

УДК 539.3

**О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКОГО  
ВКЛЮЧЕНИЯ В СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ  
АКОПЯН В.Н., САРГСЯН А.О.**

**Ключевые слова:** включение, контактные напряжения, составная полуплоскость, ортогональные многочлены.

**Key words:** inclusion, contact stresses, compound half-plane, orthogonal polynomials.

Հակոբյան Վ.Ն., Սարգսյան Ա.Օ.

**Բաղադրյալ առավելակալ կիսահարթության մեջ բացարձակ կոշտ ներդրակի շրջակայքում  
լարումների կոնցենտրացիայի մասին**

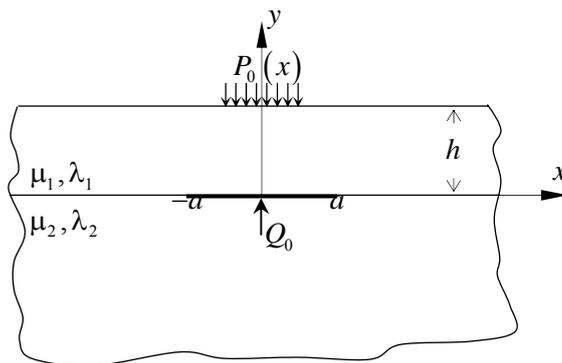
Դիտարկված է շերտից և կիսահարթությունից կազմված բաղադրյալ կիսահարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն տարբեր նյութերի միացման գծի վրա պարունակում է բացարձակ կոշտ, բարակ ներդրակ: Ստացված են խնդրի որոշիչ հավասարումները, երբ ներդրակը հարակցված է կիսահարթությանը, իսկ շերտի հետ գտնվում է ողորկ կոնտակտի պայմաններում: Ուսումնասիրված է որոնելի ֆունկցիաների վարքը ներդրակի ծայրակետերում և կառուցված է խնդրի լուծումը օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ:

Накобян В.Н., Саргсян А.О.

**Stress Concentration Near the Absolutely Rigid Inclusion in Compound Elastic Half-Plane**

A plane stress-strain state of composite half-plane containing rigid thin inclusion on the interface of different materials is considered. The governing system of singular integral equations of the problem is derived, when one side of inclusion is rigidly fastened with the matrix, and the other side is in smooth contact. The behavior of the unknown functions at the endpoints of inclusion depending on the physical parameters is studied and solution of the problem by the method of orthogonal polynomials is constructed.

Исследованию напряженно-деформированного состояния однородных и составных массивных тел, содержащих абсолютно жесткие включения, посвящено много работ как отечественных, так и зарубежных исследователей. Из них особо отметим работы [1-6], которые непосредственно связаны с настоящей работой. Здесь рассмотрено плоско-деформированное состояние составной полуплоскости, содержащей на линии стыка различных материалов абсолютно жесткое тонкое включение. Выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений поставленной задачи, когда одна из боковых сторон включения жестко сцеплена с матрицей, а другая сторона находится в условиях гладкого контакта. Изучено поведение искомых функций в концевых точках включения в зависимости от физических параметров и построено решение задачи методом ортогональных многочленов.



Փիգ. 1

1. Рассмотрим плоско-деформированное состояние составной полуплоскости, состоящей из бесконечной упругой полосы толщиной  $h$  и упругой полуплоскости с коэффициентами Лямэ  $\mu_1, \lambda_1$  и  $\mu_2, \lambda_2$ , когда на линии их соединения имеется

абсолютно жесткое тонкое включение длиной  $2a$ , нижняя сторона которого жестко сцеплена с упругой полуплоскостью, а верхняя сторона гладко контактирует с полосой (фиг.1). Будем считать, что составная полуплоскость деформируется под действием симметричной относительно оси  $OY$  нормальной распределенной нагрузки  $P_0(x)$ , приложенной к свободной границе полосы  $y = h$ , и сосредоточенной силы  $Q_0$ , перпендикулярно приложенной к центру включения.

Ставится задача: определить контактные напряжения под включением, коэффициенты интенсивности в концевых точках включения и изучить закономерности изменения этих величин в зависимости от физических и геометрических характеристик поставленной задачи.

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\sigma_y^{(1)}(x, h) = P_0(x), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, h) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.1a)$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0), & \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) \\ U_1(x, 0) = U_2(x, 0), & V_1(x, 0) = V_2(x, 0) \end{cases} \quad (|x| > a) \quad (1.1б)$$

$$\begin{cases} V_1(x, +0) = V_2(x, -0) = \delta \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, +0) = U_2(x, -0) = 0 \end{cases} \quad |x| < a \quad (1.1в)$$

Здесь  $\sigma_y^{(j)}(x, y)$  и  $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) – соответственно нормальные и касательные компоненты напряжений полосы и полуплоскости,  $U_j(x, y)$  и  $V_j(x, y)$  – горизонтальные и вертикальные смещения точек полосы и полуплоскости, а  $\delta$  – неизвестная постоянная, характеризующая жесткое смещение включения.

