

УДК 539.3

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ  
С ЗАКРЕПЛЁННЫМ ОСНОВАНИЕМ И МЕТОД ЛЕВИНСОНА  
ВАРТАНОВ А.Г.**

**Ключевые слова:** колебание плиты, метод Левинсона, волны в упругом слое.  
**Key words:** plate vibration, method of Levinson, waves in elastic layer.

**Vardanov A.H.**

**Solution of a Problem of Natural Oscillations of a Finite Plate with Fastened Base and Method of Levinson**

The exact solution of three-dimensional problem of free vibrations of a finite elastic plate with fastened base is considered. The problem is solved with the Lamé potentials and by method of Levinson, which has formulated to solve the three-dimensional plate problem with free faces. The dispersion equation for the vibration frequencies and the self functions characterizing the amplitude of oscillation are derived. Problems are solved in the case of the Navier conditions defined on the facial surfaces. It is shown that the method of Levinson leads to the exact solution.

**Վարդանով Ա.Հ.**

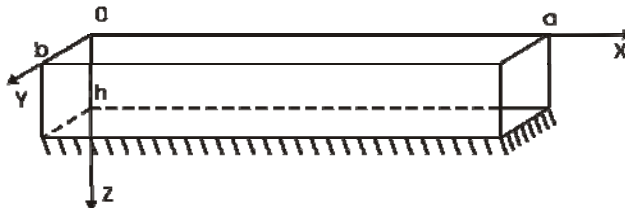
**Ամրակցված հիմքով վերջավոր սալի սեփական տատանումների խնդրի լուծումը և Լեվինսոնի եղանակը**

Աշխատանքը նվիրված է վերջավոր առաձգական սալի սեփական տատանումների խնդրի ճշգրիտ լուծմանը, եռաչափ դրվածքով: Խնդիրը լուծված է Լամեի պոտենցիալների միջոցով և, ազատ դիմային հարթակներով եռաչափ սալի խնդիրը լուծելու համար՝ առաջին անգամ Լեվինսոնի կողմից ձևակերպված մեթոդով: Ստացված են՝ ալիքի հաճախության նկատմամբ դիսպերսիոն հավասարում և ալիքային թիվը նկարագրող սեփական ֆունկցիաներ: Խնդիրները լուծված են սալի եզրերի վրա տրված Նավյեի պայմանների դեպքում: Ցույց է տրվում, որ դիտարկվող խնդիրը Լեվինսոնի եղանակով ճշգրիտ լուծվում է:

Работа посвящена точному решению трехмерной задачи собственных колебаний конечной упругой плиты на жестком основании. Задача решена с помощью потенциалов Ламе, а также с помощью метода Левинсона, впервые сформулированного для решения трехмерных задач плиты со свободными лицевыми поверхностями. Получены дисперсионное уравнение относительно частоты колебания и собственные функции, характеризующие амплитуду колебаний. Задачи решены в случае условий Навье, заданных на торцах плиты. Показано, что для рассматриваемой задачи метод Левинсона приводит к точному решению.

Впервые задача о распространении волн в упругом слое, границы которого свободны от напряжений, была решена Релеем [1] и Лембом [2] в двухмерной постановке. В дальнейшем эта проблема была детально исследована в [3-8]. Задача колебаний упругого слоя, лежащего на жёстком основании, впервые была рассмотрена в [9] и [10]. Задача собственных колебаний ортотропного и анизотропного слоя на жёстком основании на основе метода асимптотического интегрирования рассмотрена в [11-13].

Рассматриваются собственные колебания конечной плиты, занимающей в декартовой системе координат область  $0 < x < a$ ;  $0 < y < b$ ;  $0 < z < h$ .



Будем исходить из следующих динамических уравнений теории упругости:

$$\mu \Delta \bar{U} + (\lambda + \mu) \text{grad div} \bar{U} = \rho \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\text{где } \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\bar{U}(u_x, u_y, u_z) = \bar{U}(u, v, w)$  – вектор перемещения,  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе,  $\rho$  – плотность материала плиты.

