ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №4, 2010 Механика

УДК 539.3

НАТЯГИВАНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ НА ЖЕСТКУЮ ФОРМУ

СИМОНЯН А.М.

Ключевые слова: анизотропия, оболочка вращения, термопрессование, композит.
Key words: anizotropic, axisymmetrical shell, thermopressure, compozite.

Սիմոնյան Ա.Մ.
Անիզոտրոպ թաղանթի քաշումը կոշտ կաղապարի վրա

Դիտարկվում է առանցքային ուժերի ազդեցության տակ գտնվող անիզոտրոպ առանցքացիմետրիկ թաղանթի կոնտակտային ճնշումը կոշտ կաղապարի վրայով թաղանթի սահքի դեպքում: Այս խնդիրը կապված է բարակ կոմպոզիտ թաղանթի ջերմային մամլման հետ: Թաղանթը գտնվում է համեմատաբար բարձր ջերմային ընդարձակման գործակից ունեցող կոշտ կաղապարի և նրան ամրացված արտաքին մամլող թաղանթի միջև; Խնդիրը բերվում է Վոլտերայի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:

Simonyan A.M.
Stretch of Anizotropic Shell on Rigid Mould

The contact pressure at slipping of anizotropic axisymmetrical shell on surface of rigid mould at the action of longitudinal force is considered. This problem is connected with the thermopressure of thin shell from compozite, which is placed between rigid mould from material with the relatively high value of thermal expansion coefficient and external pressing shell, which is fixed with the mould. The problem is reduced to the solution of integral equation of Volterra.

Рассматриваются контактные давления при скольжении анизотропной оболочки вращения по поверхности жесткой формы под действием осевой силы. Настоящая задача имеет отношение к термопрессованию тонкой оболочки из композита, заключенной между жесткой формой из материала с относительно высоким значением коэффициента термического расширения и наружной прессующей оболочкой, закрепленной с формой. Задача сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра.

При изготовлении оболочек из композиционного материала возникает проблема прессования полуфабриката композита в процессе термоотверждения. С этой целью на полуфабрикат композита, уложенный на массивную форму из материала с относительно высоким термическим расширением, может быть надета оболочка с относительно низким термическим расширением и затем оболочка со стороны торца скрепляется с формой и все это перемещается в печь, где происходит термоотверждение, сопровождаемое с самопрессованием.

Настоящая работа посвящена определению распределения контактного давления, имеющего место при повышении температуры, приводящей к фактическому натягиванию оболочки на жесткую форму. Для конических оболочек эта задача рассмотрена в работе [1].

Итак, рассмотрим усеченную оболочку вращения (фиг. 1), форма образующей которой определяется функцией $r(x)$. При рассмотрении оболочки как безмоментной и в условиях действия осесимметричного нормального внутреннего давления $q(x)$ из условия равновесия получим следующие формулы для напряжений в кольцевом и продольном направлениях (σ_θ σ_ℓ соответственно):

$$\sigma_\theta(x)=\frac{r(x)\sqrt{1+[r'(x)]^2}}{\delta}q(x)-\frac{r''(x)}{\delta\sqrt{1+[r'(x)]^2}}\int_a^x r'(y)r(y)q(y)dy\,, \qquad (1.1)$$

$$\sigma_\ell(x)=\frac{\sqrt{1+[r'(x)]^2}}{\delta r(x)}\int_a^x r'(y)r(y)q(y)dy, \tag{1.2}$$

где δ – толщина оболочки.

Рассмотрим условие скольжения оболочки вдоль формы. Положим, что точка A, соответствующая координате $x=a$, в результате натяга занимает положение A_1 (фиг.1), а точка B, соответствующая текущей координате x, – положение B_1.

