

УДК 539.3

ИЗГИБ ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ БАЛОК НА КРАЕ УПРУГОЙ  
ПОЛУПЛОСКОСТИ ПЛОСКИМ ШТАМПОМ  
АГАЯН К.Л.

**Ключевые слова:** полубесконечная балка, штамп, обобщённые функции, интегральные уравнения.

**Key words:** semi-infinite beam, punch, generalized functions, integral equations.

Աղայան Կ.Լ.

Ստաձգական կիսահարթության եզրում երկու կիսաանվերջ հեծանների ծռումը հարթ դրոշմով

Աշխատանքում դիտարկվում է կիսահարթության եզրում ազատ հենված երկու կիսաանվերջ ձողերի (սալերի – գլանային ծռման պայմաններում) ծռման կոնտակտային խնդիրը: Մոտան իրականացվում է, ձողերի նկատմամբ համաչափ դասավորված հարթ հիմքով դրոշմով: Խնդրի լուծումը բերվում է երկու ինտեգրալ հավասարումների համակարգի–դրոշմի տակ նորմալ կոնտակտային լարման (անընդհատ կորիզով Ֆրեդհոլմի II սեռի հավասարում) և ձողերի միջև կիսահարթության եզրագծի դեֆորմացիայի (Կոշու կորիզով սինգուլյար հավասարում) նկատմամբ: Վերջիններիս լուծումները բերվում է քվադրի լիովին ռեգուլյար գծային անվերջ համակարգի: Ցույց է տրվում, որ դրոշմի ծայրակետերում առաջանում են կենտրոնացված ուժ և մոմենտ:

Aghayan K.L.

The bending of two semi-infinite beams on the edge of elastic half-plane with flat punch

The contact problem of bending of two semi-infinite beams (plates in the condition of cylindrical bending) free lying on the border of elastic half-plane is considered. The bending is carrying out by symmetrically located, with regard to beams, rigid, smooth punch with plane foundation in the framework of classical theory of beam bending. The problem solution is brought to the system of two integral equations concerning contact stresses under the punch (Fredholm equation of II type with continuous kernel) and deformation of boundary points of half-plane between beams (singular equation with Cauchy kernel). The solution of given equations are brought to quasicomplete regular infinite system of linear algebraic equations. It is shown that in the boundary points of punch the concentrated force and concentrated moment are appeared.

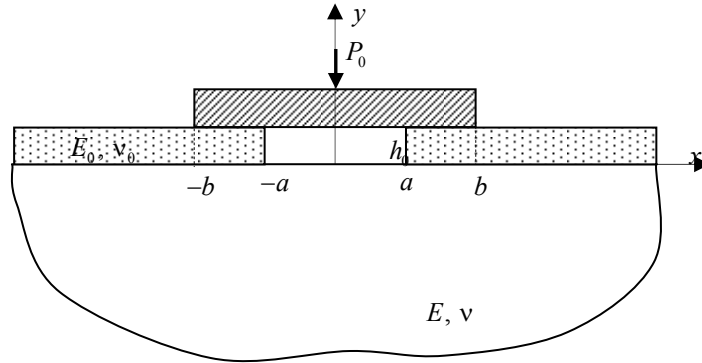
Рассматривается контактная задача об изгибе двух полубесконечных балок, свободно лежащих на границе упругой полуплоскости. Изгиб осуществляется симметрично расположенным относительно балок жестким, гладким штампом с плоским основанием в рамках классической теории изгиба балок. Решение задачи сведено к системе из двух интегральных уравнений относительно контактных напряжений под штампом (Фредгольмовское уравнение II рода с непрерывным ядром) и деформации граничных точек полуплоскости между балок (сингулярное уравнение с ядром Коши). Решение последних уравнений сведено к квазиполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Показано, что в крайних точках штампа возникают сосредоточенная сила и сосредоточенный момент.

В работе исследуется контактная задача об изгибе двух полубесконечных балок (пластин в условиях цилиндрического изгиба), свободно лежащих на границе упругой полуплоскости. Изгиб осуществляется симметрично расположенным относительно балок жестким гладким штампом с плоским основанием в рамках классической теории изгиба балок.

