

УДК 621.923

**МЕХАНИКА ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА
АВАКЯН Р.М., АРАКЕЛЯН М.М., НАЗАРЯН Э.А., КАХРИЗИ М.**

Ключевые слова: механика формоизменения, листовой металл, деформация, напряжение.
Keywords: mechanics of forming, sheet metal, strain, stress

**Ավագյան Ռ.Մ., Առաքելյան Մ.Մ., Նազարյան Է.Ա., Քահրիզի Մ.Ա.
Օղակաձև սկավառակի ձևափոխման մեխանիկան**

Արդյունաբար դեֆորմացիայի և դեֆորմացիոն ամրացման համատեղ փոփոխության պայմաններում մեծ պլաստիկ դեֆորմացիաների դեպքում կատարված է հաստատուն հաստության օղակաձև սկավառակի ձևափոխման վերլուծությունը: Ստացված են պլաստիկության տիրույթը նկարագրող անալիտիկ առնչություններ: Ներքին ճնշման հնարավոր սահմանային արժեքի դեպքում հաստատված են սկավառակի վերջնական և նախնական ձևի և չափերի միջև փոխադարձ կապեր:

**Avakyan R.M., Arakelyan M.M, Nazaryan E.A., Kahrizi M.A.
Mechanics of Forming Ring Disks**

The analysis of forming ring disk of constant thickness in conditions of large plastic deformations taking into account the interconnected change of effective strain and deformation hardening is carried out. The analytical dependences characterizing the relative size of plastic area are obtained. The interrelation between the initial and final form of a product is established at maximum possible size of internal pressure.

Проведен анализ формоизменения кольцевого диска постоянной толщины в случае больших пластических деформаций с учетом взаимосвязанного изменения эффективной деформации и деформационного упрочнения. Получены аналитические зависимости, характеризующие относительный размер пластической области. Установлена взаимосвязь между исходной и конечной формой изделия при предельно возможной величине внутреннего давления.

1. Введение.

При разработке прикладных и технологических проблем осесимметричного формоизменения металлов используют результаты решения задач по определению напряженно-деформированного состояния кольцевого диска и толстостенной трубы при больших пластических деформациях. К таким проблемам относятся определение конечной формы и размеров изделия и механических свойств материала, измененных вследствие деформирования при заданной величине и закономерности изменения внешней нагрузки.

Существующие методы анализа подобных задач основаны на схематизации процесса формоизменения, при которой проблему сводят к приданию уравнениям, характеризующим пластическое состояние, удобной для математических выкладок формы с целью получения замкнутых аналитических решений. Для этого рассматривают статически определимые задачи, вследствие чего становится возможным определение напряжений без рассмотрения уравнений связи между напряжениями и деформациями (скоростями деформаций).

Современное состояние анализа осесимметричных задач основано на пионерских работах [1,2,3], в которых рассматривается пластическое состояние толстостенной трубы бесконечной длины под действием равномерного внутреннего давления. В этих работах принимаются допущения, согласно которым поперечные сечения трубы при формоизменении остаются плоскими, на основе чего становится возможным определение напряжений из совместного решения уравнения равновесия

и условия пластичности для плоско-напряженного, либо для плоско-деформированного состояний. Из полученных решений следует, что при предельной величине внутреннего давления относительный диаметр трубы, находящейся в пластическом состоянии, в первом случае стремится к 2,963, а во втором – к 2,72. Фактически в обоих случаях решается плоская задача в полярных координатах при разных формах записи условия пластичности. Полученные результаты представляются несколько противоречивыми в связи с трудностями предположения, что при одинаковой величине внутреннего давления отсутствие осевой сжимающей нагрузки способствует увеличению относительного размера пластической области. Кроме того, по этим решениям трудно установить взаимосвязь между координатами рассматриваемых элементов в исходном и деформированном состояниях, поэтому определение конечной формы и размеров изделия становится неразрешимой задачей.