Перемещения AA_1 и BB_1 связаны с деформациями ε_θ согласно формулам:

$$\begin{aligned}AA_1&=\frac{A_2A_1}{\sin\alpha(a)}=\frac{r(a)\varepsilon_\theta(a)}{r'(a)}\sqrt{1+[r'(a)]^2},\\ BB_1&=\frac{B_2B_1}{\sin\alpha(x)}=\frac{r(x)\varepsilon_\theta(x)}{r'(x)}\sqrt{1+[r'(x)]^2}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

С другой стороны, разница между A_1B_1 и AB определяется общей деформацией оболочки в направлении ℓ:

$$A_1B_1-AB=BB_1-AA_1=\int_A^B\varepsilon_\ell(\ell)d\ell. \tag{1.4}$$

Таким образом, получим следующее условие для деформаций оболочки:

$$\frac{r(x)\varepsilon_\theta(x)}{r'(x)}\sqrt{1+[r'(x)]^2}-\frac{r(a)\varepsilon_\theta(a)}{r'(a)}\sqrt{1+[r'(a)]^2}=\int_a^x\varepsilon_\ell(y)\sqrt{1+[r'(y)]^2}dy \tag{1.5}$$

Поскольку в дальнейшем нас будут интересовать деформации и перемещения оболочки относительно жесткой формы, будем формально считать, что жесткая форма, имеющая коэффициент термического расширения (КТР) λ_0, от температуры не расширяется, а оболочка имеет КТР, равный $\lambda_ё-\lambda_0$ и $\lambda_\theta-\lambda_0$ ($\lambda_ё$ и λ_0 соответствуют температурному расширению материала оболочки в направлениях ℓ и θ). Закон Гука для оболочки запишем так:

$$\varepsilon_\ell=\frac{\sigma_\ell}{E_\ell}-\frac{\mu_{\ell\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta+(\lambda_\ell-\lambda_0)T\ ;\ \varepsilon_\theta=\frac{\sigma_\theta}{E_\theta}-\frac{\mu_{\ell\theta}}{E_\theta}\sigma_\ell+(\lambda_\theta-\lambda_0)T\ . \tag{1.6}$$

После подстановки соотношений (1.1), (1.2) и (1.6) в (1.5) и используя формулу изменения порядка интегрирования [2]

$$\int_a^x f(y)\int_a^y\varphi(\xi)q(\xi)d(\xi)dy=\int_a^x\varphi(y)q(y)\int_y^x f(\xi)d\xi dy,$$

получим

$$\frac{r^2(x)[1+(r'(x))^2]}{r'(x)}q(x)-\int_a^x q(y)\left\{\frac{r(x)r''(x)}{r'(x)}r'(y)r(y)+\frac{1+(r'(x))^2}{r'(x)}\mu_{\ell\theta}r'(y)r(y)-\right.$$

$$\left.-\mu_{\ell\theta}r(y)[1+(r'(y))^2]+r'(y)r(y)\int_y^x\left[\frac{1+(r'(\xi))^2}{r(\xi)}\cdot\frac{E_\theta}{E_\ell}+\mu_{\ell\theta}r''(\xi)\right]d\xi\right\}dy=$$

$$=\frac{r^2(a)[1+(r'(a))^2}{r'(a)}q(a)+\left[\frac{r(x)\sqrt{1+(r'(x))^2}}{r'(x)}(\lambda_0-\lambda_\theta)-\right.$$

$$\left.-\frac{r(a)\sqrt{1+(r'(a))^2}}{r'(a)}(\lambda_0-\lambda_\theta)-(\lambda_0-\lambda_\ell)\int_a^x\sqrt{1+(r'(y))^2}\,dy\right]\delta E_\theta T\,. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) перепишем так:

$$\left[q(x)-\int_a^x q(y)K(x,y)dy=q(a)\,f_1(x)+\,f_2(x)\right], \tag{1.8}$$

где приняты обозначения:

$$f_1(x)=\frac{r^2(a)\left[1+(r'(a))^2\right]r'(x)}{r^2(x)\left[1+(r'(x))^2\right]r'(a)},$$

$$f_2(x)=\frac{r'(x)\delta E_\theta T}{r^2(x)[1+(r'(x))^2]}\{(\lambda_0-\lambda_\theta)\left[\frac{r(x)\sqrt{1+(r'(x))^2}}{r'(x)}-\right.$$