Чтобы решить поставленную задачу, как обычно, введем в рассмотрение функции скачков.

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \begin{cases} 0, & |x| > a \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0), & |x| < a \end{cases} \\ \tau(x) &= \begin{cases} 0, & |x| > a \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), & |x| < a \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ U_1(x, 0) - U_2(x, 0), & |x| < a \end{cases}$$

$$V(x) = V_1(x, 0) - V_2(x, 0) = 0, \quad (-\infty < x < \infty)$$

Учитывая (1.2), решим задачу при условиях (1.1a)–(1.1б) и выразим компоненты напряжений и смещений через функции скачков. Далее удовлетворим условиям (1.1в), предварительно продифференцировав первое из них. В итоге придем к следующей определяющей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{d_0}{\Delta_*} \sigma(x) - \frac{l_0}{\Delta_*} U'(x) - \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\tau(s) d(s)}{s-x} + \int_{-a}^a K_{11}^*(x-s) \sigma(s) ds + \\
& + \int_{-a}^a K_{12}^*(x-s) \tau(s) ds + \int_{-a}^a K_{13}^*(x-s) U'(s) ds = -F_1(x) \\
& \frac{d_0}{\Delta_*} \tau(x) + \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s) ds}{s-x} + \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{U'(s) ds}{s-x} - \int_{-a}^a K_{21}^*(x-s) \sigma(s) ds - \\
& - \int_{-a}^a K_{22}^*(x-s) \tau(s) ds + \int_{-a}^a K_{23}^*(x-s) U'(s) ds = F_2(x) \\
& \frac{l_0}{\Delta_*} \tau(x) - \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s) ds}{s-x} - \frac{l_3}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{U'(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a K_{31}^*(x-s) \sigma(s) ds + \\
& + \int_{-a}^a K_{32}^*(x-s) \tau(s) ds + \int_{-a}^a K_{33}^*(x-s) U'(s) ds = -F_3(x)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned}
K_{ij}^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{ij}(s) e^{ist} ds \\
Q_{11}(s) &= \frac{s\Delta_B^{(\sigma)}(s)}{i\Delta(s)} - \frac{d_0}{\Delta_*}; \quad Q_{12}(s) = \frac{s\Delta_B^{(\tau)}(s)}{i\Delta(s)} + \frac{d_1}{i\Delta_*} \operatorname{sgn} s; \quad Q_{13}(s) = \frac{\Delta_B^{(U)}(s)}{\Delta(s)} + \frac{l_0}{\Delta_*}; \\
Q_{21}(s) &= \frac{s\Delta_c^{(\sigma)}(s)}{i\Delta(s)} + \frac{d_1}{i\Delta_*} \operatorname{sgn} s; \quad Q_{22}(s) = \frac{s\Delta_c^{(\tau)}(s)}{i\Delta(s)} + \frac{d_0}{\Delta_*}; \quad Q_{23}(s) = \frac{\Delta_c^{(U)}(s)}{\Delta(s)} + \frac{l_2 \operatorname{sgn} s}{i\Delta_*}; \\
Q_{31}(s) &= 2\vartheta_2^{(2)} \left[ \frac{|s|\Delta_B^{(\sigma)}(s)}{\Delta(s)} + \frac{\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}}{2i\Delta_*} \operatorname{sgn} s \right] + 2\vartheta_1^{(2)} Q_{21}(s); \\
Q_{32}(s) &= 2\vartheta_2^{(2)} \left[ \frac{|s|\Delta_B^{(\tau)}(s)}{\Delta(s)} + \frac{\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}}{2i\Delta_*} \operatorname{sgn} s \right] + 2\vartheta_1^{(2)} Q_{22}(s); \\
Q_{33}(s) &= 2i\vartheta_2^{(2)} \left[ \frac{\Delta_B^{(U)}(s)}{\Delta(s)} + \frac{l_0}{\Delta_*} \right] + 2\vartheta_1^{(2)} Q_{23}(s); \\
\Delta(s) &= s^2 \left\{ \left[ (\vartheta_2^{(2)})^2 - (\vartheta_1^{(2)})^2 \right] \operatorname{ch}^2 z + (\vartheta_2^{(2)})^2 \left[ C_{11}^2 - \left( \frac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_2^{(1)}} \right)^2 \right] \operatorname{sh}^2 z + \right. \\
& \quad \left. + 2(\vartheta_2^{(2)})^2 \left[ C_{11} - \frac{\vartheta_1^{(1)}(\vartheta_1^{(2)})}{\vartheta_2^{(1)}(\vartheta_2^{(2)})} \right] \operatorname{sh} |z| \operatorname{ch} z - \frac{\mu_1^2 z^2}{H_1^2} \left[ C_{12}^2 - \left( \frac{\vartheta_2^{(2)}}{\vartheta_2^{(1)}} \right)^2 \right] \right\}; \\
\Delta_c^{(\sigma)}(s) &= -\frac{|s|}{2} \left\{ \vartheta_2^{(1)} \left[ \operatorname{ch}^2 z - \left( \frac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_2^{(1)}} \right)^2 \operatorname{sh}^2 z \right] + \frac{(\vartheta_2^{(1)})^2 - (\vartheta_1^{(1)})^2}{\vartheta_2^{(1)}} \operatorname{sh} |z| \operatorname{ch} z + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_1(\mathfrak{g}_2^{(2)} + \mathfrak{g}_1^{(1)})}{H_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}} |z| + \frac{\mathfrak{g}_2^{(2)} \mu_1^2}{H_1^2 (\mathfrak{g}_2^{(1)})^2} z^2 \Big\} \\
