ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №4, 2010 Механика

УДК 62-50

ОГРАНИЧЕННЫЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ИЗБЕГАЮЩИХ СТОЛКНОВЕНИЯ

АВЕТИСЯН В.В., ЧАХМАХЧЯН Р.Э.

Ключевые слова: динамический объект, ограниченное управление
Keywords: dynamic object, limited control

Ավետիսյան Վ.Վ., Չախմախչյան Ռ.Է.
Բախումից խուսափող երկու դինամիկ օբյեկտների տարածական շարժումների սահմանափակ կառավարումները

Դիտարկվում է տարածական շարժումներ կատարող դինամիկ օբյեկտների սահմանափակ կառավարումների կառուցման խնդիրը: Պահանջվում է որոշել կառավարման օրենքներն այնպես, որ ապահովվեն օբյեկտների տեղափոխումը ցանկացած իրարից տարբեր սկզբնական վիճակներից տրված իրարից տարբեր վերջնական վիճակներ և բացառվի դրանց բախումը համատեղ շարժման ընթացքում: Մշակվել է որոնելի կառավարումների կառուցման կոնստրուկտիվ ալգորիթմ: Ստացվել են պայմաններ սկզբնական, վերջնական վիճակների և վերջնական ժամանակի համար, որոնց դեպքում խնդիրը լուծելի է:

Avetisyan V.V., Chakhmakhchyan R.E.

Limited Controls of Spatial Motions of Two Dynamic Objects Avoiding Collision

In this problem is considered the system from two dynamic objects, which realize spatial motion and is required build limited controls, providing transition of objects from arbitrary initial difference states in given final difference states at final time and excluding of collision in process of the joint motion. A constructive algorithm for working out sought controls has been developed. Conditions are received on dynamic parameters of the system, under which delivered problem solvable for any initial and final states, satisfying assessed to restriction.

Рассматривается задача построения ограниченных управлений пространственными движениями двух динамических объектов. Требуется определить законы управлений, обеспечивающих переход объектов из произвольных разных начальных состояний в заданные разные конечные состояния за конечное время и гарантирующих отсутствия столкновения объектов в процессе совместного движения. Предложен конструктивный алгоритм построения искомых управлений. Получены условия на начальные и конечные состояния объектов, а также времени окончания процесса, при которых задача разрешима.

1. Постановка задачи. Рассматривается система из двух динамических объектов X , Y , движения которых описываются следующими уравнениями:

$$\dot{x} = A_X(t)x + B_X u; \quad \dot{y} = A_Y(t)y + B_Y \mathrm{v}, \qquad t \in [t_0, T] \tag{1.1}$$

Здесь $x, y \in R^n$ – векторы фазовых состояний, $u, \mathrm{v} \in R^r$ – векторы управлений объектов X , Y ; $A_{X,Y}(t)$, $B_{X,Y}(t)$ – матрицы размера $n \times n$, $n \times r$ – соответственно, кусочно-непрерывно зависящие от t .

Через $\{x\}_k$ и $\{y\}_k$ обозначим k , $1 \le k < n$ -мерные векторы, составленные из тех компонент векторов x и y соответственно, которые определяют декартовы координаты положений объектов X , Y .

Требуется определить управляющие вектор-функции $u(t)$ и $\mathrm{v}(t)$ с ограниченными компонентами

$$|u_i(t)| \le u_i^0, \qquad |\mathrm{v}_i(t)| \le \mathrm{v}_i^0, \quad i = 1, \ldots, r; \quad t \in [t_0, T] \tag{1.2}$$

так, чтобы объекты (1.1) из заданных начальных состояний в момент $t = t_0$

$$x(t_0) = x^0, \quad y(t_0) = y^0, \quad \left|\{x(t_0)\}_k - \{y(t_0)\}_k\right| \neq 0, \quad 1 \leq k < n \tag{1.3}$$
$$\{x(t_0)\}_l \geq 0, \quad \{y(t_0)\}_l \geq 0, \quad 1 \leq l \leq k$$

перешли в заданные конечные состояния

$$x(T) = x^1, \quad y(T) = y^1, \quad \left|\{x(T)\}_k - \{y(T)\}_k\right| \neq 0, \quad 1 \leq k < n \tag{1.4}$$
$$\{x(T)\}_l \geq 0, \quad \{y(T)\}_l \geq 0, \quad 1 \leq l \leq k$$

в некоторый нефиксированный момент времени $t = T$ и при этом удовлетворялись условия отсутствия столкновения объектов X, Y при совместном движении:

$$\left|\{x(t)\}_k - \{y(t)\}_k\right| \neq 0, \quad 1 \leq k < n, \quad t \in (t_0, T) \tag{1.5}$$

и следующие ограничения:

$$\{x(t)\}_l > 0, \quad \{y(t)\}_l > 0, \quad 1 \leq l \leq k; \quad t \in (t_0, T) \tag{1.6}$$

В (1.2)-(1.5) $|\cdot|$ – эвклидова норма вектора.

2. Построение управлений без ограничений. Запишем решения систем (1.1)

$$x(t) = \Phi_X(t)\left[x^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_X^{-1}(\tau) B_X(\tau) u(\tau) d\tau\right], \quad y(t) = \Phi_Y(t)\left[y^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_Y^{-1}(\tau) B_Y(\tau) \mathrm{v}(\tau) d\tau\right] \tag{2.1}$$

где $\Phi_{X,Y}(t)$ – фундаментальные матрицы, определяемые условиями $\dot{\Phi}_{X,Y} = A_{X,Y}\Phi_{X,Y}$, $\Phi_{X,Y}(t_0) = E_n$, E_n – n-мерные единичные матрицы.

Учитывая (1.3) и (1.4) задача сводится к отысканию таких управлений $u(t)$, $\mathrm{v}(t)$, при которых удовлетворяются условия

$$\int_{t_0}^{T} \Phi_X^{-1}(t) B_X(t) u(t) dt = \Phi_X^{-1}(T) x^1 - x^0, \int_{t_0}^{T} \Phi_Y^{-1}(t) B_Y(t) \mathrm{v}(t) dt = \Phi_Y^{-1}(T) y^1 - y^0 \tag{2.2}$$

и (1.5), а также ограничения (1.2).

Воспользуемся известным подходом [1]# построения управления без учета ограничений (1.3), (1.5), (1.6). Этот подход был распространен на случай наличия ограничений на управление и смешанных ограничений, наложенных в каждый момент времени на фазовые координаты [2-4].