$$\left.-\frac{r(a)\sqrt{1+(r'(a))^2}}{r'(a)}\right]-(\lambda_0-\lambda_\ell)\int_a^x\sqrt{1+(r'(y))^2\,dy}\Bigg\},$$

$$K(x,y)=\frac{r''(x)r'(y)r(y)}{r(x)[1+(r'(x))^2]}+\mu_{\ell\theta}\frac{r'(y)r(y)}{r^2(x)}-$$

$$-\mu_{\ell\theta}\frac{r'(x)r(y)[1+(r'(y))^2]}{r^2(x)[1+(r'(x))^2]}+\frac{r'(x)r'(y)r(y)}{r^2(x)[1+(r'(x))^2]}\int_y^x\left[\frac{1+(r'(\xi))^2}{r(\xi)}\cdot\frac{E_\theta}{E_\ell}+\right.$$

$$\left.+\mu_{\ell\theta}r''(\xi)\right]d\xi.$$

Уравнение (1.8) является интегральным уравнением Вольтерра II рода и его решение может быть записано в форме [3]

$$q(x)=q(a)\left[\,f_1(x)+\int_a^x R(x,y)\,f_1(y)dy\right]+\,f_2(x)+$$
$$+\int_a^x R\left(x,y\right)\,f_2(y)dy, \tag{1.9}$$

где $R(x,y)$– резольвентное ядро ядра $K(x,y)$.

Положим, что задано общее усилие N натяга оболочки со стороны ее большего торца $(x=b)$. Из условия равновесия будем иметь

$$N=2\pi\delta\sigma_\ell(b)\cos\alpha(b) \tag{1.10}$$

Подставляя в условие (1.10) соотношения (1.2) и (1.9), получим следующую формулу для определения $q(a)$:

$$q(a)=\frac{\dfrac{Nr(b)}{2\pi\cos\alpha(b)\sqrt{1+\left[r'(b)\right]^2}}-\int\limits_a^b r'(y)r(y)\left[f_2(y)+\int\limits_a^y f_2(\xi)R(y,\xi)d\xi\right]dy}{\int\limits_a^b r'(y)r(y)\left[f_1(y)+\int\limits_a^y f_1(\xi)R(y,\xi)d\xi\right]dy} \qquad (1.11)$$

В предположении же, что оболочка большим торцом скреплена с жесткой формой по окружности $(x=b)$, получим условие

$$u_1(b)=0$$

или, что же

$$\varepsilon_\theta(b)=0 \qquad (1.12)$$

Подставляя в (1.12) выражения (1.6), (1.1), (1.2) и (1.9), получим следующую формулу для определения $q(a)$:

$$q(a)=\left\{(\lambda_0-\lambda_\theta)T\delta E_\theta-r(b)\sqrt{1+\left[r'(b)\right]^2}\left[f_2(b)+\int\limits_a^x R(b,y)f_2(y)dy\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{r''(b)}{\sqrt{1+[r'(b)]^2}}+\mu_{\ell\theta}\frac{\sqrt{1+[r'(b)]^2}}{r(b)}\right]\int\limits_a^b r'(y)r(y)\left[f_2(y)+\int\limits_a^y f_2(z)R(y,z)dz\right]dy\right\}\times$$

$$\times\left\{r(b)\sqrt{1+[r'(b)]^2}\left[f_1(b)+\int\limits_a^b f_1(y)R(b,y)dy\right]-\left[\frac{r''(b)}{\sqrt{1+[\dot r'(b)]^2}}+\mu_{\ell\theta}\frac{\sqrt{1+[r'(b)]^2}}{r(b)}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_a^b r'(y)r(y)\left[f_1(y)+\int\limits_a^y f_1(z)R(y,z)dz\right]dy\right\}^{-1} \qquad (1.13)$$

