ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №4, 2010 Механика

УДК. 532.5.032

ДИФФУЗИЯ ВИХРЕЙ В МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

БРУТЯН М.А.

Ключевые слова: неньютоновская механика, микрополярная жидкость, вихревые течения, точные решения.
Key words: non-newtonian mechanics, micropolar fluids, vortex flows, exact solutions.

Բրուտյան Մ.Ա.
Մրրիկների դիֆիզիան միկրոպոլյար հեղուկում

Միկրոպոլյար հեղուկի հավասարումների շրջանակում գտնված են մրրկային հոսանքները նկարագրող լուծումներ, որոնք նման են կլասիկ նյուտոնյան հեղուկի համար Օզեենի և Թեյլորի հայտնի լուծումներին: Մանրամասն ուսումնասիրված է Օզեենի խնդիրը միկրոպոլյար հեղուկում ուղղագիծ մրրկային թելի դիֆուզիայի մասին: Հաստատված է, որ այն ավտոմոդել չէ և չունի անալիտիկ լուծում:Որոշված են ինտեգրալ ինվարիանտները և տրված է խնդրի թվային լուծումը:

Brutyan M.A.
Vortices Diffusion in a Micropolar Luquid

Solutions are found that describe vortex flow within the framework of micropolar liquid theory. These solutions are similar to well-known exact solutions of Oseen and Taylor for classical Newtonian fluid. It is shown that Oseen problem of a line vortex decay in micropolar liquid is not self-similar and does not have an exact solution. Integral invariants and numerical solution of the problem are provided. It is found that for Taylor problem of a vortex lattice diffusion the influence of micropolarity tends to more intensive vortex decay then in a classic Navier-Stokes fluid.

В рамках уравнений микрополярной жидкости найдены решения, описывающие вихревые течения, аналогичные известным точным решениям Озеена и Тейлора, полученным в рамках классической ньютоновской жидкости. Подробно исследована задача Озеена о диффузии прямолинейной вихревой нити в микрополярной жидкости. Установлено, что она не является автомодельной и не имеет точного аналитического решения. Определены интегральные инварианты и дано численное решение задачи. Найдено, что в задаче Тейлора о диффузии вихревой решетки влияние микрополяных свойств жидкости приводит к более интенсивному распаду вихрей по сравнению с обычной ньютоновской жидкостью модели Навье-Стокса.

1. Введение. Одной из важнейших задач теории нестационарных течений вязкой жидкости является задача о диффузии завихренности. С этим аспектом гидродинамики неизбежно сталкиваются при изучении течений в пограничных слоях, следах и других вихревых образованиях. В классической гидродинамике вязкой ньютоновской жидкости наиболее известный результат в этой области получил Озеен [1] в задаче о диффузии прямолинейной вихревой нити и Тейлор [2] в задаче о диффузии решетки вихрей. Решение Озеена описывает двумерное течение с круговой симметрией, линии тока которого представляют собой окружности с центром на оси вихря, а вектор завихренности параллелен этой оси и зависит только от радиального расстояния и времени. Этот вихрь можно рассматривать как регуляризацию прямолинейного вихря, в котором завихренность имеет особенность типа дельта-функции.

В уравнениях классической гидродинамики, основанных на линейной связи тензора напряжений и тензора скоростей деформаций, для описания течения используется единственное векторное поле – поле скоростей. Эти основные предположения, как известно, определяют класс ньютоновских жидкостей. Наиболее известной моделью неньютоновских сред, для описания которых требуются дополнительные переменные гидродинамического типа, является так называемая микрополярная жидкость [3-6]. Привлекательность этой модели заключается в том, что она является, пожалуй, наиболее важным и одновременно простым обобщением классической модели Навье-Стокса. Дополнительно к полю скоростей в рассмотрение вводится единственное векторное поле угловых скоростей микровращения. Таким образом, к системе определяющих уравнений добавляется только одно (векторное) уравнение, соответствующее закону сохранения момента количества движения. Физически микрополярные жидкости могут адекватно представлять жидкости, состоящие из стержнеобразных элементов. Некоторые анизотропные жидкости, например, жидкие кристаллы, имеющие гантелевидные молекулы, относятся к этому типу. По существу сюда относятся и многие биологические жидкости, в частности, кровь животных. Другие жидкости, содержащие определенные полимерные добавки, также могут быть описаны математической моделью, в основе которой лежат представления о микрополярных жидкостях.