Контактные задачи о взаимодействии балок и пластин с линейно-деформированными основаниями тесно связаны с расчетами на прочность многих инженерных конструкций и их деталей. Этим и объясняется потребность более точного определения контактных напряжений в каждой конкретной задаче в этой области. Существуют многочисленные работы и монографии, посвященные исследованиям

вопросов о контактных взаимодействиях тонкостенных элементов в виде балок, плит и оболочек, лежащих на упругих основаниях с различными геометрическими формами, описываемыми разнообразными физическими моделями. Из этих работ отметим лишь [1-5], в которых исследованы задачи о контакте жесткого штампа с пластиной, лежащей на упругом основании и, тем самым, связаны с рассматриваемой здесь задачей.

1. Пусть на границе упругой полуплоскости свободно лежат две одинаковые полубесконечные балки (пластины при цилиндрическом изгибе). Пусть далее, на балки под действием вертикальной силы  $P_0$  прижимается, симметрично расположенный относительно балок, гладкий жесткий штамп с плоским основанием (фиг.1). Предполагается, что под штампом ( $x \in (-b, -a) \cup (a, b)$ ) и на полубесконечных контактных участках балок с полуплоскостью ( $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ ) возникают только нормальные напряжения (касательные напряжения отсутствуют). Требуется определить эти нормальные контактные напряжения, принимая при этом двухстороннюю связь между балками и краями полуплоскости.



Фиг. 1

Обозначим через  $p(x)$  и  $q(x)$  соответственно, интенсивности неизвестных нормальных давлений под штампом и под полубесконечными балками и введем функции

$$P(x) = P^{(-)}(x) + P^{(+)}(x), \quad P^{(\pm)}(x) = [\mathfrak{G}(\pm x - a) - \mathfrak{G}(\pm x - b)]p(x)$$

$$N(x) = q^{(-a)}(x) + q^{(+a)}(x), \quad q^{(\pm a)}(x) = \mathfrak{G}(\pm x - a)q(x) \quad (1.1)$$

$$q^{(\pm b)}(x) = \mathfrak{G}(\pm x - b)q(x), \quad q^{(\pm)}(x) = q^{(\pm a)}(x) - q^{(\pm b)}(x)$$

$$W(x) = W^{(-)}(x) + W^{(+)}(x), \quad W^{(\pm)}(x) = \mathfrak{G}(\pm x - b) \frac{dw}{dx}, \quad (1.2)$$

где  $w(x)$  – прогиб балки,  $\mathfrak{G}(x)$  – функция Хевисайда.

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси балок запишется в следующем едином виде:

$$D_0 \frac{d^3 W}{dx^3} = N(x) - P(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (1.3)$$

где  $D_0 = E_0 J_0$  – жесткость балки на изгиб,  $E_0$  – её модуль упругости,  $J_0$  – момент инерции. При цилиндрическом изгибе пластинки  $D_0 = E_0 h_0 / 12(1 - \nu_0^2)$  ( $h_0$  – толщина пластины,  $\nu_0$  – её коэффициент Пуассона).

Граничные условия при (1.3) будут:

$$W|_{x=\pm a\pm 0} = W'|_{x=\pm a\pm 0} = W''|_{x=\pm a\pm 0} = 0, \quad W \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Применив к (1.2) операцию дифференцирования в смысле теории обобщенных функций, имея при этом условия (1.4) и (1.1), получим:

$$D_0 \frac{d^3 W}{dx^3} = Q_b [\delta(x-b) + \delta(x+b)] + M_b [\delta(x+b) - \delta(x-b)] + q^{(-b)}(x) + q^{(b)}(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (1.5)$$

где  $Q_b$  и  $M_b$  – значения перерезывающей силы и изгибающего момента в точках  $x = \pm b$  балки:

$$Q_b = D_0 \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=b+0} = -D_0 \frac{d^2 W}{dx^2} \Big|_{x=-b-0}, \quad M_b = D_0 \frac{dW}{dx} \Big|_{x=b+0} = D_0 \frac{dW}{dx} \Big|_{x=-b-0} \quad (1.6)$$