Управления, решающие задачу без учета ограничений (1.3), (1.5), (1.6) ищем в виде #

$$u(t) = Q_X^T(t) C_X, \qquad \mathrm{v}(t) = Q_Y^T(t) C_Y \tag{2.3}$$

$$Q_X(t) = \Phi_X^{-1}(t) B_X(t), \quad Q_Y(t) = \Phi_Y^{-1}(t) B_Y(t) \tag{2.4}$$

а C_X, C_Y – постоянные n-мерные векторы. Подставляя (2.3) в (2.2), получим уравнения для векторов C_X, C_Y:

$$R_X(T) C_X = \Phi_X^{-1}(T) x^1 - x^0, \qquad R_Y(T) C_Y = \Phi_Y^{-1}(T) y^1 - y^0 \tag{2.5}$$

$$R_X(T) = \int_{t_0}^{T} Q_X(t) Q_X^T(t) dt, \qquad R_Y(T) = \int_{t_0}^{T} Q_Y(t) Q_Y^T(t) dt \tag{2.6}$$

В случае полной управляемости каждой из систем (1.1)[1], матрицы $R_X(T)$, $R_Y(T)$ (2.6) – неособые [5] и поэтому (2.5) имеют единственные решения:

$$C_X = R_X^{-1}(T)(\Phi_X^{-1}(T) x^1 - x^0), \quad C_Y = R_Y^{-1}(T)(\Phi_Y^{-1}(T) y^1 - y^0) \tag{2.7}$$

Учитывая (2.6), (2.7), управления $u(t)$, $\mathrm{v}(t)$ (2.3) и соответствующие им фазовые векторы $x(t)$, $y(t)$ (2.1) можно представить в следующем виде:

$$u(t) = F_X(t,T)\cdot x^*, \qquad \mathrm{v}(t) = F_Y(t,T)\cdot y^* \tag{2.8}$$

$$x(t) = G_X(t,T)\cdot x^*, \quad y(t) = G_Y(t,T)\cdot y^* \tag{2.9}$$

где $F_X(t,T)$, $F_Y(t,T)$ – $r\times 2n$-мерные, а $G_X(t,T)$ $G_Y(t,T)$ – $n\times 2n$-мерные матрицы

$$\begin{aligned} &F_X = (F_X^0, F_X^1), \quad F_Y = (F_Y^0, F_Y^1), \quad x^* = \left(x^0 \ x^1\right)^T \\ &G_X = (G_X^0, G_X^1), \ G_Y = (G_Y^0, G_Y^1), \quad y^* = \left(y^0 \ y^1\right)^T \end{aligned} \tag{2.10}$$

В (2.10) элементы блочных матриц $F_X^{0,1}, F_Y^{0,1}$ – размерности $r\times n$ и $G_X^{0,1}, G_Y^{0,1}$ – размерности $n\times n$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} &F_X^0(t,T) = -(\Phi_X^{-1}(t)B_X(t))^T R_X^{-1}(T), && F_X^1(t,T) = (\Phi_X^{-1}(t)B_X(t))^T R_X^{-1}(T)\Phi_X^{-1}(T) \\ &F_Y^0(t,T) = -(\Phi_Y^{-1}(t)B_Y(t))^T R_Y^{-1}(T), && F_Y^1(t,T) = (\Phi_Y^{-1}(t)B_Y(t))^T R_Y^{-1}(T)\Phi_Y^{-1}(T) \\ &G_X^0(t,T) = \Phi_X(t) - \Phi_X(t)R_X(t)R_X^{-1}(T), && G_X^1(t,T) = \Phi_X(t)\Phi_X^{-1}(T)R_X^{-1}(T) \\ &G_Y^0(t,T) = \Phi_Y(t) - \Phi_Y(t)R_Y(t)R_Y^{-1}(T) && G_Y^1(t,T) = \Phi_Y(t)\Phi_Y^{-1}(T)R_Y^{-1}(T) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для заданных x^*, y^* и любого $T > t_0$, решения $x(t)$, $y(t)$ (2.9) систем (1.1),(1.3) при управлениях $u(t)$, $\mathrm{v}(t)$ (2.8) удовлетворяют краевым условиям (1.4). При этом, однако, построенные управления и соответствующие им фазовые переменные не обязательно удовлетворяют наложенным ограничениям (1.2), (1.5), (1.6). Получим условия на x^*, y^* и время процесса $T > t_0$, обеспечивающие выполнение наложенных ограничений (1.2), (1.5), (1.6).

3. Учет условия отсутствия столкновения. Подставим выражения (2.9) в соотношение (1.5) и представим его в виде

$$\left|\{x(t)\}_k - \{y(t)\}_k\right| = \left|\{x(t) - y(t)\}_k\right| = \left|\{G_X(t,T)\cdot x^* - G_Y(t,T)\cdot y^*\}_k\right| = \left|\{G(t,T)\}\cdot z^*\right| \tag{3.1}$$

$$t \in (t_0, T)$$

где

$$z^* = \left(x^*, \ y^*\right)^T = \left(x^0, y^0, x^1, y^1\right)^T \tag{3.2}$$

– $4n$-мерный вектор, а

$$G(t,T) = (G_X^0(t,T) \quad G_X^1(t,T) \quad -G_Y^0(t,T) \quad -G_Y^1(t,T)) \tag{3.3}$$

– $n\times 4n$-мерная матрица. В (3.1) матрица $\{G(t,T)\}$ – $k\times 4n$-мерная и состоит из первых k строк матрицы $G(t,T)$ (3.3).

Если обозначить

$$\{x(t,T) - y(t,T)\}_k = \{z(t,T)\} \tag{3.4}$$

то, с учетом (3.1), (3.2), из (1.5) и (3.4) получим

$$\left|\{z(t,T)\}\right| = \left|\{G(t,T)\}\cdot z^*\right| \neq 0, \ t \in (t_0, T) \tag{3.5}$$

Для выполнения (3.5) необходимо и достаточно, чтобы не имела решения система

$$\{G(t,T)\}^{(1)}\cdot z^* = 0, \ldots, \{G(t,T)\}^{(k)}\cdot z^* = 0, \quad t \in (t_0, T) \tag{3.6}$$

где

$$\left\{G(t,T)\right\}^{(j)}=\left\{g_{j1}^{X,0}(t,T),...,\ g_{jn}^{X,0}(t,T);g_{j1}^{X,1}(t,T),...,..,g_{jn}^{X,1}(t,T);\right.\qquad j=1,...,k \qquad (3.7)$$
$$\left.g_{j1}^{Y,0}(t,T),...,\ g_{jn}^{Y,0}(t,T);\ g_{j1}^{Y,1}(t,T),...,g_{jn}^{Y,1}(t,T)\right\}$$