В отличие от конических оболочек [1], где получены формулы для вычисления значений $q(x)$, практическое использование решения (1.9) вкупе с (1.13) для оболочек двоякой кривизны связано с трудностями определения резольвентного ядра $R(x,y)$, хотя, как показано, например, в работе [2], для уравнений Вольтерра II рода, каковым является уравнение (1.8), резольвентное ядро существует всегда. Если участок $b-a$ разделить на n элементов длины $\mu=(b-a)/n$ и в пределах каждого принять кусочно-постоянную аппроксимацию ядра $K(x,y)$, то для вычисления значений резольвенты может быть использовано интегральное уравнение для резольвенты [2]

$$R(x,y)=K(x,y)+\int\limits_a^x K(x,z)R(z,y)dz\,,$$

откуда может быть получено приближенное выражение $R(x,y)$:

$$R(y+m\mu,y)\cong\left[1+\mu K(y,y)\right]\left\{K(y+m\mu,y)+\right.$$

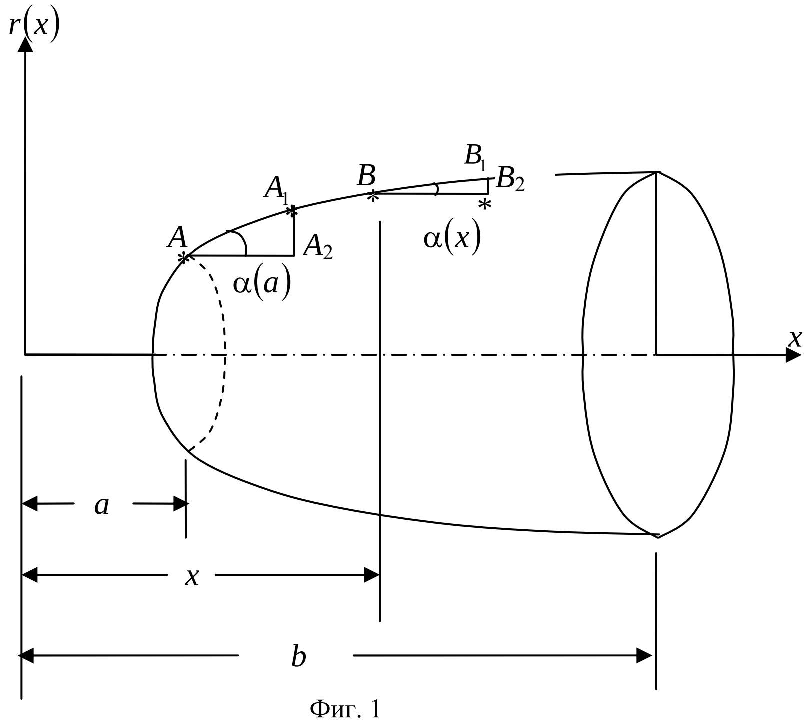
$$+\mu\sum_{i=1}^{m-1}K(y+\mu m,y+\mu i)K(y+\mu i,y)+$$

$$+\mu^2\sum_{i=1}^{m-1}K(y+\mu m, y+\mu i)\sum_{j=1}^{i-1}K(y+\mu i, y+\mu j)K(y+\mu j, y)+$$

$$+\mu^3\sum_{i=1}^{m-1}K(y+\mu m, y+\mu i)\sum_{j=1}^{i-1}K(y+\mu i, y+\mu j)\sum_{\ell=1}^{j-1}K(y+\mu j, y+\mu\ell)K(y+\mu\ell, y)+$$

$$+\ldots+\mu^{m-1}K(y+\mu m, y+\mu(m-1))\cdot K(y+\mu(m-1), y+\mu(m-2))\cdot\ldots\cdot K(y+\mu y)$$

Здесь имеется в виду, что y превышает значение a на кратное число, помноженное на μ, а $m<n$.



Фиг. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. Simonyan A.M. On theory of thermopressing of conic shells from composites. //Изв. АНТНА. 2009. №2. С.97-105.
2. Трикоми. Интегральные уравнения. Изд. Иностр.лит., 1960. 300 с.
3. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. М-Л.: Гостехиздат, 1947. 380с.

Сведения об авторе:

Симонян Арег Михайлович – ведущий научн. сотр. Института механики НАН РА.
Тел.: (374 10)52-75-39, (374 93)45-70-86.
E-mail: simonyan areg@mail.ru

Поступила в редакцию 21.10.2009