В настоящей работе на примере задачи Озеена (диффузия вихря) и Тейлора (диффузия вихревой решетки) изучается влияние микрополярности на нестационарный процесс вязкой диффузии. Сложность решения нестационарных задач в неньютоновских жидкостях привела к тому, что в этом направлении выполнено сравнительно небольшое число работ, посвященных главным образом вопросам линейной устойчивости простейших течений [7-10], задаче Стокса-Рэлея о движении плоскости [11-13] и задаче Рэлея о схлопывании пузыря в нелинейно-вязкой и вязкоупругой жидкости [14-17]. Диффузия вихря в рамках иных моделей неньютоновской жидкости рассматривалась ранее в работах [18,19].

2. Определяющие уравнения микрополярной жидкости. Уравнения микрополярной жидкости, часто называемые уравнениями асимметрической гидромеханики, характеризуются несимметричным тензором напряжений σ_{ij} и наличием дополнительного тензора микромоментов m_{ij}

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\partial_i V_j + \partial_j V_i\right) + k\left(\partial_i V_j - \varepsilon_{ijm}\Omega_m\right), \tag{1}$$

$$m_{ij} = \alpha\delta_{ij}\mathrm{div}\Omega + \beta\partial_j\Omega_i + \gamma\partial_i\Omega_j \tag{2}$$

Здесь $\partial_i = \partial / \partial x_i$; δ_{ij} –тензор Кронекера; ε_{ijm} – антисимметричный тензор Леви-Чивита; p – давление; V – скорость; Ω –угловая скорость микровращения; μ – коэффициент динамической вязкости; α, β, γ – коэффициенты вращательной вязкости; k –коэффициент вихревой вязкости, характеризующий меру “сцепления” частицы со своим окружением. Из (1) и (2) видно, что при эйлеровом описании состояние в асимметрической гидромеханике определяется, не только полем скоростей, но и полем угловых скоростей микровращения Ω.

Нестационарные уравнения микрополярной жидкости имеют вид [5]:

$$\rho\frac{dV}{dt} = \left(\mu + k\right)\Delta V + k\,\mathrm{rot}\Omega - \nabla p, \quad \mathrm{div}V = 0 \tag{3}$$

$$\rho J\left[\frac{d\Omega}{dt} - \left(\Omega\nabla\right)V\right] = \left(\alpha + \beta\right)\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\Omega\right) + \gamma\Delta\Omega - 2k\Omega + k\,\mathrm{rot}V, \tag{4}$$

где ρ –плотность массы, а ρJ –плотность микромомента инерции. В ранней работе [4] не учитывались микроинерционные свойства среды: левая часть уравнения (3) предполагалась равной нулю. Уравнения, предложенные в [3] в левой части (4), не содержат члена $\left(\Omega\nabla\right)V$, ответственного за скорость деформации вихревых линий угловой скорости микровращения. В работе [5] было показано, что уравнение для эволюции Ω, которое удовлетворяет основным требованиям, накладываемым на эволюцию аксиальных векторных полей в трехмерном пространстве, имеет вид (4). Подчеркнем то обстоятельство, что уравнение (4) с точностью до вязких членов формально совпадает с уравнением Гельмгольца для эволюции вектора завихренности $\omega = \mathrm{rot} V$ в классической гидродинамике. Это естественно, так как оба вектора ω и Ω являются аксиальными. Заметим также, что наличие в левой части уравнения, описывающего эволюцию аксиального вектора, члена типа $(\Omega\nabla)\mathrm{V}$ обязательно и встречается не только в уравнении Гельмгольца, но и, например, в уравнении Бэтчелора для разбавленных суспензий [20]. Нетрудно видеть, что в плоском и осесимметричном случае, а также в предельном случае малых чисел Рейнольдса уравнения, полученные в [3], и уравнения (3), (4) тождественно совпадают. Заметим, что в уравнениях (3) и (4) появились 4 дополнительных коэффициента вязкости α, β, γ и k, однако один из них, а именно k, играет особую роль, так как при $k = 0$ уравнение импульсов (3) отделяется от уравнения для микровращения (4). Таким образом, величина вихревой вязкости k дает возможность, в некотором смысле, измерять отличие микрополярной жидкости от классической ньютоновской.

