ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №4, 2010 Механика

УДК 539.3

О РАВНОВЕСИИ КРУГОВОГО СЕКТОРА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ГЛАДКОГО КОНТАКТА НА РАДИАЛЬНЫХ СТОРОНАХ

САРГСЯН А.М.

Ключевые слова: круговой сектор, гладкий контакт, метод Фурье, особенность напряжений, коэффициент при особенности.
Keywords: circular sector, smooth contact, Fourie method, stresse singularities, coefficients at the singularities.

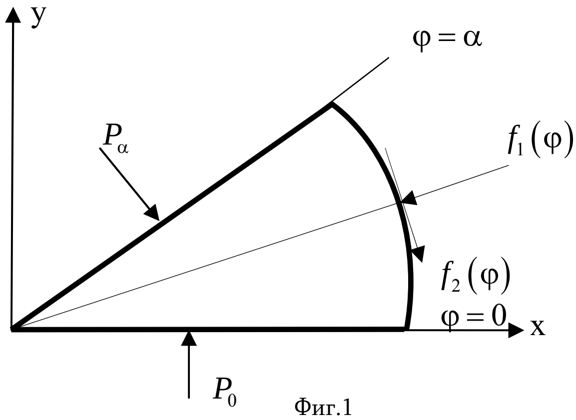
Սարգսյան Ա.Մ.
Շրջանային սեկտորի հավասարակշռության մասին շառավիղային կողմերի վրա ողորկ կոնտակտային պայմանների դեպքում

Դիտարկված է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը միավոր շառավիղով և կամայական α բացվածքի անկյունով շրջանային սեկտորի համար, որի շառավիղային կողմերի վրա տեղի ունի կոշտ դրոշմի հետ առանց շփումի հպման պայման ¥ողորկ կոնտակտի պայման) , իսկ եզրագծի աղեղային մասի վրա տրված են արտաքին բեռներ: Խնդրի լուծումը կառուցված է Ֆուրյեի մեթոդով: ՈՒսումնասիրված են լարումների եզակիությունների և եզակիության գործակիցների առանձնահատկությունները սեկտորի անկյունային կետի շրջակայքում:

Sargsyan A.M.
On Eguilibrium of the Circular Sector under the Boundary Conditions of the Smooth Contact on Radial Sides

In the paper a plane problem of elasticity theory for a circular sector with enigue radius and arbitrary angle of opening α, when on the radial sides the conditions of contact with a rigid stamp without friction (condition of smooth contact) is realised, and on the other part of the contour external loadings are given, is considered. The solution of the problem is built with the help of Fourie method. The singularities of the stresses and the coefficients at the singularities in the vicinity of the sector angle point are investigated.

В работе рассматривается плоская задача теории упругости для кругового сектора с единичным радиусом и произвольным углом раствора α, когда на радиальных сторонах осуществляются условия соприкасания с жестким штампом без трения (условия гладкого контакта), а на дуговой части контура заданы внешние нагрузки. Решение задачи строится с помощью метода Фурье. Исследуются особенности напряжений и коэффициентов при особенностях в окрестности угловой точки сектора.



Фиг.1

Отнесем сектор к декартовой и полярной системам координат, как показано на фиг. 1. Напряженное состояние сектора определяется решением бигармонического уравнения для функции напряжений Эри [1]

$$\Delta\Delta\Phi(r,\varphi)=0 \tag{1}$$

при следующих граничных условиях, заданных на контуре сектора.

$$u_\varphi(r,\varphi)=\tau_{r\varphi}(r,\varphi)=0 \text{ при } \varphi=0,\alpha, \tag{2}$$

$$\sigma_r(1,\varphi)=f_1(\varphi),\ \tau_{r\varphi}(1,\varphi)=f_2(\varphi). \tag{3}$$

Компоненты напряжений определяются с помощью функции Эри следующим образом:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{r^2 \partial \varphi^2}\,,\ \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\ ,\ \ \tau_{r\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\,. \tag{4}$$