\Delta_B^{(\sigma)}(s) = -\Delta_C^{(\tau)}(s) = & -\frac{s}{2i} \left\{ \frac{\mathfrak{g}_1^{(1)} \mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} C_{11} \text{sh}^2(hs) - \mathfrak{g}_1^{(2)} \text{ch}^2(hs) - \frac{\mu_1^2 C_{12}}{H_1^2 \mathfrak{g}_2^{(1)}} (hs)^2 \right\} \\
\Delta_B^{(\tau)}(s) = & -\frac{|s|}{2} \left\{ \frac{(\mathfrak{g}_2^{(1)})^2 - (\mathfrak{g}_1^{(1)})^2}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \text{ch}(hs) \text{sh}|hs| + \mathfrak{g}_2^{(2)} \left[ \text{sh}^2(hs) - \left( \frac{\mathfrak{g}_1^{(1)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \right)^2 \text{sh}^2(hs) \right] - \right. \\
& \left. - \frac{\mu_1(\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_1^{(1)})}{H_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}} |hs| + \frac{\mathfrak{g}_2^{(2)} \mu_1^2}{H_1^2 (\mathfrak{g}_2^{(1)})^2} (hs)^2 \right\}; \\
\Delta_C^{(U)}(s) = & -\frac{s|s|(\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_1^{(1)})}{i \mathfrak{g}_2^{(1)}} \left\{ (\mathfrak{g}_2^{(1)} - \mathfrak{g}_1^{(1)}) \left[ \mathfrak{g}_1^{(2)} \text{ch}(hs) \text{sh}|hs| + \frac{\mathfrak{g}_1^{(1)} \mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \text{sh}^2(hs) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\mathfrak{g}_1^{(2)} \mu_1}{H_1} |hs| + \frac{\mathfrak{g}_2^{(2)} \mu_1^2}{H_1^2 \mathfrak{g}_2^{(1)}} (hs)^2 \right\}; \\
\Delta_B^{(U)}(s) = & -\frac{s^2(\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_1^{(1)}) \partial_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \left\{ (\mathfrak{g}_2^{(1)} - \mathfrak{g}_1^{(1)}) \left[ C_{11} \text{sh}^2(hs) + \text{ch}(hs) \text{sh}|hs| \right] + \frac{\mu_1}{H_1} |hs| + \right. \\
& \left. + \frac{\mu_1^2 C_{12}^2}{H_1^2 \mathfrak{g}_2^{(1)}} (hs)^2 \right\}; \\
F_1(x) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s \Delta_B^{(p)}(s)}{\Delta(s)} \bar{P}_0(s) e^{-isx} ds; \quad F_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s \Delta_C^{(p)}(s)}{\Delta(s)} \bar{P}_0(s) e^{-isx} ds; \\
F_3(x) = & 2\mathfrak{g}_1^{(2)} F_2(x) + \frac{\lambda \mathfrak{g}_2^{(2)}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s| \Delta_B^{(p)}(s)}{\Delta(s)} \bar{P}_0(s) e^{-isx} ds; \\
\Delta_B^{(p)}(s) = & \frac{is \mathfrak{g}_1^{(2)}}{2} \left\{ \text{ch}z + \frac{\mathfrak{g}_1^{(1)} \mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_1^{(2)} \mathfrak{g}_2^{(1)}} \text{sh}|z| - \frac{\mu_1 |z|}{H_1 \mathfrak{g}_1^{(2)}} \left[ \frac{\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \text{ch}z - C_{12} \text{sh}|z| \right] \right\}; \\
\Delta_C^{(p)}(s) = & \frac{|s| \mathfrak{g}_2^{(2)}}{2} \left\{ \text{ch}z + C_{11} \text{sh}|z| - \frac{\mu_1 |z|}{H_1 \mathfrak{g}_2^{(1)}} \left[ C_{12} \text{ch}z - \frac{\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}} \text{sh}|z| \right] \right\}; \quad (z = hs) \\
C_{11} = & \frac{(\mathfrak{g}_2^{(1)})^2 + \mathfrak{g}_1^{(1)}(\mathfrak{g}_1^{(2)} - \mathfrak{g}_1^{(1)})}{\mathfrak{g}_2^{(1)} \mathfrak{g}_2^{(2)}}; \quad C_{12} = \frac{\mathfrak{g}_1^{(2)} - \mathfrak{g}_1^{(1)} - \mathfrak{g}_2^{(1)}}{\mathfrak{g}_2^{(1)}}; \\
\mathfrak{g}_1^{(j)} = & \frac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad \mathfrak{g}_2^{(j)} = \frac{\mu_j(\lambda_j + 2\mu_j)}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad d_0 = \frac{\mathfrak{g}_1^{(1)} - \mathfrak{g}_1^{(2)}}{2}; \quad d_1 = \frac{\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_2^{(2)}}{2}; \\
l_0 = & \mathfrak{g}_2^{(1)}(\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_2^{(2)}) - \mathfrak{g}_1^{(1)}(\mathfrak{g}_1^{(1)} - \mathfrak{g}_1^{(2)}); \quad l_1 = 2(\mathfrak{g}_1^{(2)} l_0 - \mathfrak{g}_2^{(2)} l_2); \\
l_2 = & \mathfrak{g}_1^{(1)} \mathfrak{g}_2^{(2)} + \mathfrak{g}_2^{(1)} \mathfrak{g}_1^{(2)}; \quad l_3 = 2(\mathfrak{g}_1^{(2)} l_2 - \mathfrak{g}_2^{(2)} l_0); \quad \Delta_* = [\mathfrak{g}_2^{(1)} + \mathfrak{g}_2^{(2)}]^2 - [\mathfrak{g}_1^{(1)} - \mathfrak{g}_1^{(2)}]^2.
\end{aligned}$$