3. Вихрь Озеена. Зададимся вопросом, существует ли в микрополярной жидкости аналог известного точного решения Озеена [1], полученного в рамках уравнений Навье-Стокса? В цилиндрической системе координат (r, θ, z) решение ищем в виде:

$$V = \left[0, v(r,t), 0\right], \omega = \mathrm{rot}V = \left[0, 0, \omega(r,t)\right], \; p = p(r,t), \Omega = \left[0, 0, \Omega(r,t)\right] \tag{5}$$

Используя (5) и вычисляя слагаемые, входящие в уравнения (3) и (4), а также учитывая выражение завихренности через азимутальную скорость $\omega = \partial v / \partial r + v / r$, приходим к следующим определяющим уравнениям:

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = (\mu + k) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) - k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right), \tag{6}$$

$$\rho J \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \gamma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + k(\omega - 2\Omega) \; . \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что при $k \neq 0$ уравнения (6), (7) не имеют автомодельного решения. Это связано с тем, что в микрополярной жидкости в отличие от классической существуют “внутренние длины” $L = \sqrt{J}$ и $R = \sqrt{\gamma / (\mu + k)}$, так что из соображений размерности уже не следует существование автомодельной переменной $r / \sqrt{\nu t}$, которая имеет место в ньютоновской жидкости $(k = 0)$. Поэтому сведение задачи к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений становится невозможным.

В безразмерных переменных $\xi = r / R$ и $\tau = t / T$, $T = R^2 / \Gamma_0$ уравнения (6) и (7) принимают вид:

$$\mathrm{A}\xi \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right), \tag{8}$$

$$\mathrm{B}\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right) + \lambda \xi (\omega - 2\Omega). \tag{9}$$

Здесь $A = A_0(1-\lambda)$, $A_0 = \rho\Gamma_0/\mu$, $B = \rho J\Gamma_0/\gamma$ и $\lambda = k/(\mu+k)$ – безразмерные параметры задачи, причем $A/B = R^2/L^2 >> 1$. При $\lambda = 0$ циркуляция скорости или суммарная завихренность Γ_0 в начальный момент времени по определению равна

$$\Gamma_0 = 2\pi R\xi \lim_{\tau\to 0} v_0(\xi,\tau) = 2\pi R^2 \lim_{\tau\to 0}\int_0^\infty \omega_0(\xi,\tau)\xi d\xi .$$

Выполняя дифференцирование по ξ в (9) и считая, что $\Omega(\xi)$ и ее производные остаются конечными при $\xi = 0$, находим, что на оси должно выполняться условие

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} = 0 \text{ при } \xi = 0. \tag{10}$$

Тогда из (8) немедленно получаем, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = 0 \text{ при } \xi = 0. \tag{11}$$

Проинтегрируем уравнения (8) и (9) по области течения. В результате имеем:

$$\frac{d\Gamma_\omega}{d\tau} = 0, \quad \Gamma_\omega = 2\pi R^2\int_0^\infty \omega(\xi,\tau)\xi d\xi , \tag{12}$$

$$B\frac{d\Gamma_\Omega}{d\tau} = \lambda(\Gamma_\omega - 2\Gamma_\Omega), \quad \Gamma_\Omega = 2\pi R^2\int_0^\infty \Omega(\xi,\tau)\xi d\xi . \tag{13}$$

Решая полученные уравнения с начальными условиями $\Gamma_\omega(0) = \Gamma_0$ и $\Gamma_\Omega(0) = \Gamma_{0\Omega}$, получаем

$$\Gamma_\omega = \Gamma_0 = \text{const}, \quad \Gamma_\Omega(\tau) = \frac{\Gamma_0}{2} + \left(\Gamma_{0\Omega} - \frac{\Gamma_0}{2}\right)\exp\left(-\frac{2\lambda\tau}{B}\right). \tag{14}$$

Заметим, что на больших временах $\tau\to\infty$ суммарная угловая скорость микровращения Γ_Ω стремится к $\Gamma_0/2$ при любых начальных данных $\Gamma_\Omega(0)$. Если вопрос о постановке начальных и граничных условий на ω решается так же, как и в классическом случае вихря Озеена, то соответствующий вопрос для Ω менее ясен [21]. Например, в качестве альтернативы условию прилипания обсуждаются и другие возможности, в частности, условие $\Omega = \omega/2$. Если в соответствии с этим в качестве начального условия принять $\Gamma_\Omega(0) = \Gamma_0/2$, то из (12) и (13) вместо (14) получим

$$\Gamma_\omega = \Gamma_0 = \text{const}, \quad \Gamma_\Omega = \Gamma_0/2 = \text{const}, \tag{15}$$

откуда замечаем, что в процессе диффузии в этом случае сохраняется не только суммарная завихренность, но и суммарная угловая скорость микровращения, причем $\Gamma_\Omega = \Gamma_\omega/2$.