Представляя решение уравнений (1) в виде

$$\Phi = r^{\lambda+1}\left[A\sin(\lambda+1)\varphi + B\cos(\lambda+1)\varphi + C\sin(\lambda-1)\varphi + D\cos(\lambda-1)\varphi\right]$$

и используя уравнения состояний, уравнения Коши, а также (4) и удовлетворяя граничным условиям (2), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_j и B_j. Из условий существования нетривиального решения этой системы получим [2] $\mathrm{A} = \mathrm{C} = 0$ и следующее уравнение для определения параметра λ:

$$\sin(\lambda+1)\alpha \cdot \sin(\lambda-1)\alpha = 0\,. \tag{5}$$

Корни уравнения (5) – действительные и простые

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{\alpha} + 1\,,\ \lambda_n^* = \frac{\pi n}{\alpha} - 1\ ,\ (k, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)\,. \tag{6}$$

Требование конечности энергии деформаций в малой окрестности угловой точки сектора при конечной внешней нагрузке накладывает условие на корни уравнения (5)

$$\lambda_k > 0,\ \ \lambda_n^* > 0 \tag{7}$$

Условие (7) ограничивает пределы изменения k и n :

I. Для $0 < \alpha < 2\pi\ \ (k = 0, 1, 2, ...),\ (n = 2, 3, 4, ...)$,

II. Для $0 < \alpha < \pi\ \ \ (k = 0, 1, 2, ...),\ (n = 1, 2, 3, ...)$,

III. Для $\pi < \alpha < 2\pi\ \ \ (k = -1, 0, 1, ...)$, $(n = 2, 3, 4, ...)$.

Первые два случая рассмотрены в работах [2,3].

В работе [2] установлено, что поставленная задача имеет решение при $0 < \alpha < 2\pi$, если внешние нагрузки $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\pi}{\alpha}\int_0^\alpha f_1(\varphi)\cos\frac{\pi}{\alpha}\varphi\, d\varphi = \left(2 - \frac{\pi}{\alpha}\right)\int_0^\alpha f_2(\varphi)\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi\, d\varphi\,. \tag{7'}$$

Для таких нагрузок особенность напряжений возникает только при $\alpha > \pi$.

Полученное в работе [3] решение (случай II) показывает, что при общих нагрузках на границе сектора $r = 1$, не удовлетворяющих условию (7'), особенность напряжений появляется уже при $\alpha > \pi/2$.

В настоящей работе рассматривается случай III.

Учитывая, что функции вида

$$\Phi_{kn}(r,\varphi) = D_k r^{\lambda_k+1}\cos(\lambda_k - 1)\varphi + B_n r^{\lambda_n^*+1}\cos(\lambda_n^* + 1)\varphi$$

$$(k = -1, 0, 1, ...)\,,\ \ (n = 2, 3, 4, ...)$$

удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), функция напряжений Эри ищем в виде

$$\Phi(r,\varphi) = D_{-1} r^{2-\alpha_0}\cos\alpha_0\varphi + D_0 r^2 + D_1 r^{2+\alpha_0}\cos\alpha_0\varphi +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k r^{\lambda_k+1} + B_k r^{\lambda_k^*+1}\right]\cos\alpha_0 k\varphi,\ \ \ \alpha_0 = \pi/\alpha\,. \tag{8}$$

Тогда для компонентов напряжений получим

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \tau_{r\varphi}\\ \sigma_\varphi\end{Bmatrix}=D_{-1}\left(1-\alpha_0\right)\begin{Bmatrix}\left(2+\alpha_0\right)\cos\alpha_0\varphi\\ \alpha_0\sin\alpha_0\varphi\\ \left(2-\alpha_0\right)\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{-\alpha_0}+2D_0\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix}+$$