При этом, искомые функции должны удовлетворять условиям равновесия включения и непрерывности смещений в концевых точках включения, т.е. условиям

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = Q_0; \quad \int_{-a}^a \tau(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a U'(x) dx = 0 \quad (1.4)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.3) при условиях (1.4).

2. Прежде чем перейти к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.3) при условиях (1.4), определим поведение искомых функций в концевых точках интервала  $(-a, a)$ . Для этого сперва рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда толщина полосы бесконечно большая, т.е. рассмотрим напряженное состояние составной плоскости из двух разнородных полуплоскостей, содержащей включение на линии их соединения. В этом случае система (1.3) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d_0}{\Delta_*} \sigma(x) - \frac{l_0}{\Delta_*} U'(x) - \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds = 0 \\ \frac{d_0}{\Delta_*} \tau(x) + \frac{d_1}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{U'(s)}{s-x} ds = 0 \\ \frac{l_0}{\Delta_*} \tau(x) - \frac{l_2}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_3}{\pi \Delta_*} \int_{-a}^a \frac{U'(s)}{s-x} ds = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Отметим, что последняя задача методом комплексных потенциалов не полностью была рассмотрена в работе [5].

Построим решение системы (2.1) при условиях (1.4). С этой целью исключим из последних двух уравнений (2.1) функцию  $\tau(x)$ . Получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{M \sigma(s) + N U'(s)}{s-x} ds = 0$$

$$\left( M = l_0 d_1 + l_2 d_0 = \mathfrak{G}_2^{(1)} \Delta_* / 2; \quad N = \mathfrak{G}_1^{(2)} \mathfrak{G}_2^{(1)} \Delta_* \right),$$

откуда [7]

$$M \sigma(x) + N U'(x) = \frac{C_0}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (2.2)$$

где  $C_0$  – неизвестная постоянная.

Интегрируя уравнение (2.2) от  $-a$  до  $a$  и учитывая условия (1.4), для неизвестной постоянной  $C_0$  получим следующее значение:

$$C_0 = M Q_0 \quad (2.3)$$

Далее, выразим из (2.2) функцию  $U'(x)$  через функцию  $\sigma(x)$  и подставим в первые два уравнения (2.1). В итоге, для определения скачков напряжений получим следующую систему двух сингулярных интегральных уравнений:

$$\sigma(x) - \frac{\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s) ds}{s-x} = \frac{Q_0^*}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \tau(x) - \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds = 0 \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_0^* &= l_0 Q_0 / \tilde{\Delta}; \quad \tilde{\Delta} = \vartheta_2^{(1)} (\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}) - (\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)})^2; \\ \alpha &= \vartheta_1^{(2)} (\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}) / \tilde{\Delta}; \quad \beta = \vartheta_2^{(2)} / \vartheta_1^{(2)}. \end{aligned}$$

Заметим, что система (2.4) верна только в случае  $\tilde{\Delta} \neq 0$ . В этом случае, введя функции

$$\varphi_j(x) = \sigma(x) + \lambda_j^* \tau(x); \quad (\lambda_j^* = (-1)^{j+1} \sqrt{\alpha/\beta}; \quad j=1,2),$$

систему уравнений (2.4) представим в виде двух отдельных сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) + \frac{q_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds &= \frac{Q_0^*}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}; \\ (-a < x < a, \quad q_j &= (-1)^j \sqrt{\alpha\beta}, \quad j=1,2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