В другом классе работ [4,5,6] рассматривается упруго-пластическое состояние тонких пластин с круговым вырезом под действием внутреннего давления. В частности, в работе [4] показано, что в предельном состоянии на внутреннем контуре пластины радиальные и окружные напряжения, соответственно, достигают величин $\sigma_r = -2\sigma_s/\sqrt{3}$, $\sigma_\theta = -\sigma_s/\sqrt{3}$, и на основе уравнений связи напряжений и приращений деформаций делается вывод, что скорость (приращение) осевой деформации $d\varepsilon_z \rightarrow \infty$, а относительный радиус пластической области стремится к 1,75 при использовании условия текучести Мизеса, и к 1,65 – при использовании условия текучести Треска-Сен-Венана. В работах [5,6] сделана попытка получения более реального результата для осевой компоненты деформаций. Показано, что для предельной величины внутреннего давления относительная толщина внутреннего контура стремится к 3,61. Нереальность полученных результатов, по мнению авторов, обусловлена условностью схематизации процесса формоизменения.

Если в первом направлении работ противоречивость полученных результатов связана с рассмотрением плоского напряженного состояния на основе гипотезы плоских сечений, то во втором случае нереальность результатов обусловлена ошибочностью предположений, связанных с механикой формоизменения.

Поэтому представляется целесообразной и актуальной математическая корректная постановка задач формоизменения кольцевого диска постоянной толщины из материала с определенными механическими свойствами в условиях больших пластических деформаций.

В настоящей работе рассматривается формоизменение в предельном состоянии с учетом взаимосвязанного изменения осевой компоненты деформаций и деформационного упрочнения и ставятся следующие задачи:

–определение наибольшего относительного диаметра диска, находящегося в пластическом состоянии;

–установление взаимосвязи между конечной и исходной формами и размерами изделия.

2. Постановка задачи и исходные уравнения

Рассмотрим кольцевой диск толщиной H_0 , внутренний радиус которого – r_0 , а наружный – R_0 , нагруженный внутренним давлением p . Определим напряженно-деформированное состояние диска, не накладывая ограничений на величины деформаций. В отличие от общеизвестных работ [1,2,3,4], предположим, что диск состоит из множества кольцевых пластин размеров $2r_0$, $2R_0$ и толщиной h_0 , которые могут свободно деформироваться в радиальном и осевом направлениях при сохранении сплошности материала и отсутствии силового взаимодействия между пластинами. Очевидно, что такая модель наиболее реально отображает состояние

диска под действием внутреннего давления и отсутствия осевого сжимающего усилия.

Примем цилиндрическую систему координат ρ, θ, z , плоскость $z = 0$ которой является средней плоскостью пластин, а ось z направлена перпендикулярно к этой плоскости. Предполагается, что пластины нагружены внешними силами, параллельными средней плоскости, а характерный размер пластин $h_0/(R_0 - r_0) \ll 1$. В таких условиях радиальное, осевое и окружное направления будут главными направлениями напряжений и деформаций, а напряженное состояние, реализующееся в таких условиях, характеризуют как обобщенное плоское напряженное состояние [4].

Таким образом, проблема деформирования кольцевого диска сводится к анализу формоизменения множества тонкостенных кольцевых пластин, деформирующихся в условиях плоского напряженного состояния под действием внутреннего давления.

Для решения поставленных задач рассмотрим исходные уравнения, характеризующие пластическое состояние.

– Критерий текучести Мизеса

$$\sigma_i = \sigma_s = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2] \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z$ – главные напряжения в радиальном, окружном и осевом направлениях.

– Эквивалентная деформация

$$\varepsilon_i = \left\{ \frac{2}{9} [(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\rho)^2] \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta$ и ε_z – главные деформации в тех же направлениях.

