ -66.3889 \\ 19.262 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -40.2557 \\ 36.7558 \end{pmatrix}$

Движения объектов графически представляются в виде



ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев А.А., Соколов В.Б. Встреча на орбите. М.: Машиностроение, 1969. 367с.
2. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Томск.: Изд. ТГУ, 1985. 276с.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.

Сведения об авторах:

Барсегян Вая Рафаелович – Доктор физ-мат.наук, профессор,
Ереванский Госуниверситет, факультет математики и механики
barsegh@ysu.am, barseghyan@sci.am

Степанян Арег Ашотович – Аспирант Ереванского Госуниверситета,
факультет математики и механики
Mexanikus2006@yahoo.com

Поступила в редакцию 01.10.2008