С учетом (3.7) запишем систему (3.6) в виде

$$\sum_{i=1}^{n}(g_{ji}^{X,0}(t,T)x_i^0+g_{ji}^{X,1}(t,T)x_i^1+g_{ji}^{Y,0}(t,T)y_i^0+g_{ji}^{Y,1}(t,T)y_i^1)=0 \qquad (3.8)$$
$$t\in(t_0,T),\ \ j=1,...,k$$

Пусть функции $g_{ji}^{X,0}(t,T)$, $g_{ji}^{X,1}(t,T)$, $g_{ji}^{Y,0}(t,T)$, $g_{ji}^{Y,1}(t,T)$; $T>t_0$, $i=1,...,n$ при некоторм $j,\ 1\le j\le k$ линейно независимы на интервале $(t_0,\tau^{(j)}]$. Тогда они линейно независимы на любом интервале (t_0,τ), $\tau>\tau^{(j)}$, и для любого z^* (3.2), компоненты которого согласно (1.3),(1.4) одновременно не равны нулю, существует хотя бы одна точка $\bar{t}\in(t_0,\tau)$, в частности, $\bar{t}\in(t_0,\tau^{(j)}]$, в которой $\left\{G(\bar{t},T)\right\}^{(j)}\cdot z^*\ne 0$.

Для заданного $z^*\ne 0$ введем обозначение

$$M^{(j)}(t,T)=\left\{t\in(t_0,\infty):\ \ \left\{G(t,T)\right\}^{(j)}\cdot z^*=0;\ \ z^*\ne 0,\ T>t_0\right\} \qquad (3.9)$$

Тогда, система (3.8) ((3.6)) будет неразрешимой на интервале (t_0,T), если

$$\bigcap_{j=1}^{p}M^{(j)}(t,T)=\varnothing \quad \text{(a)} \qquad \begin{array}{l}\bigcap_{j=1}^{p}M^{(j)}(t,T)\ne\varnothing,\quad t\in(t_0,+\infty)\\ \bigcap_{j=1}^{p}M^{(j)}(t,T)\notin(t_0,T)\end{array} \quad \text{(b)} \qquad (3.10)$$
$$T\in(t_0,+\infty)$$

Отсюда следует, что для неразрешимости системы (3.8) достаточно искомое время $T>t_0$ выбирать любым в случае (3.10)(a):

$$T\in M_1=(t_0,\infty) \qquad (3.11)(a)$$

Если имеют место соотношения (3.10)(b), то для неразрешимости системы (3.8) ((3.6)) достаточно конечное время $T>t_0$ выбирать из следующего множества:

$$M_1=\left\{T\in(t_0,+\infty):t_1^*(T)\le t_0 \text{ или } t_2^*(T)\ge T\right\},\quad t_1^*(T),t_2^*(T)\in\bigcap_{j=1}^{p}M^{(j)}(t,T) \qquad (3.11)(b)$$

$t_1^*(T),\,t_2^*(T)$ – наибольший и наименьший общие корни j уравнений ($j=1,...,p$; $1\le p\le k$) системы (3.8).

Таким образом, для любого $z^*\ne 0$ (3.2) система (3.6) неразрешима и, следовательно, удовлетворяется условие (3.5), т.е. не имеет место столкновения объектов X, Y, если выполняются условия (3.10)(a) или (3.10)(a) при значениях T из (3.11)(a) или из (3.11)(b) соответственно.

4. Учет ограничений на управления и фазовые координаты. Элементы матриц F_X^0, F_X^1, F_Y^0, F_Y^1 и G_X^0, G_X^1, G_Y^0, G_Y^1 (2.11) обозначим через $f_{iq}^{X,0}$, $f_{iq}^{X,1}$, $f_{iq}^{Y,0}$, $f_{iq}^{Y,1}$ и $g_{iq}^{X,0}$, $g_{iq}^{X,1}$, $g_{iq}^{Y,0}$, $g_{iq}^{Y,1}$, соответственно, и введем следующие обозначения:

$$f_{iq}^{X,Y}(t,T)=\begin{cases} f_{iq}^{X,Y,0}(t,T), & q=1,...,n \\ f_{iq}^{X,Y,1}(t,T), & q=n+1,...,2n \end{cases},\quad g_{iq}^{X,Y}(t,T)=\begin{cases} g_{iq}^{X,Y,0}(t,T), & q=1,...,n \\ g_{iq}^{X,Y,1}(t,T) & q=n+1,...,2n \end{cases}$$

$$x_q^*=\begin{cases} x_q^0, & q=1,...,n \\ x_q^1, & q=n+1,...,2n \end{cases},\qquad y_q^*=\begin{cases} y_q^0, & q=1,...,n \\ y_q^1, & q=n+1,...,2n \end{cases} \tag{4.1}$$

Тогда, с учетом (2.10), (2.11) и (4.1) управления (2.8) и фазовые координаты (2.9) можно представить в координатных формах:

$$u_i(t)=\sum_{q=1}^{2n} f_{iq}^X(t,T)\,x_q^*,\quad \mathrm{v}_i(t)=\sum_{q=1}^{2n} f_{iq}^Y(t,T)\,y_q^*,\quad i=1.,...,r \tag{4.2}$$

$$x_i(t)=\sum_{q=1}^{2n} g_{iq}^X(t,T)\,x_q^*,\quad \mathrm{y}_i(t)=\sum_{q=1}^{2n} g_{iq}^Y(t,T)\,y_q^*,\quad i=1.,...,n \tag{4.3}$$

Введем функции:

$$Q_i(T)=\left[\max_{t_0\le t\le T} L_i(t,T)\right]^{-1/2},\quad S_i(T)=\left[\max_{t_0\le t\le T} K_i(t,T)\right]^{-1/2},\quad i=1,...,r \tag{4.4}$$

где $L_i(t,T)$, $K_i(t,T)$ определяются из (4.1) и имеют вид:

$$L_i(t,T)=\sum_{q=1}^{2n}(f_{iq}^X)^2(t,T),\quad K_i(t,T)=\sum_{q=1}^{2n}(f_{iq}^Y)^2(t,T),\quad i=1,...,r \tag{4.5}$$

К соотношениям (4.2) применим неравенство Коши-Буняковского

$$|u_i|\le\left(\sum_{q=1}^{2n}x_q^{*2}\right)^{1/2}\left(\sum_{q=1}^{2n}(f_{iq}^X)^2(t,T)\right)^{1/2},|\mathrm{v}_i|\le\left(\sum_{q=1}^{2n}y_q^{*2}\right)^{1/2}\left(\sum_{q=1}^{2n}(f_{iq}^Y)^2(t,T)\right)^{1/2},i=1,...,r \tag{4.6}$$

Тогда, с учетом (4.4), (4.5) неравенства (4.6) перепишутся в виде:

$$|u_i|\le|x^*|\left[L_i(t,T)\right]^{1/2}\le|x^*|Q_i^{-1}(T)\,,|\mathrm{v}_i|\le|y^*|\left[K_i(t,T)\right]^{1/2}\le|y^*|S_i^{-1}(T)\,,i=1,...,r \tag{4.7}$$

Из (4.7) следует, что наложенные ограничения (1.2) на компоненты векторов управления будут удовлетворены для всех $t\in[t_0,T]$, если время $T\ge t_0$ выбирать из условия

$$T\in[\overline{T},\infty),\qquad \overline{T}=\max(T_1,T_2) \tag{4.8}$$

где T_1 и T_2 – решения следующих уравнений:

$$|x^*|=\min_{1\le i\le r}[u_i^0 Q_i(T)]\,,\quad |y^*|=\min_{1\le i\le r}[\,\mathrm{v}_i^0 S_i(T)],\quad i=1,...,r \tag{4.9}$$

Отметим, что уравнения (4.9) имеют решения относительно $T\ge t_0$, так как функции в правых частях этих уравнений – монотонные по T.