На торцах плиты принимаются условия Навье, которые позволяют точно решить трехмерные краевые задачи теории упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(0, y, z) = \sigma_{xx}(a, y, z) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0, z) = \sigma_{yy}(x, b, z) = 0, \\ u_z(0, y, z) = u_z(a, y, z) = 0, \quad u_z(x, 0, z) = u_z(x, b, z) = 0, \\ u_y(0, y, z) = u_y(a, y, z) = 0, \quad u_x(x, 0, z) = u_x(x, b, z) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Плита свободна от напряжений на лицевой поверхности  $z = 0$  и лежит на жестком основании при  $z = h$ :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0; \quad z = 0; \quad u_x = u_y = u_z = 0; \quad z = h. \quad (3)$$

Решения уравнений (1) найдем с помощью потенциалов:

$$\bar{U} = \text{grad} \Phi + \text{rot} \bar{\Psi}, \quad \text{div} \bar{\Psi} = 0 \quad (4)$$

Подставляя потенциалы в уравнения движений, получим следующие волновые уравнения [14]:

$$\Delta \bar{\Psi} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \Phi - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } c_t = \sqrt{\mu/\rho}; \quad c_l = \sqrt{(2\mu + \lambda)/\rho}$$

Так как принятые граничные условия при  $z = 0, h$  несимметричны, то данная задача не разделяется на симметричные и антисимметричные моды, как это имеет место для плиты со свободными краями [14].

Общие решения уравнений потенциалов для гармонических волн, которые приводят к удовлетворению условиям Навье, имеют вид:

$$\Phi = \frac{1}{k} [C_1 \text{sh}(pkz) + C_2 \text{ch}(pkz)] \sin(\alpha kx) \sin(\beta ky) \exp(-i\omega t)$$

$$\Psi_x = \frac{1}{k} [C_3 \text{sh}(qkz) + C_4 \text{ch}(qkz)] \sin(\alpha kx) \cos(\beta ky) \exp(-i\omega t) \quad (6)$$

$$\Psi_y = \frac{1}{k} [C_5 \text{sh}(qkz) + C_6 \text{ch}(qkz)] \cos(\alpha kx) \sin(\beta ky) \exp(-i\omega t)$$

$$\Psi_z = -\frac{1}{k} \left[ \frac{(\alpha C_3 + \beta C_5) \text{ch}(qkz)}{q} + \frac{(\alpha C_4 + \beta C_6) \text{sh}(qkz)}{q} \right] \cos(\alpha kx) \cos(\beta ky) \exp(-i\omega t)$$

где

$$q = \sqrt{1 - \eta^2}, \quad p = \sqrt{1 - \theta \eta^2}; \quad \eta = \frac{\omega}{kc_t}, \quad \theta = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{\pi n}{ak}; \beta = \frac{\pi m}{bk}; k = \sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{b^2} + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}}; m, n = 1, 2, 3..$$

а  $\omega$  – частота колебаний.

Как видно, потенциалы  $\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z$ , которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (5), удовлетворяют также условию  $\text{div} \bar{\Psi} = 0$ .

Функции перемещений посредством решений (6) записываются в виде:

$$\begin{aligned} u_x &= \partial_x \Phi + \partial_y \Psi_z - \partial_z \Psi_y, \\ u_y &= \partial_y \Phi - \partial_x \Psi_z + \partial_z \Psi_x, \\ u_z &= \partial_z \Phi + \partial_x \Psi_y - \partial_y \Psi_x. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, подставляя выражения потенциалов (6) в перемещения (8) и выражая постоянные  $C_3, C_4, C_5, C_6$  через новые  $A_1, A_2, B_1, B_2$  следующим образом:

$$\begin{aligned} C_3 &= -\frac{B_1 \alpha \beta + B_2 (\beta^2 - q^2)}{q(q^2 - \alpha^2 - \beta^2)}; \quad C_4 = -\frac{A_1 \alpha \beta + A_2 (\beta^2 - q^2)}{q(q^2 - \alpha^2 - \beta^2)}, \\ C_5 &= -\frac{B_1 (q^2 - \alpha^2) - B_2 \alpha \beta}{q(q^2 - \alpha^2 - \beta^2)}; \quad C_6 = -\frac{A_1 (q^2 - \alpha^2) - A_2 \alpha \beta}{q(q^2 - \alpha^2 - \beta^2)}, \end{aligned} \quad (9)$$