– Условие постоянства объема

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \quad (3)$$

– Соотношение между напряжениями и приращениями деформаций

$$\frac{d\varepsilon_\rho - d\varepsilon_\theta}{\sigma_\rho - \sigma_\theta} = \frac{d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_z}{\sigma_\theta - \sigma_z} = \frac{d\varepsilon_z - d\varepsilon_\rho}{\sigma_z - \sigma_\rho} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i}, \quad (4)$$

где $d\varepsilon_i$ – интенсивность приращения деформаций, определяемая соотношением

$$d\varepsilon_i = \left\{ \frac{2}{9} [d\varepsilon_\rho - d\varepsilon_\theta]^2 + (d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_\rho)^2 \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

– Зависимость между напряжением текучести (1) и эквивалентной деформацией (2), представленная в виде степенной функции [8]

$$\sigma_i = \sigma_s = A \varepsilon_i^n, \quad (6)$$

где A и n – параметры деформационного упрочнения, зависящие от механических свойств деформируемого материала.

– Уравнение равновесия элемента осесимметрично нагруженной кольцевой пластины с учетом наличия осевой деформации [7]

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho \left(1 + \frac{\rho}{h} \frac{dh}{d\rho} \right) - \sigma_\theta = 0. \quad (7)$$

Приращения деформаций в окружном $d\varepsilon_\theta$ и осевом $d\varepsilon_z$ направлениях связаны

с приращением радиуса $d\rho$ и осевого смещения dh соотношениями

$$d\varepsilon_\theta = \frac{d\rho}{\rho}, \quad d\varepsilon_z = \frac{dh}{h}. \quad (8)$$

При плоско-напряженном состоянии ($\sigma_z = 0$) из (4) следуют зависимости:

$$d\varepsilon_\rho = \frac{2\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_\rho} d\varepsilon_\theta; \quad d\varepsilon_z = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} d\varepsilon_\theta. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) уравнение равновесия (7) принимает вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2 \frac{\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2}{2\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} = 0. \quad (10)$$

Интегрирование (10) совместно с (1) в принципе возможно лишь для идеально жестко-пластической модели деформируемого материала, поэтому решение поставленных задач прямым методом становится невозможным [7].

3. Формоизменение тонких кольцевых пластин

В наших работах [9,10,11] показано, что, представляя компоненты приращения деформаций в тригонометрической форме на девиаторной плоскости (π -плоскости) цилиндра пластичности, удовлетворяющие соотношению (5) и условию постоянства объема в дифференциальной форме ($d\varepsilon_\rho + d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_z = 0$),

$$d\varepsilon_\rho = d\varepsilon_i \cos \varphi, \quad d\varepsilon_\theta = d\varepsilon_i \cos(\varphi + 2\pi/3), \quad d\varepsilon_z = d\varepsilon_i \cos(\varphi + 4\pi/3) \quad (11)$$

по зависимостям (9) легко получить выражения для напряжений

$$\sigma_\rho = \sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6), \quad \sigma_\theta = -\sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi \quad (12)$$

удовлетворяющие критерию текучести Мизеса при плоско-напряженном состоянии ($\sigma_z = 0$). В зависимостях (11) и (12) параметр φ характеризует вид деформированного состояния и меняется в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ [9,10].

С учетом (8), (11) и (12) уравнение равновесия (10) можно представить на девиаторной плоскости (π -плоскости) в достаточно простой форме [10]:

$$d\sigma_\rho = \sigma_s \cdot d\varepsilon_i \quad (13)$$

Таким образом, система уравнений (1-7) приводится к виду, устанавливающему дифференциальную пропорциональную зависимость между радиальной компонентой напряжения и эквивалентной деформацией. В (13) коэффициентом пропорциональности является напряжение текучести материала, зависящее от реологической модели деформируемого материала.

При степенной зависимости напряжения текучести от эквивалентной деформации (6) уравнение (13), с учетом (12) легко интегрируется и приводится к виду:

$$\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_0^{n+1} = (1+n) \varepsilon_i^n \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6) \quad (14)$$

где ε_0 – эквивалентная деформация краевого элемента.

