

УДК 532.529.5: 532.591

**О ФОРМАХ НЕЛИНЕЙНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕРМИЧЕСКИ  
РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ  
ОГАНЯН Г.Г.**

**Ключевые слова:** газ, жидкость, волна, нелинейность, вязкость, межфазный теплообмен.

**Keywords:** gas, liquid, nonlinearity, viscosity, interfacial heat exchange

**Օհանյան Գ.Գ.**

**Գազահեղուկ խառնուրդում բարձր հաճախությամբ զրգրումների  
նչ գծային տարածման ձևերի մասին**

Ուսումնասիրված են պրոպագանդային գազի քվազիադիաբատիկ և քվազիիզոթերմիկ ռեժիմներում բարձր հաճախությամբ տարածվող ալիքների վարքը ոչ գծային դրվածքով: Դուրս են բերված այդպիսի ալիքային դինամիկա նկարագրող պարզեցված ոչ գծային հավասարումները, որոնց համար կառուցված են ճշգրիտ մասնավար լուծումները: Ջերմափոխանակության բացակայության և առաջին ռեժիմի դեպքերում ցույց է տրված, որ զրգրումները տարածվում են մեկուսացված, իսկ երկրորդ ռեժիմի՝ հարվածային ալիքի տեսքով:

**Ohanyan G.G.**

**On the Forms of Nonlinear Propagation of High-Frequency Perturbation  
in a Thermal Relaxing Gas-Liquid mixture**

The quasyadiabatic and quasyisothermic regimes of propagation of highfrequency perturbation are considered in a thermal relaxing gas–fluid mixture. The simplified nonlinear equations are obtained. It is shown that in the absence of heat transfer and under the quasyadiabatic regime the form of propagation is solitone, or the shock wave in quasyisotherm regime.

Изучение высокочастотного волнового процесса без учета теплообмена, которому соответствует адиабатический или изотермический предельные режимы термодинамического поведения газа в пузырьках, сводится к исследованию решений нелинейного уравнения Клейна–Гордона. Построены его точные частные решения, описывающие распространение уединённых волн как со скоростью, меньшей скорости звука в чистой жидкости (классическое решение), так и превышающей её. В пределе, когда реализуются сверхвысокие частоты, величины скоростей совпадают.

В случае малой по величине интенсивности межфазного теплообмена различаются квазиадиабатический и квазиизотермический режимы распространения высокочастотных возмущений, описываемые нелинейными модельными уравнениями, соответственно, третьего и второго порядков. Для их упрощенных вариантов построены точные частные решения, указывающие, что в первом из режимов при определенном законе теплообмена формой распространения является уединенная, а во втором – ударная волна. Скорости перемещения фронтов волн по величине могут отличаться от скорости звука в жидкости.

Экспериментальное изучение частотной зависимости фазовой скорости волны в водовоздушной смеси [1] выявило, что при высоких вынуждающих частотах фазовая скорость сравнима по величине со скоростью звука в воде, а при более высоких может даже превосходить ее. Обзор работ по изучаемому вопросу приведен в [2,3]. В газожидкостной смеси межфазный теплообмен может стать главным механизмом диссипации [2,4]. В таких смесях не выяснены формы распространения высокочастотной волны.

**1. Основные уравнения.** Рассматривается бесстолкновительная монодисперсная газожидкостная смесь, в которой отсутствуют процессы дробления, слипания и образования новых пузырьков сферической формы. Предполагается, что внешние источники тепла отсутствуют и температура несущей фазы (сжимаемая жидкость) постоянна. Из системы модельных уравнений течения смеси [3,4] в приближении Буссинеска можно получить многоволновое уравнение, описывающее нелинейное

распространение одномерных волн давления как с учетом эффектов сжимаемости и вязкости [2,3], так и межфазного теплообмена [5]