получим функции перемещений в виде:

$$\begin{aligned} u_x &= \cos(\alpha kx) \sin(\beta ky) [\alpha (C_1 \text{sh}(pkz) + C_2 \text{ch}(pkz)) + A_1 \text{sh}(qkz) + B_1 \text{ch}(qkz)] \\ u_y &= \cos(\beta ky) \sin(\alpha kx) [\beta (C_1 \text{sh}(pkz) + C_2 \text{ch}(pkz)) + A_2 \text{ch}(qkz) + B_2 \text{sh}(qkz)] \\ u_z &= \sin(\alpha kx) \sin(\beta ky) p (C_1 \text{ch}(pkz) + C_2 \text{sh}(pkz)) + \\ &+ \sin(\alpha kx) \sin(\beta ky) \frac{(\alpha A_1 + \beta A_2) \text{ch}(qkz) + (\alpha B_1 + \beta B_2) \text{sh}(qkz)}{q} \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя перемещения  $u_x, u_y, u_z$  в граничные условия (2), которые запишем в виде: при  $z = 0$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \quad \gamma \frac{\partial u_z}{\partial z} + (\gamma - 2) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (11)$$

при  $z = h$

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0,$$

где  $\gamma = \theta^{-1}$ ,

получим следующую систему из шести уравнений относительно шести постоянных  $A_1, A_2, C_1, C_2, B_1, B_2$ :

$$\begin{cases} A_1(q^2 + \alpha^2) + \alpha(2C_1pq + A_2\beta) = 0 \\ A_2(q^2 + \beta^2) + \beta(2C_1pq + A_1\alpha) = 0 \\ 2B_1\alpha + 2B_2\beta + 2C_2(\alpha^2 + \beta^2) - C_2\gamma(\alpha^2 + \beta^2 - p^2) = 0 \\ C_2\alpha\text{ch}[hkp] + B_1\text{ch}[hkq] + C_1\alpha\text{sh}[hkp] + A_1\text{sh}[hkq] = 0 \\ C_2\beta\text{ch}[hkp] + B_2\text{ch}[hkq] + C_1\beta\text{sh}[hkp] + A_2\text{sh}[hkq] = 0 \\ C_1pq\text{ch}[hkp] + (A_1\alpha + A_2\beta)\text{ch}[hkq] + C_2pq\text{sh}[hkp] + (B_1\alpha + B_2\beta)\text{sh}[hkq] = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Из условия равенства нулю определителя этой системы получим следующее дисперсионное уравнение, определяющее зависимость безразмерной фазовой скорости  $\eta_0$  от параметра относительной толщины  $kh$ :

$$F(\eta) = -\frac{(\lambda^2 + 4p^2q^2)\text{th}[khp]\text{th}[khq]}{pq} - \frac{4\lambda}{\text{ch}[khp]\text{ch}[khq]} + (4 + \lambda^2) = 0, \quad (13)$$

где

$$\lambda = 2 - \eta^2. \quad (14)$$

Дисперсионное уравнение (13) совпадает с дисперсионным уравнением в [15], если в последнем магнитное поле принять равным нулю. Оно также совпадает с дисперсионными уравнениями в [9] и [10]. Последние являются двумерными уравнениями и имеют иной вид.

В статьях [9], [10], [15] приведён анализ дисперсионного уравнения (13) относительно корней, где показано, что оно при сравнительно больших  $kh$  имеет один корень  $\eta < 1$  и бесконечное число корней в диапазонах частот  $1 < \eta < 1/\theta$ ;  $\eta > 1/\theta$ . Однако, эти частоты имеют нижнюю границу, ниже которой отсутствуют распространяющиеся моды. Границы этих частот запираения определяются из дисперсионного уравнения путем предельного перехода  $k \rightarrow 0$  [9]. Эти частоты являются частотами толщинно и толщинно-сдвиговых одномерных, зависящих только от  $z$ , колебаний. Они совпадают с первыми приближениями асимптотических решений ряда колебаний пластин, полученных в работах [11,12]. Эти частоты определяются из уравнений  $\cos(h\omega/c_l)\cos(h\omega/c_t) = 0$ .