Отметим, что при получении (1.5) было учтено также условие

$$W|_{x=\pm b} = 0. \quad (1.7)$$

Сопоставляя теперь (1.5) и (1.3), получим

$$p(x) = q^{(+)}(x) + q^{(-)}(x) - Q_b [\delta(x-b) + \delta(x+b)] + M_b [\delta(x+b) - \delta(x-b)], \quad (1.8)$$

которое указывает, что в граничных точках под штампом  $x = \pm b$  могут возникнуть сосредоточенная сила  $Q_b$  и сосредоточенный момент  $M_b$ . При этом, из (1.8) следует, что контактное давление под штампом складывается из давления  $q(x)$  ( $x \in (-b, -a) \cup (a, b)$ ) под балкой, сосредоточенных сил  $Q_b$  и сосредоточенных моментов  $M_b$ , приложенных в граничных точках штампа [1,2].

Таким образом, имея  $q(x)$ ,  $Q_b$ ,  $M_b$ , неизвестное напряжение под штампом  $p(x)$  можно определить из (1.8).

Обратимся теперь к контактным условиям. Для граничных точек полуплоскости в случае плоской деформации имеем [6]:

$$V(x) = -\frac{dv(x,0)}{dx} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(s)ds}{s-x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.9)$$

где  $v(x,0)$  – вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости,  $E$  – модуль упругости полуплоскости,  $\nu$  – ее коэффициент Пуассона.

Условие контакта между граничными точками полуплоскости и балок теперь запишется в виде:

$$V(x) = W(x) + g(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.10)$$

где  $V(x)$  дается (1.9),  $W(x)$  – (1.2), а

$$g(x) = [\vartheta(x+a) - \vartheta(x-a)]V(x) \quad (1.11)$$

Применив теперь к (1.5), (1.9) и (1.10) действительное преобразование Фурье, получим:

$$D_0 (-i\sigma)^3 \bar{W}(\sigma) = 2M_b \sigma \sin(b\sigma) + 2Q_b \cos(b\sigma) - \bar{q}^{(-b)}(\sigma) - \bar{q}^{(b)}(\sigma) \quad (1.12)$$

$$\bar{V}(\sigma) = -2(1-\nu^2) E^{-1} i \operatorname{sgn} \sigma (\bar{q}^{(-a)}(\sigma) + \bar{q}^{(a)}(\sigma)) \quad (1.13)$$

$$\bar{V}(\sigma) = \bar{W}(\sigma) + \bar{g}(\sigma) \quad (1.14)$$

где  $\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx$ ,  $-\infty < \sigma < \infty$ .

Подставляя (1.12) и (1.13) в (1.14), получим

$$\begin{aligned} (\lambda + |\sigma|^3) [\bar{q}^{(-a)}(\sigma) + \bar{q}^{(a)}(\sigma)] &= 2\lambda [Q_b \cos(b\sigma) + M_b \sigma \sin(b\sigma)] + \\ + \lambda [\bar{q}^{(-)}(\sigma) + \bar{q}^{(+)}(\sigma)] + i\lambda^* \sigma^3 \bar{g}(\sigma), & \quad (1.15) \\ \bar{q}^{(\pm a)}(\sigma) &= \bar{q}^{(\pm b)}(\sigma) + \bar{q}^{(\pm)}(\sigma). \end{aligned}$$

Отметим, что при цилиндрическом изгибе пластинок

$$\lambda = 6E(1 - \nu_0^2) / E_0 h_0^3 (1 - \nu^2); \quad \lambda^* = E/2(1 - \nu^2). \quad (1.16)$$

Применив к (1.15) обратное преобразование Фурье и имея в виду (1.11), после некоторых выкладок приходим к уравнению

$$\begin{aligned} q^{(-a)}(x) + q^{(a)}(x) &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [q^{(-)}(s) + q^{(+)}(s)] K_c(x-s) ds - \\ - \frac{\lambda^*}{\pi} \int_{-a}^a \left[ \frac{1}{s-x} + K_s(s-x) \right] g(s) ds + \lambda M_b [K'_c(x+b) - K'_c(x-b)] + & \quad (1.17) \\ + \lambda Q_b [K_c(x-b) + K_c(x+b)], & \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

$$K_c(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\sigma x) d\sigma}{\lambda + |\sigma|^3}, \quad K_s(x) = -\lambda \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sigma x) d\sigma}{\lambda + |\sigma|^3} \quad (1.18)$$