$$+D_1\left(1+\alpha_0\right)\begin{Bmatrix}\left(2-\alpha_0\right)\cos\alpha_0\varphi\\ \alpha_0\sin\alpha_0\varphi\\ \left(2+\alpha_0\right)\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{\alpha_0}+ \tag{9}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\begin{Bmatrix}\left(2-\alpha_0 k\right)\\ \alpha_0 k\\ \left(2+\alpha_0 k\right)\end{Bmatrix}r^{\alpha_0 k}+B_k\lambda_k^*\left(\lambda_k^*+1\right)\begin{Bmatrix}-1\\1\\1\end{Bmatrix}r^{\alpha_0 k-2}\right]\begin{Bmatrix}\cos\alpha_0 k\varphi\\ \sin\alpha_0 k\varphi\\ \cos\alpha_0 k\varphi\end{Bmatrix}.$$

Удовлетворив граничным условиям (3), для определения $\mathrm{D_k}$ и $\mathrm{B_k}$, получим систему уравнений:

$$\begin{gathered}D_{-1}\left(2+\alpha_0\right)\left(1-\alpha_0\right)\cos\alpha_0\varphi+2D_0+D_1\left(2-\alpha_0\right)\left(1+\alpha_0\right)\cos\alpha_0\varphi+\\ +\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\left(3-\lambda_k\right)-B_k\lambda_k^*\left(\lambda_k^*+1\right)\right]\cos\alpha_0 k\varphi=f_1\left(\varphi\right),\\ D_{-1}\alpha_0\left(1-\alpha_0\right)\sin\alpha_0\varphi+D_1\alpha_0\left(1+\alpha_0\right)\sin\alpha_0\varphi+\\ +\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\left(\lambda_k-1\right)+B_k\lambda_k^*\left(\lambda_k^*+1\right)\right]\sin\alpha_0 k\varphi=f_2\left(\varphi\right).\end{gathered}\tag{10}$$

Умножая первое уравнение (10) на $\cos\alpha_0 m\varphi$, а второе уравнение – на $\sin\alpha_0 m\varphi\ \left(m=0,1,2,...\right)$ и интегрируя по φ в интервале $\left(0,\alpha\right)$, находим

$$\begin{gathered}D_0=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\alpha f_1\left(\varphi\right)d\varphi\ ,\ D_k=\frac{\tilde f_{1k}+\tilde f_{2k}}{\alpha\lambda_k},\\ B_k=\frac{\left(\tilde f_{1k}+\tilde f_{2k}\right)\left(3-\lambda_k\right)-2\tilde f_{1k}}{\alpha\lambda_k^*\left(\lambda_k^*+1\right)},\\ D_{-1}=\frac{\alpha_0\tilde f_{11}-\left(2-\alpha_0\right)\tilde f_{21}}{\alpha\alpha_0^2\left(1-\alpha_0\right)},\ D_1=\frac{-\alpha_0\tilde f_{11}+\left(2+\alpha_0\right)\tilde f_{21}}{\alpha\alpha_0^2\left(1+\alpha_0\right)},\\ \tilde f_{1k}=\int_0^\alpha f_1\left(\varphi\right)\cos\alpha_0 k\varphi d\varphi,\ \ \tilde f_{2k}=\int_0^\alpha f_2\left(\varphi\right)\sin\alpha_0 k\varphi\, d\varphi.\end{gathered}\tag{11}$$

Окончательно, формулы для напряжений (9) примут вид:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \tau_{r\varphi}\\ \sigma_\varphi\end{Bmatrix}=\frac{\alpha_0\tilde f_{11}-\left(2-\alpha_0\right)\tilde f_{21}}{\alpha\alpha_0^2}\begin{Bmatrix}\left(2+\alpha_0\right)\cos\alpha_0\varphi\\ \alpha_0\sin\alpha_0\varphi\\ \left(2-\alpha_0\right)\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{-\alpha_0}+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha f_1(\varphi)\,d\varphi\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix}-\frac{\alpha_0\tilde{f}_{11}-(2+\alpha_0)\,\tilde{f}_{21}}{\alpha\alpha_0^2}\begin{Bmatrix}(2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\\ \alpha_0\sin\alpha_0\varphi\\ (2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{\alpha_0}+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=2}^{\infty}\left[(\tilde{f}_{11}+\tilde{f}_{21})\begin{Bmatrix}(2-\alpha_0 k)\\ \alpha_0 k\\ (2+\alpha_0 k)\end{Bmatrix}r^{\alpha_0 k}+\right. \tag{12}$$