При этом,

$$\int_{-a}^a \varphi_j(x) dx = Q_0 \quad (j=1,2). \quad (2.6)$$

Сначала рассмотрим случай, когда  $q_j$  ( $j=1,2$ ) – действительные числа, т.е. когда  $\tilde{\Delta} > 0$ . Тогда можем записать

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1+q_j^2} \left[ g(x) - \frac{q_j X_j^+(x)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g(s) ds}{X_j^+(s)(s-x)} \right] + C_j X_j^+(x) \quad (2.7)$$

$$X_j(z) = (z+a)^{-\gamma_j} (z-a)^{\gamma_j-1}; \quad \gamma_j = \frac{1}{2\pi i} \ln |G_j| + \frac{\vartheta_j}{2\pi} = \frac{\vartheta_j}{2\pi};$$

$$0 < \vartheta_j = \arg G_j < 2\pi; \quad G_j = \frac{1-iq_j}{1+iq_j}; \quad |G_j| = 1; \quad g(x) = \frac{Q_0^*}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Удовлетворяя условию (2.6), найдем

$$C_j = -Q_0 \frac{\sin \pi \alpha_j}{\pi \sqrt{G_j}} \quad (j=1,2).$$

Определим нормальные и касательные составляющие скачков напряжений на включении. Имеем

$$\sigma(x) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{2}; \quad \tau(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{2\lambda^*}$$

Подставляя сюда значения функций  $\varphi_j(x)$  ( $j=1,2$ ) из (2.7) и учитывая, что

$$\frac{X_1^+(x)}{X_1^+(s)} = \frac{\omega(x)}{\omega(s)}; \quad \frac{X_2^+(x)}{X_2^+(s)} = \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)}; \quad q_j = (-1)^j q; \quad q = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \bar{G}_2 = G_1;$$

$$\vartheta_2 = 2\pi - \vartheta_1; \quad \gamma_2 = 1 - \gamma_1; \quad \omega(x) = (a+x)^{-\gamma_1} (a-x)^{\gamma_1-1};$$

получим

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+q^2} \left\{ \frac{2Q_0^*}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{Q_0^*}{2\pi^2} \int_{-a}^a \left[ \frac{\omega(x)}{\omega(s)} - \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)} \right] \frac{(a^2-s^2)^{-1/2} ds}{(s-x)} \right\} + \quad (2.8)$$

$$+ \frac{Q_0 \sin \pi\gamma_1}{\pi} [\omega(x) + \omega(-x)];$$

$$\tau(x) = \frac{qQ_0^*}{2\pi^2\lambda^*(1+q^2)} \int_{-a}^a \left[ \frac{\omega(x)}{\omega(s)} + \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)} \right] \frac{ds}{\sqrt{a^2-s^2}(s-x)} + \quad (2.9)$$

$$+ \frac{Q_0 \sin \pi\gamma_1}{\pi} [\omega(x) - \omega(-x)].$$

Используя значение интеграла [8]

$$\int_a^b \left( \frac{x-a}{b-x} \right)^{\alpha-1} \frac{dx}{x-y} = \frac{-\pi}{\sin \pi\alpha} \left[ \cos \pi\alpha \left( \frac{y-a}{b-y} \right)^{\alpha-1} + 1 \right], \quad (0 < \operatorname{Re} \alpha < 2, \quad a < y < b)$$

окончательно получим

$$\sigma(x) = \frac{K_I}{\sqrt{a^2-x^2}} + K_{II} [\omega(x) + \omega(-x)]; \quad (2.10)$$

$$\tau(x) = K_{III} [\omega(x) - \omega(-x)]; \quad (2.11)$$

$$K_I = \frac{Q_0^*}{\pi(1+q^2)} [1 + q \operatorname{tg} \pi\gamma_1]; \quad K_{II} = -\frac{Q_0^*}{2\pi} \left[ \frac{\tilde{\Delta} \sin \pi\gamma_1}{l_0} + \frac{q}{(1+q^2)\tilde{\Delta} \cos \pi\gamma_1} \right];$$

$$K_{III} = -\frac{Q_0^*}{2\lambda^* \pi} \left[ \frac{\tilde{\Delta} \sin \pi\gamma_1}{l_0} + \frac{q}{(1+q^2)\tilde{\Delta} \cos \pi\gamma_1} \right].$$

Теперь определим последнюю неизвестную функцию  $U(x)$ . Из (2.2) для производной этой функции получим

$$U'(x) = -\frac{1}{2\mathfrak{G}_1^{(2)}} \sigma(x) + \frac{Q_0}{2\mathfrak{G}_1^{(2)} \pi \sqrt{a^2-x^2}} \quad (2.12)$$

Отсюда, интегрируя (2.12) по  $x$  от  $-a$  до  $x$ , учитывая (2.10) и значение интеграла [8]

$$\omega_1(x) = \int_{-a}^x (x+a)^{-\gamma} (a-x)^{\gamma-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\gamma+1)}{k+1-\gamma} \left( \frac{a+x}{2} \right)^{k+1-\gamma}; \quad (|x| < a)$$

получим

$$U(x) = \frac{1}{2\mathfrak{G}_1^{(2)}} \left\{ \left[ \frac{Q_0}{\pi} - K_I \right] \arcsin \frac{x}{a} + K_{II} [\omega_1(x) - \omega_1(-x)] \right\}; \quad (2.13)$$

Таким образом, определены все искомые функции, с помощью которых, используя вышеполученные формулы, можно полностью определить напряженно-деформированное состояние составной плоскости.