Параболический тип уравнений (8) и (9) указывает на то, что в микрополярной жидкости, как и в классической ньютоновской среде, скорость распространения завихренности оказывается бесконечной. Диффузия вихря в другом классе неньютоновских сред, а именно в вязкоупругой жидкости рассмотрена в работе [19], где получено точное решение задачи и показано, что учет релаксационных свойств среды приводит к конечности скорости распространения завихренности.

Системy уравнений в частных производных (8) и (9) с помощью преобразования Фурье можно стандартным образом свести к системе ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений). Мы не приводим соответствующих выражений ввиду их громоздкости, а также в связи с тем, что после решения ОДУ обратное преобразование Фурье не удается выполнить в замкнутом виде.

Затухающие на бесконечности решения уравнений (8) и (9) находились численно конечно-разностным методом Келлера второго порядка точности [22]. Для этого (8) и (9) сначала приводятся к системе из четырех уравнений первого порядка

$$A\xi\frac{\partial\omega}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\xi}(\xi U) - \lambda\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi W), \qquad \frac{\partial\omega}{\partial\xi} = U,$$

$$B\xi\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\xi}(\xi W) + \lambda\xi(\omega - 2\Omega), \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} = W,$$

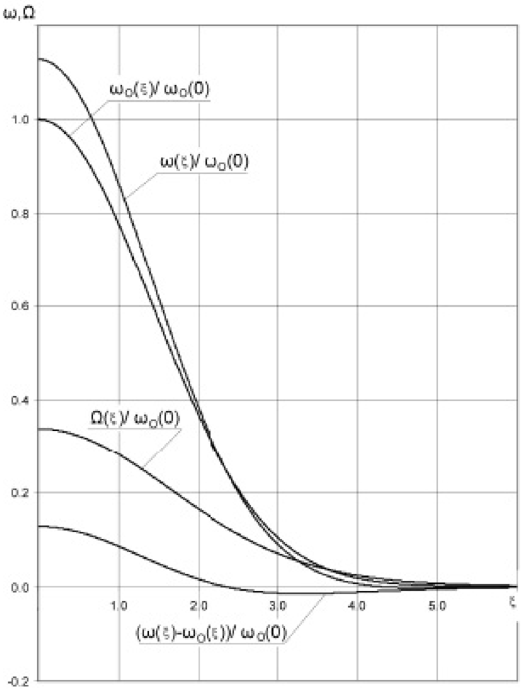
а затем, после конечно-разностной аппроксимации, сводятся к системе алгебраических уравнений, которая решается методом блочной прогонки с граничными условиями (10) и (11). В качестве начального условия для решения полной неавтомодельной задачи в момент времени $\tau = \tau_0 \to 0$ естественно взять автомодельное решение [23]. Соответствующее решение Озеена в новых переменных имеет вид:

$$\omega(\xi, \tau_0) = \frac{A_0\Gamma_0}{4\pi\tau_0}\exp\left(-\frac{A_0\xi^2}{4\tau_0}\right).$$

Для функции $\Omega(\xi, \tau)$ в качестве начального условия выбираем решение

$$\Omega(\xi, \tau_0) = \frac{B_0\Gamma_0}{8\pi\tau_0}\exp\left(-\frac{B_0\xi^2}{4\tau_0}\right),$$

которое соответствует условию (15).



Фиг.1. Распределение завихренности и угловой скорости микровращения в момент времени $\tau = 1$ в задаче Озеена; $\omega(\xi)$ – завихренность в микрополярной жидкости, $\omega_0(\xi)$ – завихренность из решения Озеена в ньютоновской жидкости, $\Omega(\xi)$ – угловая скорость микровращения.

Равномерная по $\sqrt{\tau}$ расчетная сетка содержала 201 узел $(\tau \in [\tau_0, \tau_k], \tau_0 = 0.01, \tau_k = 1)$. Сетка по ξ содержала 2001 узел ($\xi_0 = 0,\ \xi_k = 20$). На фиг. 1 приведен результат численного расчета распределения завихренности при $\tau = 1$ и значениях параметров $A = 1, B = 0.1$ и $\lambda = 0.5$. Сравнение с решением Озеена показывает, что при одинаковом значении циркуляции $\Gamma_\omega = \Gamma_0$ величина завихренности на оси в микрополярной жидкости больше, а закон ее убывания более крутой. Во всех проведенных расчетах контролировалась точность выполнения интегральных инвариантов (14). Максимальное отклонение не превышало $2 \cdot 10^{-5}$.