Пределы изменения параметра φ в рассматриваемой задаче устанавливаются в зависимости от величины приложенной нагрузки. При небольшой величине внутреннего давления кольцевые пластины находятся в упругом состоянии и напряжения определяются из известного решения упругой задачи [3,4]. С

увеличением внутреннего давления до начальной критической величины, равной $\sigma_s / \sqrt{3}$, на внутреннем контуре появляются первые пластические деформации, при этом выполняется равенство $|\sigma_\rho| = |\sigma_\theta| = \sigma_s / \sqrt{3}$. По мере возрастания давления пластические деформации распространяются в направлении к наружному контуру и при предельной величине внутреннего давления относительный диаметр диска, охваченного пластическими деформациями, достигает наибольшей величины.

В указанном диапазоне изменения параметра φ вектор-функция $\bar{\varepsilon}$, модуль которой численно равен эквивалентной деформации (2) [9,10], становится перпендикулярной к координатным осям ε_θ и ε_z , вследствие чего приращение и компоненты деформаций по этим осям становятся равными нулю.

Из зависимостей (12) следует, что несущая способность пластин исчерпывается, когда радиальные сжимающие напряжения на внутреннем контуре по абсолютной величине достигают значения $2\sigma_s / \sqrt{3}$, при котором $\varphi = 5\pi/6$. На границе упруго-пластической области осевая компонента деформаций становится равной нулю, вследствие чего на этой границе выполняется условие $|\sigma_\rho| = |\sigma_\theta| = \sigma_s / \sqrt{3}$. Следовательно, все виды деформаций, которые в принципе могут реализоваться в предельном состоянии, располагаются на девиаторной плоскости в виде сектора с центральным углом $\varphi = \pi/3$. Если параметр φ совпадает с отрицательным направлением оси ε_ρ , то ε_ρ – деформация сжатия в радиальном направлении, а ε_θ и ε_z – деформации растяжения, численно равные $\varepsilon_\rho/2$. Если параметр φ совпадает с направлением $5\pi/6$, то $\varepsilon_\theta = 0$, а ε_ρ и ε_z равны по величине и противоположны по знаку, то есть имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости $(\rho; z)$. Если параметр φ совпадает с направлением $7\pi/6$, то $\varepsilon_z = 0$, а ε_ρ и ε_θ равны по величине и противоположны по знаку, то есть имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости $(\rho; \theta)$.

Из зависимости (14) легко определяются компоненты деформаций при $\varepsilon_\theta = 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= -\frac{1+n}{2} \left(1 + \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi \right), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1+n}{2} \left(\cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi \right), \\ \varepsilon_z &= \frac{1+n}{2} \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2\varphi \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, в параметрической форме получено общее решение для напряженно-деформированного состояния кольцевого диска.

Установим взаимосвязь между параметром φ и координатой ρ рассматриваемого элемента в деформированном состоянии. Для этого, проинтегрировав (14) при $(\varepsilon_\theta = 0)$, с учетом (8) и (11), имеем

$$\frac{d\rho}{\rho} = -(1+n) \left[\sin \varphi \cos \varphi + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin^2 \varphi + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \cos^2 \varphi \right] d\varphi \quad (16)$$

После интегрирования (16) приводится к виду

$$\ln \rho = -(1+n) \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \varphi - \left(\frac{1}{4} \right) \cos 2\varphi - \left(\frac{\sqrt{3}}{12} \right) \sin 2\varphi \right] + C \quad (17)$$

Постоянная интегрирования в (17) находится из граничного условия, согласно которому при $\varphi = \frac{7}{6}\pi$ $\rho = R$ (R – внешний радиус пластической области).

С учетом граничного условия выражение (17) принимает вид:

$$\frac{\rho}{R} = \exp\left\{(1+n)\left[-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\varphi - \frac{7\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{12}\sin 2\varphi\right]\right\} \quad (18)$$

При выводе зависимости (18) учтено, что эффективная деформация (14) всегда является положительной скалярной величиной.