Имея в виду чётность контактных напряжений ( $q(x) = q(-x)$ ) и тот факт, что при  $x \in (a, b)$   $q^{(a)}(x) = q^{(+)}(x)$  из (1.17), приходим к следующему интегральному уравнению Фредгольма II рода относительно контактных напряжений  $q^{(+)}(x)$ :

$$\begin{aligned} q^{(+)}(x) &= \lambda \int_a^b R(x, s) q^{(+)}(s) ds - \frac{\lambda^*}{\pi} \int_{-a}^a \left[ \frac{1}{t-x} + K(t, x) \right] g(t) dt + \\ + \lambda M_b f_2(x) + \lambda Q_b f_1(x), & \quad a < x < b \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} R(x, s) &= K_c(x-s) + K_c(x+s); \quad K(t, x) = K_s(t-x), \\ f_1(x) &= R(x, b), \quad f_2(x) = K'_c(x-b) - K'_c(x+b). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Предполагая теперь, что  $x \in (-a, a)$ , где  $q^{(-a)}(x) = q^{(a)}(x) \equiv 0$ , то опять из (1.17) получим сингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b R(x, s) q^{(+)}(s) ds - \frac{\lambda^*}{\pi} \int_{-a}^a \left[ \frac{1}{t-x} + K(t, x) \right] g(s) ds + \\ + \lambda Q_b f_1(x) + \lambda M_b f_2(x) = 0, & \quad -a < x < a \end{aligned} \quad (1.21)$$

где  $R(x, s)$ ,  $K(t, x)$ ,  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  даются формулами (1.20).

К уравнениям (1.19) и (1.2) следует присоединить условия, вытекающие из равновесия штампа и полубесконечной балки:

$$2Q_b = P_0 - 2 \int_a^b q^{(+)}(x) dx, \quad M_b = \int_b^\infty (x-b) q^{(b)}(x) dx \quad (1.22)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы интегральных уравнений (1.19) (уравнение Фредгольма II рода) и (1.21) (сингулярное уравнение с ядром Коши) с условиями (1.22).

После определения из (1.19) и (1.21)  $q^+(x)$  и  $g(x)$ , контактные напряжения  $q^{(b)}(x)$  будут даваться по формуле (1.17), принимая там  $x \in (+b, \infty)$ .

2. Приступим к решению системы (1.19)–(1.22).

При помощи замены переменных

$$x = \alpha x_1 + a, \quad t = at_1, \quad \alpha = (b-a)/\pi \quad (2.1)$$

приведем их к виду (индексы при  $x_1$  и  $t_1$  опускаем)

$$q_1(x) - \lambda \alpha \int_0^\pi R_1(x, s) q_1(s) ds + \frac{\lambda^*}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{t - \alpha x - 1} + aK_1(t, x) \right] \times \\ \times g_1(t) dt = F_1(x), \quad 0 < x < \pi \quad (2.2)$$

$$\lambda \alpha \int_0^\pi R_2(x, s) q_1(s) ds + \frac{\lambda^*}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{t - x} + aK_2(t, x) \right] \times \\ \times g_1(t) dt = F_2(x), \quad -1 < x < 1 \quad (2.3)$$

где  $q_1(x) = q^{(+)}(\alpha x + a)$ ,  $g_1(t) = g(at)$

$$R_1(x, s) = R(\alpha x + a, \alpha s + a), \quad K_1(t, x) = K(\alpha t, \alpha x + a)$$

$$R_2(x, s) = R(\alpha x, \alpha s + a), \quad K_2(t, x) = K(at, \alpha x) \quad (2.4)$$

$$F_1(x) = \lambda Q_b f_1(\alpha x + a) + \lambda M_b f_2(\alpha x + a), \quad F_2(x) = \lambda Q_b f_1(\alpha x) + \lambda M_b f_2(\alpha x)$$

Имея в виду [7,8]

$$q^{(+)}(x) \sim (x-a)^{-1/2} \text{ при } x \rightarrow a+0, \quad V(x) \sim (a^2 - x^2)^{-1/2} \text{ при } x \rightarrow \pm a \mp 0, \quad (2.5)$$

решения (2.2) и (2.3) ищем в виде разложений

$$q_1(x) = A_0 x^{-1/2} + a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon_1} a_n \cos nx, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1/2 \quad (2.6)$$

$$g_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon_2} b_n (1-t^2)^{-1/2} T_{2n-1}(t), \quad -1 < t < 1, \quad 0 < \varepsilon_2 < 1/2 \quad (2.7)$$

где  $A_0, B_0, \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, а  $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) – многочлены Чебышева II рода.