Рассмотренный пример эволюции вихря с единственной нетривиальной компонентой скорости является классическим примером, иллюстрирующим эффект влияния вязкости на диффузию завихренности. Реальные течения нередко имеют ненулевые составляющие скорости не только в азимутальном, но также в радиальном и аксиальном направлении. Точные решения, описывающие трехмерные нестационарные вихревые течения вязкой жидкости, автору не известны и, по-видимому, не существуют. Одним из точных решений трехмерных уравнений Навье-Стокса, описывающих стационарное вихревое течение с тремя ненулевыми компонентами скорости, является так называемый вихрь Бюргерса [24]. Это решение описывает стационарный процесс, в котором диффузия завихренности в радиальном направлении компенсируется ее усилением за счет растяжения вихревых линий вдоль оси. В работе [25] дано обобщение классического решения Бюргерса на случай микрополярной жидкости и показано, что эта задача, в отличие от рассмотренной диффузии вихря, допускает редукцию к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Вихревая решетка Тейлора. Рассмотрим теперь кратко задачу Тейлора о диффузии вихревой решетки с периодом 2π (выбор единиц длины) по осям x и y прямоугольной системы координат. По аналогии с классическим случаем ньютоновской жидкости решение ищем в виде:

$$\Psi = a\cos x\cos y\exp\left(-mt\right), \quad \Omega = b\cos x\cos y\exp\left(-mt\right) . \tag{16}$$

Здесь Ψ – функция тока, а постоянные a и b определяются из начальных условий. Нетрудно убедиться, что уравнения (3), (4) в плоском случае можно представить в форме:

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi + \frac{\partial(\Delta\Psi,\Psi)}{\partial(x,y)}\right] = (\mu+k)\Delta^2\Psi + k\Delta\sigma, \tag{17}$$

$$\rho J\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma,\Psi)}{\partial(x,y)}\right] = \gamma\Delta\sigma - 2k\sigma - k\Delta\Psi , \tag{18}$$

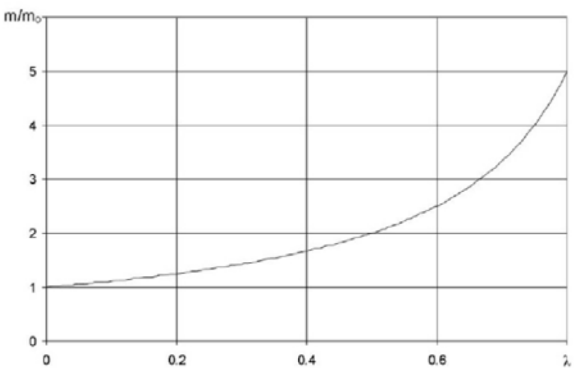
где $\partial(y_1,y_2)/\partial(x_1,x_2) = \det[\partial y_i/\partial x_j]$–якобиан. Подставляя (16) в уравнения (17) и (18), получаем следующую однородную систему линейных уравнений:

$$\left[\rho m - 2\left(\mu+k\right)\right]a + kb = 0,$$

$$2ka + \left[\rho J m - 2\left(\gamma+k\right)\right]b = 0,$$

откуда из условия существования нетривиального решения стандартным образом приходим к квадратному уравнению относительно m. Решая его, находим:

$$\rho m = \mu + k + \frac{k+\gamma}{J} + \sqrt{\left(\mu + k - \frac{k+\gamma}{J}\right)^2 + \frac{2k^2}{J}} \tag{19}$$



Фиг.2. Зависимость коэффициента затухания m/m_0 от степени микрополярности λ.

В целом, решение (19) качественно подобно решению Тейлора [2] и описывает экспоненциальное затухание завихренности. На фиг.2 в качестве иллюстрации представлена зависимость параметра m/m_0 от безразмерного коэффициента вихревой вязкости $\lambda = k/(\mu + k)$. Величина $m_0 = 2\mu/\rho$ соответствует значению коэффициента затухания m в решении Тейлора. Видно, что при увеличении "степени микрополярности" распад вихревой решетки происходит быстрее, чем в классической ньютоновской жидкости.