Основным отличием данной задачи от задачи колебания пластинки со свободными торцами заключается в том, что при больших  $kh$  минимальная частота колебаний или фазовая скорость  $\eta$  совпадает со скоростью волны Релея, и с уменьшением  $kh$  фазовая скорость возрастает. Волн со скоростями, меньшими, чем скорость поверхностных волн Релея, в данной задаче нет, чем она существенно отличается от задачи Лемба.

Далее определим для этой краевой задачи собственные функции, они получаются посредством выражения пяти постоянных интегрирования через одного в пяти граничных условиях, а шестое условие удовлетворяется тождественно. Эти собственные функций имеют вид:

$$u_x(x, y, z) = C\alpha \cos(\alpha x) \sin(\beta y) G(z) \exp(-i\omega t)$$

$$u_y(x, y, z) = C\beta \sin(\alpha x) \cos(\beta y) G(z) \exp(-i\omega t)$$

$$u_z(x, y, z) = Ckp \sin(\alpha x) \sin(\beta y) F(z) \exp(-i\omega t)$$

где

$$\begin{aligned}
 G(z) = & -pq(1+q^2)\operatorname{ch}[hkq]\operatorname{ch}[kp(h-z)]+2pq\operatorname{ch}[kpz]+ \\
 & +pq(1+q^2)\operatorname{ch}[kqz]-pq(1+pq)\operatorname{ch}[k(hp-hq+qz)]+ \\
 & +pq(-1+pq)\operatorname{ch}[hk(p+q)-kqz]+(1+q^2)\operatorname{sh}[hkq]\operatorname{sh}[kp(h-z)], \\
 F(z) = & -\operatorname{ch}[hkp]\left((1+q^2)\operatorname{ch}[kpz]-2\operatorname{ch}[kqz]\right)\operatorname{sh}[hkq]+ \\
 & +\left(2pq+(1+q^2)\operatorname{sh}[hkp]\operatorname{sh}[hkq]\right)\operatorname{sh}[kpz]+ \\
 & +\operatorname{ch}[hkq]pq\left((1+q^2)\operatorname{ch}[kpz]-2\operatorname{ch}[kqz]\right)\operatorname{sh}[hkp]+ \\
 & +\operatorname{ch}[hkp]\operatorname{ch}[hkq]\left(-pq(1+q^2)\operatorname{sh}[kpz]-2\operatorname{sh}[kqz]\right)+ \\
 & +\left(1+q^2+2pq\operatorname{sh}[hkp]\operatorname{sh}[hkq]\right)\operatorname{sh}[kqz]
 \end{aligned} \tag{15}$$

а  $C$  – постоянная.

Таким образом, нами полученное дисперсионное уравнение (13) для краевой задачи плиты на жестком основании (1), (2), (3) определяет фазовую скорость или частоту колебаний, а  $G(z), F(z)$  являются собственными функциями.

При решении задачи колебаний конечной плиты, Левинсоном был предложен метод [8], который значительно упрощает ход решения. Этот метод заключается в том, что перемещения принимаются в виде:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) = & -g(z)\partial S(x, y)/\partial x, \quad v(x, y, z, t) = -g(z)\partial S(x, y)/\partial y, \\
 w(x, y, z, t) = & f(z)S(x, y),
 \end{aligned} \tag{16}$$

где  $g(z)$  и  $f(z)$  – неизвестные функции, подлежащие определению.

В этом случае для функции  $S(x, y)$  принимается:

$$S(x, y) = \sin(\alpha_0 x)\sin(\beta_0 y)$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi n}{a}; \quad \beta_0 = \frac{\pi m}{b}; \quad n, m = 1, 2, 3 \dots$$

вследствие этого граничные условия Навье, которые позволяют точно решить трехмерные краевые задачи теории упругости, удовлетворяются.