Правая часть  $F_1(x)$  уравнения (2.2) непрерывна на отрезке  $[0, \pi]$ . Тогда, подставляя (2.6) и (2.7) в уравнение (2.2) и имея в виду значение интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s)}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} ds = (-1)^{n+1} \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)^n}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.8)$$

получим

$$A_0 = \lambda^* \sqrt{a/2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon_2} b_n. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.6) и (2.7) в (2.2) и (2.3) по обычной процедуре, для определения неизвестных коэффициентов  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  и  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  получим следующую систему бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$a_k + \sum_{n=0}^{\infty} R_{kn}^{(11)} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} R_{kn}^{(12)} b_n = c_k^{(1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

$$b^k + \sum_{n=1}^{\infty} R_{kn}^{(21)} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} R_{kn}^{(22)} b_n = c_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$R_{kn}^{(11)} = \frac{\lambda \alpha}{\pi} \frac{\delta_{on} - 2}{\rho_k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \int_0^{\pi} R_1(x, s) \cos ns ds$$

$$R_{kn}^{(12)} = \frac{2\lambda^*}{\pi} \frac{1}{n^{\varepsilon_2} \rho_k} \int_0^{\pi} \left[ \sqrt{(\alpha_1 x + 1)^2 - 1} - \alpha_1 x - 1 \right]^{2n} \cos kx dx +$$

$$+ \frac{2\lambda^* a}{\pi^2} \frac{1}{n^{\varepsilon_2} \rho_k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \int_{-1}^1 K_1(t, x) (1-t^2)^{-1/2} T_{2n-1}(t) dt \quad (2.11)$$

$$R_{kn}^{(21)} = \frac{\alpha \lambda}{\lambda^* \rho_k} (\delta_{on} - 2) k^{\varepsilon_2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2n-2}(x) dx \int_0^{\pi} R_2(x, s) \cos ns ds$$

$$R_{kn}^{(22)} = -2a \frac{k^{\varepsilon_2}}{n^{\varepsilon_2}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2n-2}(x) dx \int_{-1}^1 K_2(t, x) (1-t^2)^{-1/2} T_{2n-1}(t) dt$$

$$c_k^{(1)} = \frac{2}{\pi \rho_k} \int_0^{\pi} \left[ F_1(x) - \frac{A_0}{\sqrt{x}} - 2a\lambda A_0 \int_0^{\pi} \frac{R_1(x, s)}{\sqrt{s}} ds \right] \cos kx dx \quad k = \overline{0, \infty} \quad (2.12)$$

$$c_k^{(2)} = \frac{2k^{\varepsilon_2}}{\lambda^*} \int_{-1}^1 \left[ \lambda \alpha A_0 \int_0^{\pi} \frac{R_2(x, s)}{\sqrt{s}} ds - F_2(x) \right] \sqrt{1-x^2} U_{2n-2}(x) dx \quad k = \overline{1, \infty}$$

где  $\delta_{ik}$  – символ Кронеккера,

$U_{k-1}(x) = \sin(k \arccos x) / \sin(\arccos x)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) – многочлены Чебышева второго рода,

$$\alpha_1 = \alpha/a, \quad \rho_k = k^{\varepsilon_1} + \delta_{0k}. \quad (2.13)$$

Отметим, что при получении (2.10) была использована ортогональность функции  $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$  в  $(0, \pi)$  и  $\{U_{n-1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  в  $(-1, 1)$  с весом  $(1-x^2)^{1/2}$ , а также интегральное соотношение (2.8).