Подставляя в (18) значение параметра $\varphi = 5\pi/6$, при котором внутреннее давление достигает предельной величины, получим относительный наибольший диаметр пластической области

$$\frac{R}{\rho_0} = \exp\left[(1+n)\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right)\right] \approx \exp[(1+n)(0,854)] \quad (19)$$

где ρ_0 – радиус внутреннего контура в деформированном состоянии. При $n = 0$, предельное значение R/ρ_0 стремится к 2,35, что существенно меньше результата работ [1,2,3]. Зависимости (12), (14), (15) и (18), являясь параметрическим решением задачи, полностью определяют напряженно-деформированное состояние кольцевых пластин с учетом взаимосвязанного изменения осевой компоненты деформации и деформационного упрочнения.

Для определения конечной формы и размеров изделия при предельной величине внутреннего давления рассмотрим распределение окружных и осевых деформаций.

В зависимостях (4) и (5) приращения компонент деформаций отнесены к текущему деформированному состоянию, и их суммирование приводит к логарифмическим деформациям, удовлетворяющим условию постоянства объема (3):

$$\varepsilon_r = \ln \frac{d\rho}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \ln \frac{\rho}{r}; \quad \varepsilon_z = \ln \frac{h}{h_0} \quad (20)$$

где ρ , h и r , h_0 – текущие координаты и толщины рассматриваемого элемента пластины в деформированном и исходном состояниях, соответственно.

Из равенства (15) и (20) легко устанавливаются зависимости между координатами и толщины в текущем и исходном состояниях

$$\rho/r = \exp\left[\frac{1+n}{2}\left(\cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi\right)\right], \quad h/h_0 = \exp\left[\frac{1+n}{2}\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi\right)\right] \quad (21)$$

В частности, для внутреннего контура, при $\varphi = \pi$, ($|\sigma_r| = \sigma_s$) из (21) следует

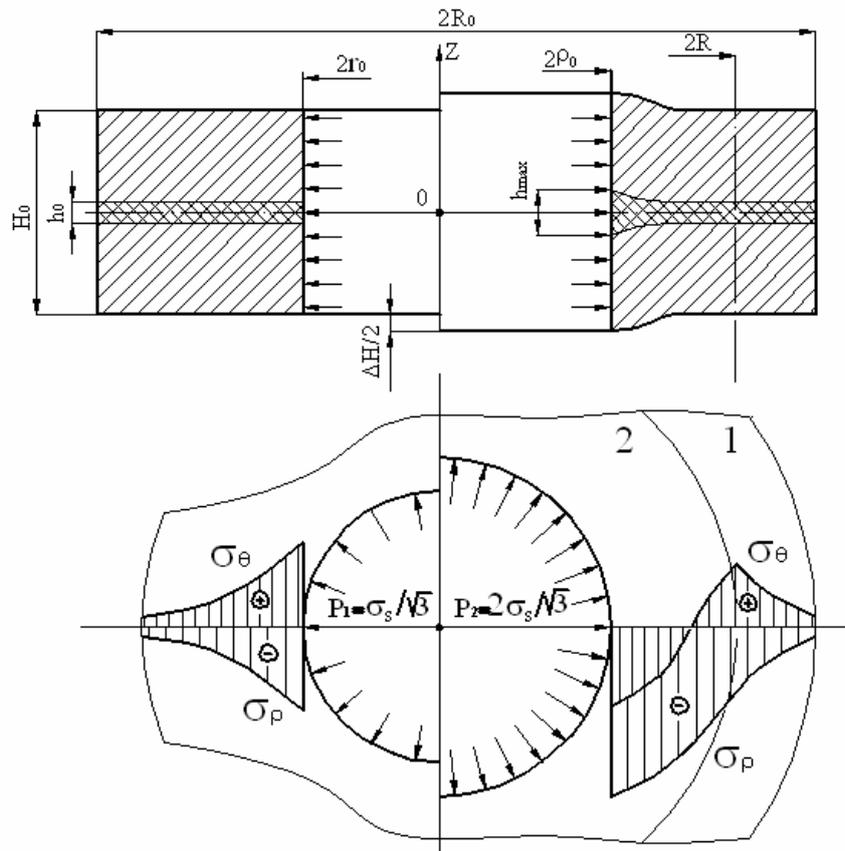
$$\rho_0/r_0 = h/h_0 = \exp\frac{1}{2}(1+n). \quad (22)$$

Для идеально жестко-пластической модели деформируемого материала ($n = 0$) относительное утолщение внутренней кромки составляет 1,648.