Обратимся теперь к вопросу о выборе величины T, обеспечивающей выполнение ограничений (1.6). Из (2.9) и (1.6) для k фазовых координат систем (1.1) имеем:

$$\{x(t)\}_l=\{G_X(t,T)\cdot x^*\}_l>0\,,\quad \{y(t)\}_l=\{G_Y(t,T)\cdot y^*\}_l>0 \tag{4.10}$$

$$t\in(t_0,T),\quad l=1,...,k$$

Пусть $\mathrm{Z}=\{z^*\}=\{(x^*,y^*)^T\}=\{x^0,x^1,y^0,y^1\}^T$ – множество тех начальных и конечных состояний (1.3), (1.4) объектов X, Y, для которых существует такое число $\overline{\overline{T}}>0$, что система неравенств (4.10) разрешима при $T=\overline{\overline{T}}$. Тогда построенные управления (2.8) решают задачу (1.1)-(1.6) для заданного

$z^* = \left(x^*, y^*\right)^T \in Z$, если

$$T \in M_1 \bigcap M_2 \bigcap [\overline{T}, +\infty) \tag{4.11}$$

где M_1 определяется из (3.11)(a) или (3.11)(b), а M_2 – из следующего множества:

$$M_2 = \left\{ T \in (t_0, +\infty): \quad \begin{cases} \left\{G_X(t,T)\cdot x^*\right\}_l > 0 \\ \left\{G_Y(t,T)\cdot y^*\right\}_l > 0 \end{cases} \quad z^* = (x^*, y^*)^T \in Z,\ T \in (t_0, \overline{\overline{T}}) \right\} \tag{4.12}$$

Отметим, что вопрос существования T (4.11) зависит как от начальных и конечных состояний (1.3),(1.4), так и от динамики рассматриваемых объектов (1.1).

5. Модельный пример. Рассмотрим систему из двух точечных объектов, совершающих пространственные движения в гравитационном поле Земли. Уравнения движения объектов зададим в виде

$$X: \quad m_X \ddot{x} = F_X + m_X \mathrm{g}\,, \quad Y: \quad m_Y \ddot{y} = F_Y + m_Y \mathrm{g} \tag{5.1}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ – векторы координат объектов, $F_X = (F_{X1}, F_{X2}, F_{X3})$, $F_Y = (F_{Y1}, F_{Y21}, F_{Y3})$ – векторы управляющих сил объектов, $\mathrm{g} = (0,0,-g)$ – постоянный вектор ускорения свободного падения, а m_X, m_Y – соответственно массы объектов X и Y.

Требуется определить управляющие вектор-функции $F_X(t)$ и $F_Y(t)$ с ограниченными компонентами

$$\left|F_{Xi}(t)\right| \le F_{Xi}^0, \quad \left|F_{Yi}(t)\right| \le F_{Yi}^0, \qquad i = 1,2,3 \tag{5.2}$$

так, чтобы объекты (5.1) перешли из начальных состояний в момент $t = 0$

$$x(0) = x^0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}^0,\ y(0) = y^0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}^0 \tag{5.3}$$

$$x^0 \ne y^0, \quad x_3^0 \ge 0, \quad y_3^0 \ge 0$$

в заданные конечные состояния

$$x(T) = x^1,\ \dot{x}(T) = \dot{x}^1,\ y(T) = y^1,\ \dot{y}(T) = \dot{y}^1 \tag{5.4}$$

$$x^1 \ne y^1, \quad x_3^1 \ge 0, \quad y_3^1 \ge 0$$

в некоторый нефиксированный момент времени $t = T$ и при их совместном движении не имело место столкновения, т.е. выполнялось условие

$$\left|x(t) - y(t)\right| \ne 0, \qquad t \in (0, T) \tag{5.5}$$

а также выполнялись ограничения

$$x_3(t) \ge 0,\ y_3(t) \ge 0,\ t \in (0, T) \tag{5.6}$$

В переменных (с дальнейшим опусканием штрихов)

$$x' = x - \mathrm{g}t^2/2,\ y' = y - \mathrm{g}t^2/2 \tag{5.7}$$

уравнения (5.1) запишутся в виде

$$m_X \ddot{x} = F_X, \quad m_Y \ddot{y} = F_Y \tag{5.8}$$

с сохранением исходных краевых данных и условия нестолкновения и ограничений (5.3)-(5.6).

Если ввести безразмерные переменные по следующим формулам (с дальнейшим опусканием штрихов):

$$t' = t/\gamma,\ T' = T/\gamma,\ \gamma = (m_X(x_1^0 - y_1^0)/F_{X1}^0)^{1/2} \tag{5.9}$$

$$x_1' = x_1 / \xi_1, \quad x_1'^{0,1} = x_1^{0,1} / \xi_1, \quad \dot{x}_1'^{0,1} = \dot{x}_1^{0,1} / \xi_1, \quad \xi_1 = x_1^0 - y_1^0$$

$$x_i' = x_i / \xi_i, x_i'^{0,1} = x_i^{0,1} / \xi_i, \dot{x}_i'^{0,1} = \dot{x}_i^{0,1} / \xi_i, \xi_i = (m_X \left(x_1^0 - y_1^0\right) / F_{Xi}^0)^{-1/2}, \ i = 2,3$$

$$y_i' = y_i / \mu_i, \quad y_i'^{0,1} = y_i^{0,1} / \mu_i, \quad \dot{y}_i'^{0,1} = \dot{y}_i^{0,1} / \mu_i, \quad \mu_i = (m_Y \left(x_1^0 - y_1^0\right) / F_{Yi}^0)^{-1/2}$$

$$F_{Xi}' = F_{Xi} / F_{Xi}^0, \quad F_{Yi}' = F_{Yi} / F_{Yi}^0, \quad i = 1,2,3$$