Для исследования бесконечных систем (2.10) на регулярность, представим первое слагаемое  $R_{kn}^{(12)}$  из (2.11) в виде

$$\left( R_{kn}^{(12)} \right)_1 = -\frac{2\lambda^* \beta^{b/a}}{\pi n^{\varepsilon_2}} \int_1^{b/a} \frac{\left( t - \sqrt{t^2 - 1} \right)^{2n-1} \cos k\beta(t-1)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt, \quad \beta = a/\alpha.$$

Тогда будем иметь:

$$\left| \left( R_{kn}^{(12)} \right)_1 \right| \leq \frac{2\lambda^* \beta}{\pi n^{\varepsilon_2}} \int_0^{\chi} e^{-(2n-1)s} ds = \frac{2\lambda^* \beta}{\pi(2n-1)n^{\varepsilon}} \left( 1 - e^{-(2n-1)\chi} \right), \quad \text{ch} \chi = \beta. \quad (2.14)$$

Остальные ядра из (2.10) можно исследовать известными [5,9] способами и, тем самым, убедиться, что бесконечная система (2.10), по крайней мере, квазивполне регулярна при всех значениях  $\lambda$  ( $0 < \lambda < \infty$ ).

Присоединяя к (2.10) условия (1.22), (1.23) и (2.9), получим замкнутую систему для определения неизвестных  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $Q_b$ ,  $M_b$  и  $A_0$ . Имея значения этих величин, контактное давление под штампом можно определить по формуле (1.8), а контактные напряжения под балками – (2.6) и (1.17).

При больших значениях  $|x|$ , из (1.15) получим асимптотическую формулу, представляющую распределение контактных напряжений под балками при  $|x| \rightarrow \infty$ :

$$q(x) = -\frac{6}{\pi\lambda} (2Q_b + T_0) x^{-4} + \frac{60}{\pi\lambda} (4\lambda b M_b - 2b^2 Q_b + T_2) x^{-6} + O(x^{-8}), \quad (2.15)$$

$$T_j = 2 \int_a^b s^j q^{(+)}(s) ds, \quad (j = 0, 2)$$

Из (2.15) следует, что при больших значениях  $|x|$  контактные напряжения становятся растягивающими. Из формулы (2.15) можно судить о скорости убывания контактных напряжений в зависимости от силовых факторов  $Q_b$ ,  $M_b$  и  $q^{(+)}(x)$ .

3. Коротко остановимся на частном случае задачи, когда  $a = 0$ , т.е. рассмотрим контактную задачу, когда бесконечная балка (пластина), лежащая на границе упругой полуплоскости, изгибается гладким плоским штампом. Решение задачи в этом случае, как следует из (1.19), сводится к интегральному уравнению

$$q(x) = \int_0^1 K(x, s) q(s) ds + \frac{Q_b}{b} f_Q(x) + \frac{M_b}{b^2} f_M(x) \quad (0 < x < 1) \quad (3.1)$$

$$K(x, s) = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\sigma x) \cos(\sigma s)}{\lambda + \sigma^3} d\sigma$$

$$f_Q(x) = K(x, 1), \quad f_M(x) = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma \sin(\sigma) \cos(\sigma x)}{\lambda + \sigma^3} d\sigma. \quad (3.2)$$

Постоянные  $Q_b$  и  $M_b$  определяются из (1.22) и имеют вид:

$$Q_b/P_0 = (1 + A_2 - B_2 + I_2^*) / (B_M (3 - A_1 - I_3^*)) + (2 + B_1)(1 + A_2 + I_2^*)$$

$$M_b/bP_0 = B_2 / (1 - (2 + B_1)Q_b/P_0)$$

$$A_j = \int_0^1 I_1^*(x) q_j(x) dx, \quad B_j = 2 \int_0^1 q_j(x) dx, \quad B_j \quad (j = 1, 2)$$