Теперь рассмотрим случай  $\tilde{\Delta} < 0$ , т.е. когда числа  $q_j$  ( $j=1,2$ ) чисто мнимые. В этом случае решение уравнений (2.5) также будет даваться формулой (2.7). Однако в этом случае

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2} - i\beta_1, & \gamma_2 &= \frac{1}{2} + i\beta_1, & q_j &= (-1)^j iq; \\ q &= \sqrt{-\alpha\beta}; & \beta_1 &= \frac{1}{2\pi} \ln|G_1|; & G_1 &= \frac{1-q}{1+q} < 0 \end{aligned}$$

Последнее означает, что в рассматриваемом случае функции  $\varphi_j(x)$  ( $j=1,2$ ) имеют корневую особенность с осцилляцией. Заметим, что полученные выражения для скачков напряжений (2.10), (2.11) и смещений (2.13) остаются в силе. Что же касается случая  $\tilde{\Delta} = 0$ , который совпадает со случаем  $\alpha = -1$  работы [5], то в этом случае, подставляя значение  $\sigma(x)$  из (2.2) в первые два уравнения (2.1), получим

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(\xi)d\xi}{\xi-x} = -\frac{Q_0'}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \\ \tau(x) - \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi-x} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Из первого уравнения (2.14), при помощи второго условия из (1.4), находим

$$\tau(x) = \frac{Q_0' \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}{\pi^2 \sqrt{a^2-x^2}} \quad (-a < x < a). \quad (Q_0' = l_0 / 2\vartheta_1^{(2)} d_1) \quad (2.15)$$

Подставляя значение функции  $\tau(x)$  из (2.15) во второе уравнение (2.14), получим сингулярное интегральное уравнение первого рода для определения функции  $\sigma(x)$ . Решение этого уравнения, удовлетворяющее первому из условий (1.4), дается формулой:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \left\{ \frac{Q_0'}{2\pi^2\beta} \ln^2\left(\frac{a-x}{a+x}\right) - A \right\} \quad (-a < x < a). \\ &\quad (A = Q_0' / 3\beta - Q_0) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Производная же от функции скачков горизонтальных смещений дается формулой

$$U'(x) = Q_0' \left[ \frac{1}{2\pi^2} \ln^2\left(\frac{a-x}{a+x}\right) - \frac{1}{3} \right] / 2\pi\vartheta_1^{(2)}\beta\sqrt{a^2-x^2} \quad (-a < x < a) \quad (2.17)$$

3. Теперь перейдем к решению системы уравнений (1.3) при условиях (1.4) в случае, когда  $\tilde{\Delta} \neq 0$ . С этой целью введем новые искомые функции по формулам:

$$\begin{aligned} \psi_j(x) &= \frac{d_0}{\Delta_*} \sigma(x) - \frac{l_0}{\Delta_*} U'(x) + \frac{\mu_j^* d_1}{\Delta_*} \tau(x) \quad (j=1,2); \\ \psi_3(x) &= \frac{\vartheta_2^{(1)}}{\Delta_*} \sigma(x) + \frac{2\vartheta_1^{(2)}\vartheta_2^{(1)}}{\Delta_*} U'(x); \quad \left( \mu_j^* = (-1)^{j+1} \sqrt{\tilde{\Delta} / 2d_1\vartheta_2^{(2)}} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда, после некоторых несложных преобразований, систему (1.3) можно привести к виду:

$$\begin{cases} -\pi i \operatorname{th}(\pi \mu'_j) \psi_j^*(t) + \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^*(\tau)}{\tau-t} d\tau + \sum_{n=1}^3 \int_{-1}^1 R_{nj}^*(t-\tau) \psi_n^*(\tau) d\tau = Q_j^*(t) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_3^*(\tau)}{\tau-t} d\tau + \sum_{n=1}^3 \int_{-1}^1 R_{n3}^*(t-\tau) \psi_n^*(\tau) d\tau = Q_3^*(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