5. Заключение. Рассмотрена задача о диффузии вихрей в микрополярной жидкости, которая описывает широкий класс неньютоновских сред с внутренним микровращением. Дано обсуждение применимости исходных уравнений к описанию плоских и пространственных вихревых течений. Установлено, что из-за наличия дополнительных "внутренних длин" задача о диффузии прямолинейной вихревой нити в микрополярной жидкости не является автомодельной в отличие от соответствующей задачи Озеена в рамках классической модели Навье-Стокса. Определены интегральные инварианты и дано численное решение задачи. В задаче Тейлора о диффузии вихревой решетки найдено аналитическое выражение для коэффициента затухания и показано, что влияние микрополярных свойств жидкости приводит к усилению процесса диффузии по сравнению с обычной ньютоновской жидкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Oseen C.W. Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik.Leipzig: Akad. Verlag. 1927. 337s.
2. Taylor G.I. On the decay of vortices in viscous fluid // Phyl. Mag. 1923. V.46. P.671–674.
3. Eringen A.C. Theory of micropolar fluid // J. Math. Mech. 1966. V.16. №.1. P.1-18.
4. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В. Асимметрическая гидромеханика // ПММ. 1965. Т. 29. Вып 2. С.297–308.
5. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Об эффекте уменьшения сопротивления в микрополярной жидкости // Инж.-физ. ж. 1989. Т.57. №.2. С.213–219.
6. Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкостей с несимметричным тензором напряжений. Ереван: Изд. Ереван.ун-та, 1986. 387с.
7. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Устойчивость периодического течения в микрополярной жидкости // Инж.-физ. ж. 1991. Т.60. №.4. С.670–679.
8. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Устойчивость течения Колмогорова в вязкоупругой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. №4. С.17–24.
9. Ariman T., Cakmak A.S., Hill L.R. Flow of micropolar fluids between two concentric cylinders // Phys. Fluids. 1967. V.10. №12. P.2545–2550.
10. Sastry V.U.K., Das T. Stability of Couette flow and Dean flow in micropolar fluid. // Int. J. Eng. Sci. 1985. V.23. №.11. P.1163–1187.
11. Tanner R.I. Note on the Rayleigh problem for a visco-elastic fluid // ZAMP. 1962. V.13. №6. P.573–580.
12. Huilgol R.R. Corrections and extensions to "Propagation of a vortex sheet in a visco-elastic liquids- the Rayleigh problem" // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1983. V.12. №2. P.249–251.
13. Mochimaru Y. Unsteady-state development of plane Couette flow for visco-elastic fluids // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1983. V.12. №2. P.135–152.
14. Fogler H.S., Goddard J.D. Collapse of spherical cavities in viscoelastic fluids // Phys. Fluids. 1970. V.13. P.1135–1141.

15. Brutyan M.A., Krapivsky P.L. Collapse of spherical bubbles in fluids with nonlinear viscosity // Quart. Appl. Math. 1993. V.LI. P.745–749.
16. Bloom F. Bubble stability in a class of non-Newtonian fluids with shear dependent viscosities // Intern. J. Non-Linear Mech. 2002. V.37. P.527–539.
17. Brutyan M.A., Krapivsky P.L. Collapse of spherical bubbles in viscoelastic liquids. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1991. V.44. P.549–557.
18. Bujurke M.M., Biradar S.N., Hiremath P.S. On diffusion of vorticity in couple stress fluid // ZAMM. 1988. V.68. №1. P.577–580.
19. Брутян М.А. Диффузия завихренности в вязкоупругой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1997. №5. С.18–23.
20. Batchelor G.K. The stress system in a suspension of force-free particles // JFM. 1970. V. 41. P.545–570.
21. Kirwan A.D. Boundary conditions for micropolar fluids // Int. J. Eng. Sci. 1986. V. 24, №. 7. P.1237–1242.
22. Keller H.B. Numerical methods in boundary layer theory // Ann. Rev. Fluid Mech. 1978. V. 10. P. 417–433.
23. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 255с.
24. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances in Applied Mechanics. Academic Press: 1948. V. 1. P. 171–199.
25. Брутян М.А. Вихрь Бюргерса в микрополярной жидкости // Докл. НАН Армении. 2010. Т.110. №1. С.35–41.

Сведения об авторах:

Брутян Мурад Абрамович – к. ф-м. н., старш.научн.сотр. ФГУП “Центрального аэрогидродинамического института им. проф. Н.Е.Жуковского”
Тел.: 556 3437(раб), 5569465(дом)
m_brut@mail.ru,

Поступила в редакцию 08.02.2010