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{f0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{10}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + v \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - (1 - \beta_0) a_{10}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right] - \right. \\
& \left. - \alpha_f \frac{\partial^2 P^2}{\partial t^2} \right\} = \frac{1}{t_T} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{e0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_{10}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + \right. \\
& \left. + v \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - (1 - \beta_0) a_{10}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right] - \alpha_e \frac{\partial^2 P^2}{\partial t^2} \right\} \quad (1.1) \\
& \alpha_e = \frac{1}{3} \frac{P_0}{\beta_0 \rho_0 a_0^2} \left( 1 + 2 \frac{P_0}{\beta_0 \rho_0 a_0^2} \right), \quad \alpha_f = \frac{\gamma}{2} \frac{P_0}{\beta_0 \rho_0 a_0^2} \left( 1 + \frac{P_0}{\beta_0 \rho_0 a_0^2} \right) \\
& v = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\beta_0 a_{10}^2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\omega_{ar}^2} \frac{a_{f0}^2}{a_{10}^2}, \quad a_{f0}^2 = \gamma a_{e0}^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_0 \rho_0} \\
& \omega_{ar}^2 = \gamma \omega_{ir}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_0} \frac{1}{R_0^2}, \quad \frac{1}{t_T} = \frac{3\gamma \lambda_2 \text{Nu}}{2 R_0^2}, \quad a_{e0} \leq a_0 \leq a_{f0}
\end{aligned}$$

Здесь  $t$  – время,  $x$  – пространственная координата,  $P$  – безразмерное избыточное давление,  $\rho$  – плотность,  $R$  – радиус пузырька,  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости,  $\lambda_2$  и  $\gamma$  – теплопроводность и показатель адиабаты газа,  $\beta_0$  – объемное газосодержание,  $\text{Nu}$  – число Нуссельта, характеризующее интенсивность межфазного теплообмена,  $t_T$  – время тепловой релаксации,  $\omega_{ar}$  и  $\omega_{ir}$  – резонансные частоты Миннаерта,  $a$  – скорость звука. Индексы 1,2 и 0 отнесены, соответственно, к параметрам жидкости, газа и состоянию термодинамического равновесия (покоя) смеси,  $e$  и  $f$  – к изотермическому и адиабатическому предельным режимам термодинамического поведения газа в пузырьках. Формулы для нелинейных коэффициентов  $\alpha_e, \alpha_f$ , а также скоростей звука  $a_{e0}$  и  $a_{f0}$  приведены в упрощённом виде, где сжимаемостью жидкости пренебрежено.

Линейный вариант уравнения (1.1) использован в [6] для выявления зависимости фазовой скорости волны от частоты  $\Omega$ , входящего в смесь сигнала. Сравнение численных расчетов, следуемых из теоретического анализа, с данными экспериментов [1,3] выявило их удовлетворительное совпадение. Структура уравнения (1.1), а именно, наличие волновых операторов разных порядков свидетельствует об иерархии распространения волн. Действительно, в отсутствие вязкости из анализа дисперсионного уравнения следует вывод, что как при адиабатическом ( $t_T \rightarrow \infty$ ,  $\text{Nu} \rightarrow 0$ ), так и изотермическом ( $t_T \rightarrow 0$ ,  $\text{Nu} \rightarrow \infty$ ) поведении газа в пузырьках при высоких частотах  $\Omega^2 \gg 1/\beta_1 = \omega_{ar}^2 a_{10}^2 / a_{f0}^2$  в уравнении (1.1) главными становятся волновые операторы высших порядков. А это означает, что при реализации таких частот волна перемещается со скоростью звука  $a_{10}$  в чистой жидкости. При низких  $\Omega^2 \ll \omega_{ar}^2 a_{10}^2 / a_{f0}^2$  частотах волна распространяется либо с адиабатической  $a_{f0}$ , либо с изотермической  $a_{e0}$  скоростью звука в смеси. Приведённый анализ иерархии волн согласуется с теорией Уизема [7].

Целью исследования является изучение процесса нелинейного распространения высокочастотного возмущения, описываемого волновым оператором высшего порядка. Поэтому в волновых операторах низшего порядка уравнения (1.1) можно полагать  $\partial^2/\partial t^2 \approx a_{10}^2 \partial^2/\partial x^2$  и учесть, что  $a_{e0}, a_{f0} \ll a_{10}$ . Далее при интегрировании получаемого упрощённого уравнения константы интегрирования берутся равными нулю. Последующий переход к координатам

$$t' = \frac{a_{10}}{a_{f0}} \omega_{ar} t, \quad x' = \frac{\omega_{ar}}{a_{f0}} x \quad (1.2)$$