Левинсоном [8] были получены точные дисперсионные уравнения как для антисимметричных (изгибных), так и для симметричных (планарных) колебаний, для задачи со свободными поверхностями.

Используем теперь этот метод для решения нашей краевой задачи (1),(2),(3).

Решения уравнений (3) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) = & -g(z)\exp(-i\omega t)\partial S(x, y)/\partial x \\
 v(x, y, z, t) = & -g(z)\exp(-i\omega t)\partial S(x, y)/\partial y \\
 w(x, y, z, t) = & f(z)\exp(-i\omega t)S(x, y)
 \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя эти функции в уравнения движения (3), получим следующие дифференциальные уравнения относительно  $f(z), g(z)$ , где первые два уравнения идентичны:

$$\begin{aligned}
g''[z] - (\gamma - 1)f'[z] - ((\alpha_0^2 + \beta_0^2)\gamma - \eta^2)g[z] &= 0 \\
g''[z] - (\gamma - 1)f'[z] - ((\alpha_0^2 + \beta_0^2)\gamma - \eta^2)g[z] &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\gamma f''[z] + (\alpha_0^2 + \beta_0^2)(\gamma - 1)g'[z] - (\alpha_0^2 + \beta_0^2 - \eta^2)f[z] = 0$$

Будем искать решения этих уравнений в виде:

$$g(z) = g_0 \exp[rz], \quad f(z) = f_0 \exp[rz].$$

Подставляя эти решения в уравнения (18) и приравнявая определитель к нулю, получим следующее характеристическое уравнение относительно  $\eta$ :

$$(r^2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2 + \eta^2)(r^2\gamma - \alpha_0^2\gamma - \beta_0^2\gamma + \eta^2) = 0,$$

решения которого имеют вид

$$r_1 = k\sqrt{1 - \eta^2 / \gamma} = kp, \quad r_2 = k\sqrt{1 - \eta^2} = kq.$$

В силу этого, общее решение будем искать в следующем виде:

$$g(z) = C_1 \operatorname{sh}[r_1 z] + C_2 \operatorname{ch}[r_1 z] + C_3 \operatorname{sh}[r_2 z] + C_4 \operatorname{ch}[r_2 z]$$

$$f(z) = A_1 \operatorname{sh}[r_1 z] + A_2 \operatorname{ch}[r_1 z] + A_3 \operatorname{sh}[r_2 z] + A_4 \operatorname{ch}[r_2 z]$$

Но так как для системы имеем четыре граничных условия, то из постоянных  $C_i$  и  $A_i$  независимы только 4, найдем эти связи. Подставляя  $f(z)$  и  $g(z)$  в один из дифференциальных уравнений, для коэффициентов  $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$  получим следующие связи:

$$A_1 = -C_2 r_1; \quad A_2 = -C_1 r_1; \quad A_3 = -\frac{k^2}{r_2} C_4; \quad A_4 = -\frac{k^2}{r_2} C_3$$

отсюда решения получают окончательный вид:

$$\begin{aligned}
g(z) &= C_1 \operatorname{sh}[r_1 z] + C_2 \operatorname{ch}[r_1 z] + C_3 \operatorname{sh}[r_2 z] + C_4 \operatorname{ch}[r_2 z] \\
f(z) &= -r_1 (C_1 \operatorname{ch}[r_1 z] + C_2 \operatorname{sh}[r_1 z]) - \frac{k^2}{r_2} (C_3 \operatorname{ch}[r_2 z] + C_4 \operatorname{sh}[r_2 z])
\end{aligned} \tag{19}$$

Подставляя (17) в граничные условия (12), получим граничные условия для функций  $f(z)$  и  $g(z)$  в следующем виде:

при  $z = 0$

$$f(z) - g'(z) = 0, \quad (\alpha_0^2 + \beta_0^2)(\gamma - 2)g(z) + \gamma f'(z) = 0, \tag{20}$$

при  $z = h$

$$g(z) = 0, \quad f(z) = 0.$$

Отметим, что граничные условия  $u = 0, v = 0$  при  $z = h$  и  $\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0$  при  $z = 0$  приводят к двум граничным условиям при  $z = 0, h$ .