то соотношения (5.8), (5.2) упростятся: в них получим

$$m_X = m_Y = 1, \quad F_{Xi}^0 = F_{Yi}^0 = 1, \quad i = 1,2,3 \tag{5.10}$$

Далее введем обозначения

$$x_{i1} = x_i, \ x_{i2} = \dot{x}_i, \ y_{i1} = y_i, \ y_{i2} = \dot{y}_i, \ i = 1,2,3 \tag{5.11}$$

и представим уравнения (5.8) в виде

$$\dot{x} = A_X x + B_X u, \ \dot{y} = A_Y y + B_Y \mathrm{v} \tag{5.12}$$

со следующими постоянными матрицами $A_{X,Y}, B_{X,Y}$, фундаментальными матрицами Φ_X, Φ_Y, фазовыми и управляющими векторами x, y и u, v соответственно:

$$A_{X,Y} = \begin{pmatrix} A_{X,Y}^1 & (0) & (0) \\ (0) & A_{X,Y}^2 & (0) \\ (0) & (0) & A_{X,Y}^3 \end{pmatrix}, \ (0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_X^i = A_Y^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ i = 1,2,3 \tag{5.13}$$

$$B_{X,Y} = (B_{X,Y}^1, B_{X,Y}^2, B_{X,Y}^3)^T, B_X^1 = B_Y^1 = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \end{pmatrix}, B_X^2 = B_Y^2 = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix}, \ B_X^3 = B_Y^3 = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_x = \Phi_y = \begin{pmatrix} \Phi(t) & (0) & (0) \\ (0) & \Phi(t) & (0) \\ (0) & (0) & \Phi(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32})^T, \qquad y = (y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32})^T$$

$$u = (u_1, u_2, u_3)^T, \ u_i = F_{Xi}, \quad \mathrm{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)^T, \ \mathrm{v}_\mathrm{i} = F_{Yi}, \quad i = 1,2,3$$

В обозначениях (5.11) начальные и конечные условия (5.3), (5.4), ограничения на управления и координаты (5.2), (5.6), а также условие отсутствия столкновения (5.5) запишутся так:

$$x^0 = (x_{11}^0, x_{12}^0, x_{21}^0, x_{22}^0, x_{31}^0, x_{32}^0)^T, \ \ y^0 = (y_{11}^0, y_{12}^0, y_{21}^0, y_{22}^0, y_{31}^0, y_{32}^0)^T \tag{5.14}$$

$$\sum_{i=1}^{3} (x_{i1}^0 - y_{i1}^0)^2 \neq 0, \qquad x_{31}^0 \geq 0, \ \ y_{31}^0 \geq 0$$

$$x^1 = (x_{11}^1, x_{12}^1, x_{21}^1, x_{22}^1, x_{31}^1, x_{32}^1)^T, \ \ y^1 = (y_{11}^1, y_{12}^1, y_{21}^1, y_{22}^1, y_{31}^1, y_{32}^1)^T \tag{5.15}$$

$$\sum_{i=1}^{3} (x_{i1}^1 - y_{i1}^1)^2 \neq 0, \qquad x_{31}^1 \geq 0, \ \ y_{31}^1 \geq 0$$

$$\left|u_i(t)\right| \leq u_i^0, \qquad \left|\mathrm{v}_i(t)\right| \leq \mathrm{v}_i^0, \ \ u_i^0 = \mathrm{v}_i^0 = 1, \ \ i = 1,2,3 \tag{5.16}$$

$$\left|x^{(1)}(t) - y^{(1)}(t)\right| \neq 0 \quad t \in (0,T) \tag{5.17}$$

$$x^{(1)}(t) - y^{(1)}(t) = \left(x_{11}(t) - y_{11}(t), \quad x_{21}(t) - y_{21}(t), \quad x_{31}(t) - y_{31}(t)\right)^T$$

$$x_{31}(t) > 0, \qquad y_{31}(t) > 0, \qquad t \in (0,T) \tag{5.18}$$

Определим управления $u(t)\,,\mathrm{v}(t)$ так, чтобы система (5.12) перешла из начального состояния (5.14) в заданное конечное состояние (5.15) и при этом удовлетворялись условия (5.16)-(5.18).

Применим общую схему построения управления, изложенную в предыдущих пунктах. С помощью (4.1)-(4.3), (5.11) найдем

$$
\begin{aligned}
&u_i(t)=\sum_{q=1}^{12} f_{iq}^X(t,T)\,x_q^*, \quad \mathrm{v}_i(t)=\sum_{q=1}^{12} f_{iq}^Y(t,T)\,y_q^*, \quad i=1,2,3\\
&x_{i1}(t)=\sum_{q=1}^{12} g_{iq}^X(t,T)\,x_q^*, \quad y_{i1}(t)=\sum_{q=1}^{12} g_{iq}^Y(t,T)\,y_q^*, \quad i=1,2,3
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

где через $x_q^*,\ y_q^*,\ q=1,\dots,6$ последовательно обозначены координаты векторов x^0, y^0 (5.14), а через $x_q^*,y_q^*,\ q=7,\dots,12$ – координаты векторов x^1, y^1(5.15) соответственно.

Согласно вышеизложенной методики, управления (5.19) переводят системы (5.12) из начального состояния (5.15) в заданное состояние (5.16) при ограничениях (5.16),(5.18) без столкновения (5.17), если время T выбрать из условия (4.11). Перейдем к нахождению T.

Запишем условие (5.17) в виде

$$
\left|\{z(t,T)\}\right|=\left|\{G(t,T)\}\cdot z^*\right|\neq 0\,, \qquad t\in(0,T) \tag{5.20}
$$

где с учетом (3.2), (3.3), (2.10), (2.11)

$$
\{z(t,T)\}=\begin{pmatrix} z_1(t,T)\\ z_2(t,T)\\ z_3(t,T)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11}(t,T)-y_{11}(t,T)\\ x_{21}(t,T)-y_{21}(t,T)\\ x_{31}(t,T)-y_{31}(t,T)\end{pmatrix} \tag{5.21}
$$

$$
\{G(t,T)\}=\left(\left\{G_X^0(t,T)\right\}\quad \left\{G_X^1(t,T)\right\}\quad -\left\{G_Y^0(t,T)\right\}\quad -\left\{G_Y^1(t,T)\right\}\right) \tag{5.22}
$$