$$\left.+\left\langle\left(\tilde{f}_{1k}+\tilde{f}_{2k}\right)(2-\alpha_0 k)-2\tilde{f}_{1k}\right\rangle\begin{Bmatrix}-1\\1\\1\end{Bmatrix}r^{\alpha_0 k-2}\right]\begin{Bmatrix}\cos\alpha_0 k\varphi\\ \sin\alpha_0 k\varphi\\ \cos\alpha_0 k\varphi\end{Bmatrix}.$$

Итак, решение краевой задачи теории упругости для кругового сектора представлено в виде сходящихся степенных рядов (12), коэффициенты которых определяются в явном виде.

Из формул (12) следует, что в условиях общего нагружения границы $r=1$, все три напряжения при приближении к угловой точки сектора ($r\to 0$) имеют особенности того или иного порядка для любого значения угла α из интервала $\pi<\alpha<2\pi$. Причем, особенности напряжений обусловлены как первыми членами формул (12), содержащими множители $r^{-\alpha_0}$, так и соответствующими членами рядов с множителями $r^{\alpha_0 k-2}\left(k=2, k=3\right)$.

При этом, ñòåïåíü особенностей меняется в пределах

$$-1<-\alpha<-0{,}5,\quad \pi<\alpha<2\pi,$$

$$-1<\alpha_0 k-2<0,\quad \pi<\alpha<2\pi,\quad k=2, \tag{13}$$

$$-0{,}5<\alpha_0 k-2<0,\quad 3\pi/2<\alpha<2\pi,\quad k=3.$$

Коэффициенты при степенных особенностях $r^{-\alpha_0}$ и $r^{\alpha_0 k-2}$ при общих нагрузках на дуговой части границы сектора не могут быть одновременно равны нулю. Рассмотрим для примера случай нагружения границы $r=1$ следующей системой внешних воздействий:

$$f_1(\varphi)=P_1\left[\delta\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}-\varphi_1\right)+\delta\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}+\varphi_2\right)\right], \tag{14}$$

$$f_2(\varphi)=-f_2(\alpha-\varphi);$$

($f_2(\varphi)$ является нечётной функцией относительно точки $\varphi=\alpha/2$ границы $r=1$, а две сосредоточенные нормальные силы несимметрично расположены относительно биссектрисы сектора).

Тогда, как следует из (14),

$$\widehat{f}_{11}=-P_1\left(\sin\alpha_0\varphi_1-\sin\alpha_0\varphi_2\right),\ \tilde{f}_{21}=0,$$

$$\widehat{f}_{12}=-P_1\left(\cos 2\alpha_0\varphi_1+\cos 2\alpha_0\varphi_2\right),\ \tilde{f}_{22}=\int\limits_0^\alpha f_2(\varphi)\sin 2\alpha_0\varphi\,d\varphi, \tag{14'}$$

$$\widehat{f}_{13}=P_1\left(\sin 3\alpha_0\varphi_1-\sin 3\alpha_0\varphi_2\right),\ \tilde{f}_{23}=0.$$

Коэффициент при $r^{-\alpha_0}$ становится равным нулю, когда $\varphi_1+\varphi_2=\alpha$, а коэффициенты при $r^{3\alpha_0-2}$, когда $\varphi_1+\varphi_2=\alpha/3$ и $\varphi_1+\varphi_2=\alpha$. В случае $k=2$ $\tilde{f}_{22}\neq 0$. Так что, степенная особенность напряжений того или иного порядка всегда существует в решении (12).