$(j=1,2; -1 < t < 1)$

При этом условия (1.4) примут вид:

$$\int_{-1}^1 \psi_j^*(x) dx = P_j \quad (j=1,2,3); \quad \left( P_1 = P_2 = \frac{d_0 Q_0}{a \Delta_*}; \quad P_3 = \frac{\mathfrak{G}_2^{(1)} Q_0}{a \Delta_*} \right). \quad (3.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_{nj}^*(x) &= (-1)^{n+1} \frac{a\pi}{q_j} [R_{n1}(ax) + a_j R_{n2}(ax) + b_j R_{n3}(ax)]; \\ R_{n1}(x) &= \frac{\Delta_*}{\tilde{\Delta}} \left[ \mathfrak{G}_1^{(2)} K_{n1}^*(x) + \frac{\tilde{\Delta}}{2\mu_1^* d_1} K_{n2}^*(x) - \frac{1}{2} K_{n3}^*(x) \right]; \\ R_{n2}(x) &= \frac{\Delta_*}{\tilde{\Delta}} \left[ \mathfrak{G}_1^{(2)} K_{n1}^*(x) - \frac{\tilde{\Delta}}{2\mu_1^* d_1} K_{n2}^*(x) - \frac{1}{2} K_{n3}^*(x) \right]; \quad (j=1,2; n=1-3); \\ R_{n3}(x) &= \frac{\Delta_*}{\tilde{\Delta}} \left[ \frac{l_0}{\mathfrak{G}_2^{(1)}} K_{n1}^*(x) - \frac{1}{2} K_{n3}^*(x) \right]; \quad Q_j^*(x) = \frac{a\pi}{q_j} [-F_1(x) + a_j F_2(x) - b_j F_3(x)]; \\ R_{n3}^*(x) &= -\frac{2}{\Delta_*} [l_0 R_{2n}(ax) + d_0 R_{3n}(ax)]; \quad Q_3^*(x) = \frac{2}{\Delta_*} [l_0 F_2(x) + d_0 F_3(x)]; \\ a_j &= \alpha^* \mu_j^* d_1 / (\alpha^* d_0 + \beta^* l_0); \quad b_j = \beta^* \mu_j^* d_1 / (\alpha^* d_0 + \beta^* l_0), \end{aligned}$$

а постоянная  $\mu'_j$  ( $j=1,2$ ) определяется из условия  $\operatorname{th} \mu'_j \pi = i q_j^{-1}$ . Используя результаты работы [9], решения системы (3.2) представим в виде разложений:

$$\psi_j^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k^{(j)} P_k^{(j, \sigma_j)}(x)}{\omega_j(x)}; \quad (\omega_j(x) = (1-x)^{-j_j} (1+x)^{-\sigma_j}) \quad (3.4)$$

$$\psi_3^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k^{(3)} T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\gamma_j = -\frac{1}{2} - i\mu'_j; \quad \sigma_j = -\frac{1}{2} + i\mu'_j; \quad j=1,2) \quad (3.5)$$

где  $P_k^{(j, \sigma_j)}(x)$  ( $j=1,2; k=0,1,2,\dots$ ) – многочлены Якоби,  $T_k(x)$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) – многочлен Чебышева первого рода, а постоянные  $X_k^{(j)}$  ( $j=1,2,3; k=0,1,2,\dots$ ) – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Для коэффициентов  $X_0^{(j)}$  ( $j=1,2,3$ ) из (3.3) сразу находим

$$X_0^{(j)} = \frac{P_j \operatorname{ch}(\pi \mu'_j)}{\pi} \quad (j=1,2); \quad X_0^{(3)} = \frac{P_3}{\pi}. \quad (3.6)$$

Далее, подставляя значения функций  $\psi_j(x)$  ( $j=1,2,3$ ) из (3.4) и (3.5) в (3.2) по обычной процедуре [9], для определения коэффициентов

$X_k^{(j)}$  ( $j=1,2,3; k=1,2,\dots$ ) получим следующую систему из трех систем бесконечных алгебраических уравнений:

$$X_m^{(j)} = h_m^{(j)} \left[ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}^{(j,n)} X_k^{(n)} + C_m^{(j)} \right] \quad (j=1,2,3; m=1,2,\dots) \quad (3.7)$$

$$h_m^{(j)} = [m!]^2 \operatorname{ch} \pi \mu'_j / 2\pi \Gamma(m-j_j) \Gamma(m-\sigma_j) \quad (j=1,2); \quad h_m^{(3)} = 1.$$

$$A_{mk}^{(j,n)} = \int_{-1}^1 P_{m-1}^{(-j_j, -\sigma_j)}(x) \omega_j(x) dx \int_{-1}^1 R_{nj}^*(x-s) \frac{P_k^{(j_n, \sigma_n)}(s)}{\omega_n(s)} ds; \quad (j, n=1,2)$$

$$A_{mk}^{(j,3)} = \int_{-1}^1 P_{m-1}^{(-j_j, -\sigma_j)}(x) \omega_j(x) dx \int_{-1}^1 R_{3j}^*(x-s) \frac{T_k(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds; \quad (j=1,2)$$

$$A_{mk}^{(3,n)} = \int_{-1}^1 U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} dx \int_{-1}^1 R_{n3}^*(x-s) \frac{P_k^{(j_n, \sigma_n)}(s)}{\omega_n(s)} ds; \quad (n=1,2)$$

$$A_{mk}^{(3,3)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} dx \int_{-1}^1 R_{33}^*(x-s) \frac{T_k(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds;$$

$$C_m^{(j)} = \int_{-1}^1 Q_j^*(x) P_{m-1}^{(-j_j, -\sigma_j)}(x) \omega_j(x) dx - \sum_{n=1}^3 X_0^{(n)} A_{m0}^{(j,n)}; \quad (j=1,2)$$

$$C_m^{(3)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 Q_3^*(x) U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} dx - \sum_{n=1}^3 X_0^{(n)} A_{m0}^{(3,n)}.$$