4. Обсуждение результатов.

Сопоставляя полученное решение со второй зависимостью (9), легко заметить, что при предельной величине внутреннего давления, равного $2\sigma_s/\sqrt{3}$, $d\varepsilon_z$ не может стремиться к бесконечности, так как при этом одновременно и числитель

указанной зависимости становится равным нулю. С другой стороны, из механики формоизменения следует, что при величине внутреннего давления, равного σ_s , модуль вектор-функции не может быть больше единицы, при этом, $\varphi = \pi$. Следовательно, наибольшая величина осевой компоненты деформаций стремится к 0,5, а относительная толщина пластины – к 1,648, что вполне соответствует значениям, реализуемым в экспериментах.



Фиг. 1

На фиг. 1. представлена исходная (слева) и конечная (справа) форма и размеры изделия, а также распределение напряжений при начальной и предельной величине внутреннего давления (1 – упругая область, 2 – пластическая область).

Для оценки наибольшей величины относительного утолщения внутренней кромки кольцевого диска ($\Delta H / H_0$), приравнивая смещённые объёмы при допущении линейной зависимости ΔH от текущего радиуса ρ , получим:

$$\frac{\Delta H}{H_0} = \frac{r_0^2}{R^2} \frac{(\rho_0^2 / r_0^2 - 1)}{(1 - \rho_0^2 / R^2)} \quad (23)$$

Численный расчет при параметрах $\rho_0 / r_0 = 1,648$ и $R / \rho_0 = 2,35$ показывает, что осевое относительное утолщение внутренней кромки составляет

$\Delta H / H_0 \approx 0,14$, что сопоставимо с результатами экспериментальных исследований.

Выводы:

1. Получено аналитическое решение задачи формоизменения кольцевого диска постоянной толщины при больших пластических деформациях с учетом взаимосвязанного изменения эффективной деформаций и деформационного упрочнения.
2. Установлено, что относительный размер пластической области зависит от величины внутреннего давления и в пределе, для идеально жестко-пластической модели деформируемого материала, стремится к 2,35.
3. Показано, что относительное утолщение внутреннего контура диска в осевом направлении не превышает 15% .

ЛИТЕРАТУРА

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т.2. М.: Мир, 1969. 863с.
2. Унксов Е.П., Джонсон У., Колмогоров В.Л. и др. Теория пластических деформаций. М.: Машиностроение, 1983. 598 с.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
5. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
6. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford. 1998, p.362.
7. Попов Е.А. Основы теории листовой штамповки. М.: Машиностроение, 1977. 278 с.
8. Marciniak Z., Dunkan J., Hu S., Mechanics of Sheet Metal Forming, Published by Butterworth-Heinemann, 2002, p.228.
9. Назарян Э.А., Константинов В.Ф. Кинематика деформирования в формоизменяющих операциях листовой штамповки. //Вестник Машиностроения. 1999. №2. С.35-41.
10. Nazaryan E., Arab N., Arakelyan M., Markosyan A., Mechanics of Forming Thin Ring Plates. International Deep Drawing Research Group – 2009 Conference, 1-3 June, Golden, Colorado, USA.
11. Назарян Э.А., Араб Н.Н., Аракелян М.М., Маркосян А.С. Механика формоизменения тонких кольцевых пластин. //Изв.НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С.80-88.

Сведения об авторах:

Авакян Роланд Мамиконович – доктор физ-мат. наук, профессор, член-корр. НАН РА, декан физического фак-та ЕГУ

Аракелян Милета Мартirosовна – канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры ФТТ ЕГУ, E-mail address: marakelyan@ysu.am.

Назарян Эрнест Агаджанович – доктор технических наук, ведущий научн. сотр. физического фак-та Ереванского Государственного Университета

Кахризи Мохаммад – аспирант мат.-мех. фак-та ЕГУ

Поступила в редакцию 28.12.2009