Интегрированием $\sigma_\varphi(r,0)$ и $\sigma_\varphi(r,\alpha)$ по r в интервале (0,1) или с помощью двух первых уравнений статического равновесия системы штампы +сектор определим внешние силы P_0 и P_α, действующие на штампы в случае $f_2(\varphi)=0$

$$P_\alpha=P_1\left[\frac{\cos\varphi_2+\cos\varphi_1}{2\sin\alpha/2}+\frac{\sin\varphi_2-\sin\varphi_1}{2\cos\alpha/2}\right],$$
$$P_0=P_1\left[\frac{\cos\varphi_2+\cos\varphi_1}{2\sin\alpha/2}-\frac{\sin\varphi_2-\sin\varphi_1}{2\cos\alpha/2}\right]. \tag{15}$$

Если $\varphi_1+\varphi_2=\pi$, то $P_\alpha=P_0=0$ для любого значения α из интервала $\pi<\alpha<2\pi$.

Ñ точки зрения механики деформируемого твердого тела ôîðìóëû (15) верны, в частности, для тех значений α,φ_1 и φ_2, которые удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{ctg}\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\geq-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{15$'$}$$

Неравенство (15$'$) получено из условий $P_\alpha\geq 0$ и $P_0\geq 0$ с учетом того, что сосредоточенные силы, действующие на границе $r=1$, или сжимающие (при $0<\varphi_j<\pi/2$), или растягивающие (при $\pi/2<\varphi_j<\pi$). Возможны и другие варианты приложения сосредоточенных сил.

При $\varphi_1=\varphi_2$ из (15) получим

$$P_\alpha=P_0=P_1\frac{\cos\varphi_1}{\sin\alpha/2}. \tag{16}$$

Более подробно исследуем поведение напряжений в окрестности угловой точки сектора $(r\to 0)$ при $\alpha\to\pi$ и $\alpha\to 2\pi$:

а) в случае $\alpha\to\pi$ (фиг.2) порядок особенности напряжений, который обусловлен только первыми членами формул (12), стремится к 1, а коэффициенты при особенности в общем случае нагружения границы $r=1$ отличны от нуля.

Например, при тех же внешних воздействиях (14) первые члены формул (12) принимают вид

$$\frac{P_1(\sin\alpha_0\varphi_2-\sin\alpha_0\varphi_1)}{\alpha\alpha_0}\begin{Bmatrix}(2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\\ \alpha_0\sin\alpha_0\varphi\\ (2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{-\alpha_0}.$$

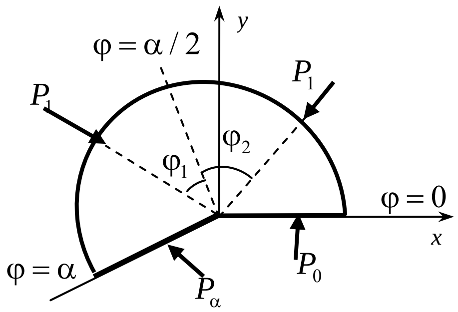
Как видно, коэффициенты при особенности $r^{-\alpha_0}$ отличны от нуля (если только $\varphi_1\neq\varphi_2$ или $\varphi_1+\varphi_2\neq\pi$) и при $\alpha\to\pi$ все три напряжения в окрестности угловой точки кругового сектора стремятся к бесконечности, как $r^{-1+\varepsilon}$, где ε – сколь угодно малое положительное число ($\varepsilon\to 0$ при $\alpha\to\pi$).

Отметим, что при $\alpha \to \pi$ и $\varphi_1 \neq \varphi_2$ силы P_α и P_0 , как показывают формулы (15), стремятся к бесконечности, что естественно, иначе первое условие статического равновесия сектора невозможно обеспечить.