Здесь матрицы $\left\{G_{X,Y}^{0,1}(t,T)\right\}$ получаются из матриц $G_{X,Y}^{0,1}(t,T)$ (3.33) отбрасыванием четных строк:

$$
\left\{G_X^{0,1}\right\}=\left\{G_Y^{0,1}\right\}=\begin{pmatrix} g_{11}^{0,1} & g_{12}^{0,1} & g_{13}^{0,1} & g_{14}^{0,1} & g_{15}^{0,1} & g_{16}^{0,1}\\ g_{21}^{0,1} & g_{22}^{0,1} & g_{23}^{0,1} & g_{24}^{0,1} & g_{25}^{0,1} & g_{26}^{0,1}\\ g_{31}^{0,1} & g_{32}^{0,1} & g_{33}^{0,1} & g_{34}^{0,1} & g_{35}^{0,1} & g_{36}^{0,1}\end{pmatrix}, \quad z^*=(x^0,x^1,y^0,y^1)^T
$$

$$
\begin{aligned}
&g_{1i}^{0,1}=0,\quad i=3,\dots,6;\quad g_{2i}^{0,1}=0,\quad i=1,2,5,6;\quad g_{3i}^{0,1}=0,\quad i=1,\dots,4\\
&g_{11}^0=1+2t^3/T^3-3t^2/T^2, \qquad g_{12}^0=t+t^3/T^2-2t^2/T\\
&g_{11}^1=-2t^3/T^3+3t^2/T^2, \qquad g_{12}^1=t^3/T^2-t^2/T
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

При обозначениях (5.21)-(5.23) систему (3.8) ((3.6)) можно записать в виде:

$$
\sum_{j=1}^{2}(g_{1j}^0(t,T)(x_{ij}^0-y_{ij}^0)+g_{1j}^1(t,T)(x_{ij}^1-y_{ij}^1)), \qquad t\in(0,T), \quad i=1,2,3 \tag{5.24}
$$

где коэффициенты $x_{i1}^{0,1}-y_{i1}^{0,1}$, $i=1,2,3$ удовлетворяют условиям (5.14), (5.15).

Функции $g_{11}^0(t,T)\,,g_{12}^0(t,T)\,,g_{11}^1(t,T)\,,g_{12}^1(t,T)$ (5.23) линейно независимы при $t\in(0,T)$ для произвольного $T>0$ и при всех $z^*\neq 0$ (5.14),(5.15). Тогда для заданного $z^* \neq 0$ условие (5.17) выполняется, т.е. система (5.24) неразрешима, если время $T > 0$ удовлетворяет условиям (3.10)(a) или (3.10)(b).

С учетом (5.23), преобразуем (5.24) к виду

$$a_{i3}t^3 + a_{i2}t^2 + a_{i1}t + a_{i0} = 0\,, \quad t \in (0,T)\,, \quad i = 1,2,3 \tag{5.25}$$

где

$$a_{i0} = \alpha_i^0\,,\ a_{i1} = \beta_i^0\,,\ a_{i2} = (-3\alpha_i^0 + 3\alpha_i^1)T^{-2} - (2\beta_i^0 + \beta_i^1)T^{-1}\,,\ \alpha_i^{0,1} = x_i^{0,1} - y_i^{0,1}$$

$$a_{i3} = (2\alpha_i^0 - 2\alpha_i^1)T^{-3} + (\beta_i^0 + \beta_i^1)T^{-2}\,,\ \beta_i^{0,1} = \dot{x}_i^{0,1} - \dot{y}_i^{0,1}\,,\ \alpha_1^0 = 1\,,\ i = 1,2,3 \tag{5.26}$$

Для каждого уравнения системы (5.25) множество $M^{(j)}(t,T)$ (3.9) состоит не более из трех точек – корней уравнения. Количество и расположение этих корней зависят от коэффициентов $a_{ij}, i, j = 1,2,3$ (5.25), которые зависят как от начальных и конечных состояний объектов, так и от времени $T > 0$. Таким образом, для заданных начальных и конечных состояний ($z^* \neq 0$), согласно вышеизложенному, $T > 0$ определяется из (3.11)(a), если на интервале $(0,+\infty)$ хотя бы одно уравнение (5.25) неразрешимо или все уравнения разрешимы, но не имеют одинаковых корней (3.10)(a), и определяется из (3.11)(b)), если на интервале $(0,+\infty)$ все уравнения (5.25) разрешимы, имеют одинаковые корни, однако наименьший из них больше, чем конечное время или наибольший из них отрицательный (3.10)(b).

Запишем систему (5.25) в матричной форме:

$$A \cdot \overline{t} = \overline{b}\,, \quad A = \left(a_{ij}\right)_{i,j}\,, \quad i,j = 1,2,3 \tag{5.27}$$

$$\overline{b} = \left(-a_{10}, \quad -a_{20}, \quad -a_{30}\right)^T,\ \overline{t} = \left(p, \quad q, \quad r\right)^T,\ p = t^3,\ \ q = t^2,\ \ r = t\,,$$
$$0 < r < T$$

Так как начальные и конечные положения объектов не совпадают – (5.14), (5.15), то $\overline{b} \neq 0$.

Пусть зафиксирован некоторый набор начальных и конечных состояний объектов X, Y (5.14), (5.15), а также время $T > 0$ окончания процесса. Вычислив детерминант матрицы (5.27) и проделав некоторые упрощения, получим

$$\det[A(T)] = f(x^0, x^1, y^0, y^1) \cdot T^{-4} \tag{5.28}$$

где $f = (\alpha_3^0 - \alpha_3^1)(\beta_1^1\beta_2^0 - \beta_1^0\beta_2^1) + \beta_3^0((-\alpha_2^0 + \alpha_2^1)\beta_1^1 + (\alpha_1^0 - \alpha_1^1)\beta_2^1) +$

$$+\beta_3^1((-\alpha_2^0 + \alpha_2^1)\beta_1^0 + (-\alpha_1^0 + \alpha_1^1)\beta_2^0) \tag{5.29}$$

Так как $T > 0$, то из (5.28), (5.29) следует, что для тех начальных и конечных состояний (5.14), (5.15), при которых $f = 0$, равенство

$$\det[A(T)] = 0 \tag{5.30}$$

имеет место при любом $T > 0$ и поэтому система (5.27), следовательно, и система (5.25) неразрешимы, а условие (5.17) выполняется при любом выборе конечного времени $T > 0$. Это соответствует случаю (3.10)(a).