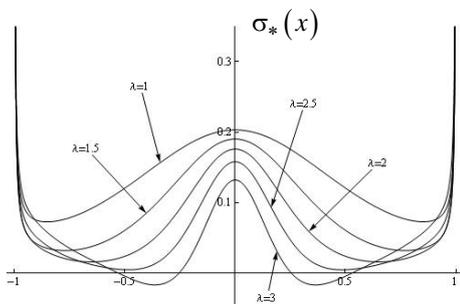
Нетрудно доказать, что система (3.7) квазивполне регулярна [9], т.е. коэффициенты разложения искомых функций, следовательно, и сами искомые функции определяются из (3.7) единственным образом. После нахождения этих функций скачки напряжений и производная скачка горизонтальных смещений определяются по формулам:

$$\sigma(x) = \frac{\mathfrak{G}_1^{(2)} \tilde{\Delta}_*}{\tilde{\Delta}} [\psi_1(x) + \psi_2(x) - \nu_0 \psi_3(x)]; \quad \tau(x) = \frac{\Delta_*}{2\mu_1 d_1} [\psi_1(x) - \psi_2(x)];$$

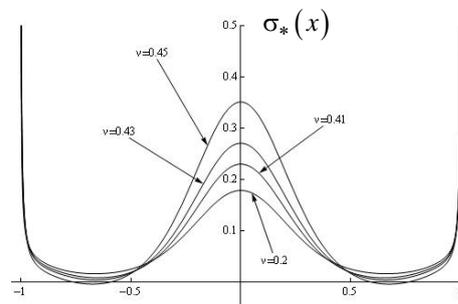
$$U'(x) = -\frac{\Delta_*}{2\tilde{\Delta}} \left[ \psi_1(x) + \psi_2(x) - \frac{2d_0}{\mathfrak{G}_2^{(1)}} \psi_3(x) \right]; \quad (\nu_0 = -l_0 / \mathfrak{G}_1^{(2)} \mathfrak{G}_2^{(1)}).$$

Таким образом, решение поставленной задачи в случае  $\tilde{\Delta} \neq 0$  методом ортогональных многочленов свелось к решению квазивполне регулярной системы бесконечных алгебраических уравнений. В случае же  $\tilde{\Delta} = 0$  метод ортогональных многочленов не может привести к желаемому результату, так как на этот раз искомые функции помимо степенной особенности имеют также логарифмическую особенность. В конце приведем графики приведенного контактного давления  $\sigma_*(x) = -\sigma_y^{(1)}(x/a)/E$  в зоне гладкого контакта в случае, когда полоса и полуплоскость изготовлены из одного и того же материала и на свободную границу составной полуплоскости действует сосредоточенная сила величиной  $P_0$ , т.е.  $P_0(x) = P_0 \delta(x)$ . На фиг.2 приведены графики приведенного контактного давления в зависимости от изменения параметра  $\lambda = a/h$ , когда коэффициент Пуассона  $\nu$  материала равен

0.3, а  $P_0 / E = 0.1$  ( $E$  – модуль Юнга). Нетрудно заметить, что при увеличении параметра  $\lambda$  в зоне контакта возникают участки растягивающих напряжений, что может привести к отрыву включения от матрицы.



Фиг.2



Фиг.3

На фиг.3 приведены графики приведенного контактного давления в зависимости от изменения коэффициента Пуассона, когда  $\lambda = 2$ . Как явствует из приведенных графиков, при приближении коэффициента Пуассона к  $1/2$  в центральной части контактной зоны давление увеличивается, а в остальных частях уменьшается так, что опять возникает опасность отрыва.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344с.
2. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Сташук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наукова думка, 1983. 288с.
3. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. //Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №4. С.57-65.
4. Акопян В.Н., Саакян А.В. Напряженное состояние однородной упругой плоскости, содержащей накрест лежащие трещины, при смешанных граничных условиях на берегах трещин // Изв. РАН. МТТ. 1999. №3. С.106-113.
5. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жестком межфазном включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. //Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.
6. Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жесткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве. /В сб. трудов Международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, Ереван, 2007. С. 45-50.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с.
9. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1972. Т.25. №2. С.15-35.

#### Сведения об авторах:

**Акопян Ваграм Наслетникович** – доктор физико-математических наук,  
Директор Института механики НАН РА.  
Тел.: (37410)52-48-90; E-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

**Саркисян Арман Оганесович** – соискатель Института механики НАН РА

Поступила в редакцию 15.04.2010