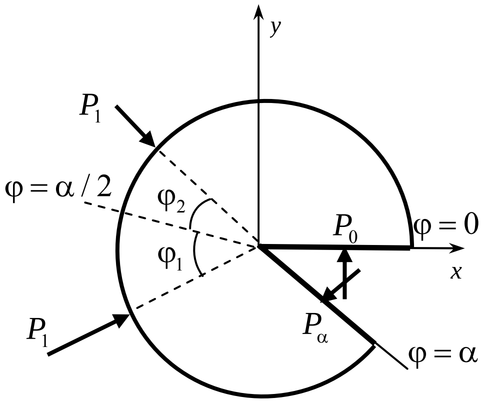
Когда внешние нагрузки удовлетворяют условию

$$-\alpha_0 \tilde{f}_{11} + (2-\alpha_0)\,\tilde{f}_{21} = 0\,, \tag{17}$$

коэффициенты при особенности $r^{-\alpha_0}$ равняются нулю и приходим к задаче, рассмотренной в работе [2]. Ограничению (15) удовлетворяет, в частности, система внешних сил (14) при $\varphi_1 = \varphi_2$. В случае $\alpha = \pi$ условие (17) превращается в первое условие статического равновесия сектора $\Sigma X=0$ и получим задачу об упругом полукруге, прижатом по диаметру к гладкой жесткой основе. Следовательно, если система внешних сил, действующая на границе $r=1$, самоуравновешена в направлении оси ох, то эффект двух штампов, приложенных к диаметру полукруга (появление степенной особенности напряжений типа r^{-1} [5]), исчезает;



Фиг.2



Фиг.3

б) $\alpha \to 2\pi$, $k=2$ (фиг.3). И в этом случае порядок особенности напряжений стремится к 1, коэффициент которого

$\left(\tilde{f}_{12} + \tilde{f}_{22}\right)(2-\alpha_0 k) - 2\tilde{f}_{12} = 2\left(-\alpha_0 \tilde{f}_{12} + (1-\alpha_0)\,\tilde{f}_{22}\right)$ при общих нагрузках на границе $r=1$, как видно из (14'), отличен от нуля даже при $\varphi_1 = \varphi_2$. Для обеспечения статического равновесия в направлении оси ох, силы P_α и P_0 неограниченно увеличиваются òàêæå при $\varphi_1 = \varphi_2$.

Заметим, что в случае $\alpha = 2\pi$ коэффициент при особенности r^{-1} превращается в выражение левой части первого уравнения статического равновесия сектора $\Sigma X=0$. Т.е. поставленная задача для $\alpha = 2\pi$ корректна, если внешние силы $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ самоуравновешенны в направлении оси ох. При этом, хотя порядок особенности равняется 1, коэффициент при особенности становится равным нулю;

в) $\alpha \to 2\pi$, $k=3$. Порядок особенности напряжений стремится к 0.5, а коэффициент при особенности отличен от нуля, если $\varphi_1 + \varphi_2 \neq m\alpha/3\,(m=1,3)$ и $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

Таким образом, решение краевой задачи теории упругости для кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах содержит степенную особенность напряжений, порядок которого при $\alpha \to \pi$ или $\alpha \to 2\pi$ может достигать до порядка особенности напряжений под сосредоточенной силой.

Механическая интерпретация возникновения степенной особенности напряжений, поðÿäîê которого стремится к единице, à коэффициент при такой особенности отличен от нуля, дана в работах [4,5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1987. 338 с.
2. Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.//Актуальные проблемы механики сплошной среды. Тр. Международной конференции, посвященной 95-летию акад. НАН Армении Н.Х.Арутюняна. Ереван, 2007. С. 368-372.
3. Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тр. VI Международной конференции, сентябрь 21-26, Горис- Степанакерт, 2008. Ереван, 2008. С. 394-398
4. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.S. On a mixed problem for an elastic space with a crack under anti-plane and plane deformations. Collection of papers. Yerevan, 2005. 282 p.
5. Саргсян А.М. Об особенности напряжений в одной задаче теории упругости для клина // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61, №1. С. 48-51.

Сведения об авторе:

Саргсян Азат Мкртычевич – к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}, тел.: 58-60-54
E-mail: azat-sargsyan@mail.ru

Поступила в редакцию 08.09.2009