Для тех значений (5.14), (5.15), при которых $f \neq 0$ –

$$\det[A(T)] \neq 0 \tag{5.31}$$

и система (5.27) имеет единственное решение:

$$\overline{t}^* = (p^*, q^*, r^*)^T \tag{5.32}$$

$$p^*(T) = D_p / D\,,\ q^*(T) = D_q / D\,,\ \ r^*(T) = D_r / D\,,\ D = \det[A(T)] \tag{5.33}$$

Для того, чтобы из существования решения $\overline{t}^*$ (5.32) системы (5.27) вытекало существование решения $t^* \in (0,T)$ системы (5.25), необходимо и достаточно, чтобы компоненты решения (5.33) удовлетворяли условиям:

$$q^*(T) = r^{*^2}(T),\;\; p^*(T) = q^*(T)\cdot r^*(T) \text{ (a)} \qquad r^*(T) = t^*(T) \in (0,T) \text{ (b)} \tag{5.34}$$

Отсюда следует, что в случае (5.31), для неразрешимости системы (5.25), т.е. для того, чтобы имели место условия (3.10)(a) или (3.10)(b), достаточно, чтобы компоненты p^*, q^*, r^* (5.33) не удовлетворяли хотя бы одному из условий (5.34)(a) или (b). Покажем, что для рассматриваемого модельного примера всегда можно $T > 0$ выбрать так, чтобы не выполнялись соотношения (5.34)(a), т.е. имело место условие (3.10)(a).

Из (5.34), после некоторых упрощений получим

$$p^*(T) = (\alpha_3 + \beta_3 T)T^2,\;\; q^*(T) = (\alpha_2 + \beta_2 T)T,\;\; r^*(T) = t^*(T) = \alpha_1 + \beta_1 T \tag{5.35}$$

где α_1 и β_1 определяются следующим образом:

$$\alpha_1 = \frac{(\alpha_1^1\alpha_3^0 - \alpha_1^0\alpha_3^1)(\beta_2^0 - \beta_2^1) + \alpha_2^1(\alpha_3^0(\beta_1^1 - \beta_1^0) + \alpha_1^0(\beta_3^0 - \beta_3^1)) + \alpha_2^0(\alpha_3^1(\beta_1^0 - \beta_1^1) + \alpha_1^1(\beta_3^1 - \beta_3^0))}{\alpha_3^1(\beta_1^1\beta_2^0 - \beta_1^0\beta_2^1) + \alpha_3^0(\beta_1^0\beta_2^1 - \beta_1^1\beta_2^0) + ((\alpha_2^0 - \alpha_2^1)\beta_1^1 + (\alpha_1^1 - \alpha_1^0)\beta_2^1)\beta_3^0 + ((\alpha_2^1 - \alpha_2^0)\beta_1^0 + (\alpha_1^0 - \alpha_1^1)\beta_2^0)\beta_3^1}$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_3^0(\beta_1^0\beta_2^1 - \beta_1^1\beta_2^0) + \alpha_3^1(\beta_1^1\beta_2^0 - \beta_1^0\beta_2^1) + \alpha_1^0(\beta_2^0\beta_3^1 - \beta_2^1\beta_3^0)}{\alpha_3^1(\beta_1^1\beta_2^0 - \beta_1^0\beta_2^1) + \alpha_3^0(\beta_1^0\beta_2^1 - \beta_1^1\beta_2^0) + ((\alpha_2^0 - \alpha_2^1)\beta_1^1 + (\alpha_1^1 - \alpha_1^0)\beta_2^1)\beta_3^0 + ((\alpha_2^1 - \alpha_2^0)\beta_1^0 + (\alpha_1^0 - \alpha_1^1)\beta_2^0)\beta_3^1}$$

Аналогичным образом определяются $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ в (5.35).

Подставим (5.35) в (5.34)(a). После некоторых упрощений получим следующую систему:

$$\begin{cases} (\alpha_2 + \beta_2 T)T = (\alpha_1 + \beta_1 T)^2 \\ (\alpha_3 + \beta_3 T)T = (\alpha_1 + \beta_1 T)(\alpha_2 + \beta_2 T) \end{cases} \tag{5.36}$$

относительно T, которая для заданного набора $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3) \neq 0$ не совместима при

$$T \in M_1 = (0, +\infty) \setminus \left\{T^{(j)}\right\}_{j=1,2} \bigcap \{T : 0 \le \alpha_1 + \beta_1 T \le T\} \tag{5.37}$$

где $T^{(1)}, T^{(2)}$ – общие корни уравнений (5.36) в случае их существования.

Таким образом, для заданного набора $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3)$ и при любом T (5.37) на интервале $(0,T)$ объекты X и Y гарантированно избегают от столкновения.

В соответствии с алгоритмом построения ограниченных управлений (2.8), (2.10), (2.11) и (4.1)-(4.9), а также с учетом (5.12), (5.15), (5.17), для вспомогательных функций Q_i, S_i (4.4) получим

$$Q_i(T) = S_i(T) = (72/T^4 + 20/T^2)^{-1/2},\;\; i = 1,2,3 \tag{5.38}$$

Подставим Q_i, S_i (5.38) в условия (4.9). Из полученных уравнений найдем

$$T_1 = (10\left|x^*\right|^2 + (100\left|x^*\right|^4 + 72\left|x^*\right|^2)^{1/2})^{1/2},\; T_2 = (10\left|y^*\right|^2 + (100\left|y^*\right|^4 + 72\left|y^*\right|^2)^{1/2})^{1/2} \tag{5.39}$$

Время T, при котором ограничения управления (5.16) не нарушаются для всех $t \in [0,T]$ с учетом (5.39), выбирается из условия (4.8):

$$T \in [\overline{T}, \infty),\quad \overline{T} = \max(T_1, T_2) \tag{5.40}$$

где T_1, T_2 определяются согласно (5.39).

Время T, при котором не нарушается первое ограничение в (5.18) для всех $t \in [0,T]$, выберем следующим образом. Из (2.9)-(2.11), (511),(5.14),(5.15) и (5.21)-(5.23) имеем $x_{31}(t) = g_{11}^0 x_{31}^0 + g_{11}^1 x_{31}^1 + g_{12}^0 x_{32}^0 + g_{12}^1 x_{32}^1$, в которой при $t \in [0,T]$ имеют место неравенства $g_{11}^0(t,T) \ge 0$, $g_{11}^1(t,T) \ge 0$, $g_{12}^0(t,T) \ge 0$, $g_{12}^2(t,T) \le 0$. Так как $x_{31}^0, x_{31}^1 \ge 0$, то выполнение ограничений (5.18) зависит от величин x_{32}^0, x_{32}^1. Рассмотрим случай, когда $x_{32}^0 > 0$ и $x_{32}^1 > 0$, остальные случаи получаются аналогичным образом. Если $x_{31}^0 > 0$ и $x_{31}^1 > 0$, то конечное время T нужно выбрать так, чтобы

$$\min_{t\in[0,T]} \left(g_{11}^0 x_{31}^0 + g_{11}^1 x_{31}^1 + g_{12}^0 x_{32}^0 \right) \ge \max_{t\in[0,T]} \left| g_{12}^1 x_{32}^1 \right| \tag{5.41}$$