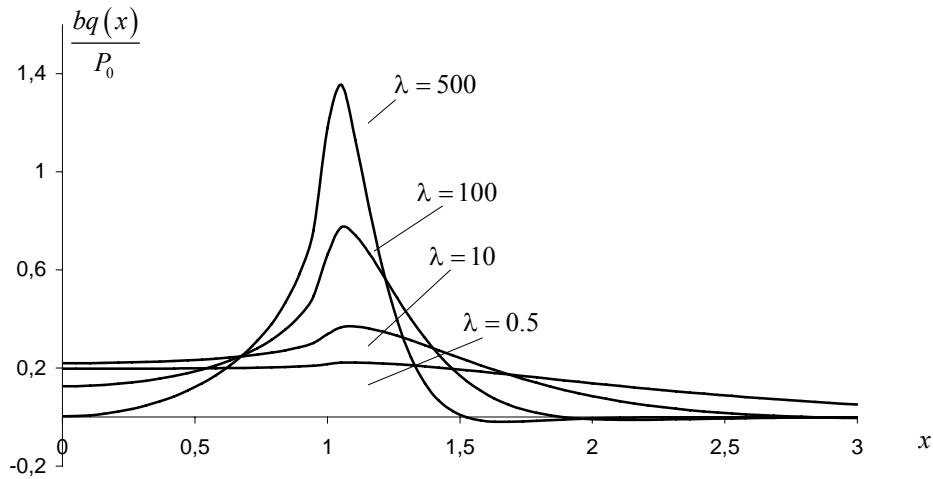
$$I_1^*(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma^2 \cos(\sigma) - \lambda \sin(\sigma)}{\sigma(\lambda + \sigma^3)} \cos(\sigma x) d\sigma$$

$$I_2^*(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 + \sin(2\sigma) - \sigma \cos(2\sigma)}{\lambda + \sigma^3} d\sigma$$

$$I_3^*(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{\sin(2\sigma)}{\sigma(\lambda + \sigma^3)} + \frac{6\sigma \cos^2(\sigma)}{(\lambda + \sigma^3)^2} \right] d\sigma$$

где  $q_1(x)$  – решение уравнения (3.1) при  $b^{-1}Q_b = 1$ ,  $M_a = 0$ , а  $q_2(x)$  – при  $Q_a = 0$ ,  $b^{-2}M_b = 1$ . Имея решение уравнения (3.1), контактные напряжения вне штампа опять определяются из (3.1), принимая там  $x \geq 1$ .

На фиг.2 приведены графики распределения контактных напряжений, а в таблице – значения постоянных  $Q_b$  и  $M_b$  для некоторых значений параметра  $\lambda$ .



Фиг.2

Таблица

| $\lambda$ | 0.5    | 1      | 5      | 10     | 30     | 100    | 500    |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $Q_b$     | 0.3232 | 0.2999 | 0.2674 | 0.2564 | 0.2584 | 0.2657 | 0.2763 |
| $M_b$     | 0.2283 | 0.1781 | 0.1226 | 0.0976 | 0.0755 | 0.0542 | 0.0331 |

Как можно заметить из таблицы, с увеличением параметра  $\lambda$ , т.е. с уменьшением жесткости пластины, величина  $Q_b$  сначала заметно убывает, а затем медленно возрастает, в то время как  $M_b$  монотонно убывает. Из графиков же непосредственно видно, что почти равномерное распределение контактного давления в зоне действия штампа приближается к „сосредоточенной” силе под краем штампа.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М. Некоторые контактные задачи для балок, пластин и оболочек. //Инж. ж. 1965. Т.5. №4. С.782-785.
2. Ефимов А.Б., Малый В.И., Толкачева Н.М. Контактная задача для упругого тела с тонким покрытием. //МТТ. 1969. №1. С.167-171.
3. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Контактная задача о вдавливании штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием. //ПММ. 1975. Т.39. Вып.5.
4. Александров В.М., Шленев М.А. Плоские задачи о вдавливании штампа в пластинку Рейснера, лежащую на основании Фусса–Винклера. / В кн.: Теория плит и оболочек. – Ростов–на–Дону. Изд. Ростовск. Инж.-строит. ин-та, 1972.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
6. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Л.: Гостехиздат, 1949.
7. Григорян Э.Х. Изгиб двух полубесконечных балок, лежащих на границе упругой полуплоскости. //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.20–30.
8. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №4. С.5–19.
9. Агаян К.Л. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками.// МТТ. 1972. №5. С.34-45.

### Сведения об авторе:

**Агаян Каро Леренцович** – канд. физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении,  
**Адрес:** 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24<sup>б</sup>  
**E-mail:** karo-aga@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 28.12.2009