Далее, подставляя решения (19) в граничные условия (20), получим систему из четырёх уравнений:

$$\begin{cases} 2C_1r_1 + C_3(k^2 + r_2^2) = 0 \\ k^2(C_2 + C_4r_2)(\gamma - 2) - (C_2r_1^2 + k^2C_4r_2)\gamma = 0 \\ C_2\text{ch}[hr_1] + C_4r_2\text{ch}[hr_2] + C_1\text{sh}[hr_1] + C_3r_2\text{sh}[hr_2] = 0 \\ C_1r_1\text{ch}[hr_1] + C_3k^2\text{ch}[hr_2] + C_2r_1\text{sh}[hr_1] + C_4k^2\text{sh}[hr_2] = 0 \end{cases}$$

приравняв определитель этой системы к нулю, получим дисперсионное уравнение, которое в точности совпадает с (13).

Собственные функции получим тем же путем, что и в предыдущей задаче, только здесь берутся 3 граничных условия, а через одно постоянное выражаются 3 постоянных интегрирования. Их вид будет таким:

$$u(x, y, z) = C \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} G(z) \exp(-i\omega t)$$

$$v(x, y, z) = C \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} G(z) \exp(-i\omega t)$$

$$w(x, y, z) = CkpS(x, y)F(z) \exp(-i\omega t)$$

где  $G(z)$  и  $F(z)$  – те же функции, что и в (13).

Таким образом, предложенный метод решения является точным, так как собственные функции и собственные числа совпадают. Однако, метод Левинсона не может быть применён для краевых задач на одном или на двух, из краев которых граничные условия относительно  $u, v$  заданы разными способами. Например, если на одной границе заданы условия  $u=0, \sigma_{yz}=0, \sigma_{zz}=0$  или  $v=0, \sigma_{xz}=0, \sigma_{zz}=0$ , то в этом случае, в рамках метода Левинсона будем иметь два уравнения относительно  $f(z)$  и  $g(z)$  и три граничных условия для  $f(z)$  и  $g(z)$ , что означает, что этот метод не применим для этих краевых задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh, J. W. "On Waves Propagated Along the Plane Surface of an Elastic Solid," Proc. Lond. Math. Soc., 1885/1886.17, p. 4-11.
2. Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA., 1917. Vol. 93.
3. Viktorov, I.A. Rayleigh and Lamb Waves – Physical Theory and Applications. New York: Plenum Press. 1967.
4. Achenbach, J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. Elsevier. 1973.
5. Graff, K.F. Wave Motion in Elastic Solids. Mineola, NY: Oxford University Press. 1975.
6. Levinson, M. Free vibration of a simply supported rectangular plate: An exact elasticity solution, Journal of Sound and Vibration, 1985. 98.2. 289–298.
7. Rose, J.L. Ultrasonic Waves in Solid Media. New York: Cambridge University Press. 1999.
8. Royer, D., Dieulesaint, E. Elastic Waves in Solids. Springer.2000.
9. Ишков П. К. О Распространении упругих волн в слое, лежащем на жёстком основании.// Изв. АН СССР.Сер. геофизическая. 1941. №2. С.169–176.

10. Мартыненко М.Д., Мелешко В.В. Распространение нормальных волн в слое, лежащем на жестком основании. //Прикладная механика. 1986. Т.22. №7. С.23–29.
11. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.18-28.
12. Оганесян Р.Ж. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания ортотропной пластинки // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №3. С.32-37.
13. Агаловян М.Л. Асимптотика собственных колебаний анизотропной полосы, //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С. 42-51.
14. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
15. Варганов А.Г., Магнитоупругие колебания идеально-проводящего слоя в постоянном магнитном поле. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №3. С.33-40.

**Сведения об авторе:**

**Варганов Арташес Гайкович** – аспирант Института механики НАН Армении.

E-mail: [geops@mail.ru](mailto:geops@mail.ru)

Поступила в редакцию 28.06.2010