Здесь, с одной стороны, $\max\limits_{t\in[0,T]} \left| g_{12}^1 x_{32}^1 \right| = (4T/27) x_{32}^1$ при $t = 2T/3$, а с другой стороны, $\min\limits_{t\in[0,T]} \left(g_{11}^0 x_{31}^0 + g_{11}^1 x_{31}^1 + g_{12}^0 x_{32}^0 \right) = \min\{x_{31}^0, x_{31}^1\}$. Следовательно, (5.41) имеет место для любого

$$T \in M_2^X = \{T \in (0,+\infty);\ \ 0 < T \le 27 \min(x_{31}^0, x_{31}^1) / 4 x_{32}^1\} \tag{5.42}$$

Исходя из свойств функции $\left| g_{12}^1(t,T) x_{32}^1 \right|$, множество (5.42) можно расширить и в (5.42) заменить $\min\{x_{31}^0, x_{31}^1\}$ на x_{31}^1. Тогда включение (5.42) примет вид

$$T \in M_2^X = \{T \in (0,+\infty):\ \ 0 < T \le \overline{\overline{T}}_X,\ \ \overline{\overline{T}}_X = 27 x_{31}^1 / 4 x_{32}^1\} \tag{5.43}$$

Аналогичное условие можно получить и для времени T, при котором для всех $t \in [0,T]$ не нарушается второе ограничение в (5.18):

$$T \in M_2^Y = \{T \in (0,+\infty):\ \ 0 < T \le \overline{\overline{T}}_Y,\ \ \overline{\overline{T}}_Y = 27 y_{31}^1 / 4 y_{32}^1\} \tag{5.44}$$

Тогда, в соответствии с (4.12) и (5.43), (5.44), время T, при котором не нарушаются ограничения (5.18) для всех $t \in [0,T]$, выбирается из включения

$$T \in M_2 = M_2^X \bigcap M_2^Y \tag{5.45}$$

Таким образом, для заданных начальных и конечных состояний $z^* = \left(x^*,\, y^*\right)^T$ (5.14), (5.15), фиксируя любое T из условия (4.11), где $M_1, \overline{T}, M_2$ определяются согласно (5.37), (5.40), (5.45) соответственно, находим искомые управления $u_i(t), \mathrm{v}_i(t)\ /i = 1,2,3$ /и фазовые траектории $x_{i1}(t), \mathrm{y}_{i1}(t)\ /i = 1,2,3$ по явным формулам (5.19), при которых решается задача (5.12), (5.14)-(5.18) и, следовательно, исходная задача (5.1)-(5.6).

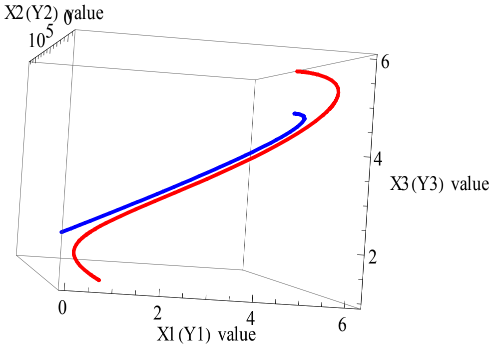
В качестве иллюстрации приведем пример численной реализации описанного алгоритма управления объектами (5.1) при ограничениях (5.2), (5.5), (5.6). Начальные и конечные безразмерные данные (5.3), (5.4) задавались следующими:

$$x^0 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ \dot{x}^0 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ y^0 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\end{pmatrix},\ \dot{y}^0 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{5.46}$$

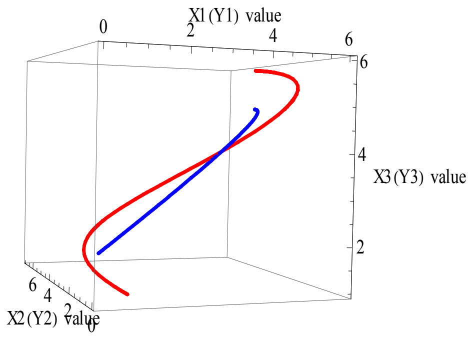
$$x^1 = \begin{pmatrix}6 & 5 & 6\end{pmatrix},\ \dot{x}^1 = \begin{pmatrix}0 & 7/10 & 1/24\end{pmatrix},\ y^1 = \begin{pmatrix}6 & 5 & 5\end{pmatrix},\ \dot{y}^1 = \begin{pmatrix}-1/20 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Для этих значений из (5.29) получаем $f = 5/36$. Следовательно, (5.27) имеет единственное решение $\overline{t}^* = (p^*, q^*, r^*)^T$: $r^*(T) = -12/5 + 81T/125$, $q^*(T) = (-72/5 + 81T/125)T$, $p^*(T) = (-108/5 + 81T/125)T^2$. Система

(5.34)(а), соответствующая этим решениям и значениям (5.46), имеет единственное решение только при $T=50$, т.е. в рассматриваемом случае $M_1=(4,+\infty)\setminus\{50\}$ (5.37). Из (5.39) найдем $T_1=45$ и $T_2=42.5$ и согласно (5.40), конечное время T, при котором не нарушаются ограничения на управления, можно выбирать из интервала $[45,+\infty)$. Далее, из (5.43) определим $M_2^X=(0,985)$, а из (5.44) – $M_2^Y=(0,+\infty)$. Следовательно, из (5.45) получим $M_2=M_2^X=(0,985)$. Таким образом, конечное время, за которое осуществляется заданый переход (5.46) при построенных управлениях (5.19), с учетом (5.45), можно выбрать из интервала $[45,50)\cup(50,985)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 представлены результаты численного моделирования для случаев $T=65$ и $T=50$ соответственно. При движении к заданным конечным состояниям объекты избегают от столкновения в первом случае, а во втором случае столкновение неизбежно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Об общей теории систем управления. //Труды 1-го Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. (IFAC). М.: АН СССР, 1961. Т.2, с.521-547.
2. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Наука, 2006. 326с.
3. Аветисян В.В. Ограниченное управление линейной динамической системой с ограничением на фазовую скорость // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 4. С.48-55.
4. Аветисян В.В. Управление электромеханической системой манипулятором при ограничениях на напряжение и ток // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. № 4. С.38-45.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.

Сведения об авторах:

Аветисян Ваган Вардгесович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории оптимального управления и приближенных методов, факультета математики и механики Ереванского государственного университета, (374 94) 44 95 60;
E–mail: vanavet@yahoo.com

Чахмахчян Рафаел Эдвардович, аспирант кафедры теории оптимального управления и приближенных методов, факультета математики и механики Ереванского государственного университета, (374 93) 28 52 24;
E –mail: rafayel.ch@gmail.com

Поступила в редакцию 21.12.2009