позволяет записать уравнение в безразмерной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial P}{\partial t} + P - \alpha_f P^2 \right) = -\chi \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial P}{\partial t} + P - \alpha_e P^2 \right) \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \nu \beta_0 \omega_{ar} \frac{a_{10}}{a_{f0}} = \frac{4 \mu}{3 \rho_0} \frac{\omega_{ar}}{a_{10} a_{f0}}, & \chi &= \frac{1}{t_T} \frac{1}{\omega_{ar}} \frac{a_{f0}}{a_{10}} = \frac{\gamma}{2} \frac{\omega_{ar}}{a_{10} a_{f0}} \frac{\lambda_2 \text{Nu}}{\beta_0} = \\ &= 6\gamma \frac{a_{f0}}{a_{10}} \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}}, & \text{Pe} &= \frac{4R_0^2}{\lambda_2} \omega_{ar} \end{aligned}$$

Здесь и далее штрихи над координатами опущены,  $\text{Pe}$  – число Пекле, характеризующее квадрат отношения диаметра пузырька к температурному погранслою внутри пузырька, при этом зависимость числа  $\text{Nu}$  от  $\text{Pe}$  берётся в виде [4]

$$\text{Nu} = \frac{2z^2(z \text{cth } z - 1)}{z^2 - 3(z \text{cth } z - 1)}, \quad z = \frac{\sqrt{\text{Pe}}}{2} \quad (1.4)$$

**2. Квазиadiaбатический режим.** Такой режим волнового процесса реализуется при термодинамическом поведении газа, отличающегося, пусть ненамного, от адиабатического. При этом, время тепловой релаксации превышает макроскопическое, например, период собственных колебаний пузырька, так что

$$t_T \geq \frac{2\pi}{\omega_{ar}}, \quad \chi \leq \frac{1}{2\pi} \frac{a_{f0}}{a_{10}} \quad (2.1)$$

Полагая в (1.1)  $a_0 = a_{f0}$ , будем иметь  $\alpha_f = (\gamma + 1)/(2\gamma)$ . Ввиду малости межфазного теплообмена его взаимодействием со слабым нелинейным эффектом в правой части уравнения (1.3) пренебрегается. Там же, в силу высокочастотности волнового процесса можно считать  $P$  быстро меняющейся во времени функцией, т.е. полагать  $\partial P/\partial t \gg -\chi P$ . Тогда упрощенный вариант уравнения (1.3) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} + (1 + \chi\delta)u - u^2 \right] = -\chi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad u = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} P \quad (2.2)$$

В бездиссипативном приближении ( $\chi = \delta = 0$ ) уравнение (2.2) получено в [2,3]. Для нелинейных обобщённых уравнений волновой динамики в [8,9] разработан алгоритм построения точных частных решений, который в развитии используемого ими метода применяется к исследованию уравнения (2.2). Искомое решение ищется в виде разложения Лорана

$$u(x, t) = u_1 F^{-2} + u_1 F^{-1} + u_3 + \sum_{i=4}^{\infty} u_i F^{i-3} \quad (2.3)$$

где функции  $F(x, t)$ ,  $u_i(x, t)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) определяются в процессе построения решения. Подставляя (2.3) в (2.2), приравняем нулю выражения коэффициентов при степенях  $F$ . Из коэффициентов при  $F^{-5}$ ,  $F^{-4}$  находим

$$u_1 = 6(F_t^2 - F_x^2)$$

$$u_2 = -\frac{6}{5}(F_{tt} - F_{xx}) - \frac{24}{25} \frac{F_t^2 F_{tt} - 2F_t F_x F_{tx} + F_x^2 F_{xx}}{F_t^2 - F_x^2} - \frac{6}{5} \chi \frac{F_t^2 - F_x^2}{F_t} - \frac{6}{5} \delta F_t \quad (2.4)$$

Здесь и ниже  $F_t, F_x, F_{tx}, \dots$  – частные производные от функции  $F$ . При нахождении функций  $u_3, u_i$  ( $i \geq 4$ ) получаем рекуррентные дифференциальные соотношения. Однако, выясняется, что функция  $u_7$ , определяемая из приравненного нулю коэффициента при  $F$ , в силу первой формулы из (2.3) выпадает из рассмотрения. Тем самым, рекуррентность нарушается, что дает основание полагать  $u_i = 0$  ( $i \geq 7$ ), после чего из выражений при  $F^6, F^4, F^2$  следуют значения  $u_6 = u_5 = u_4 = 0$ . Тогда функция  $u_3$  будет удовлетворять уравнению по виду, полностью совпадающему с (2.1), откуда определяются его тривиальные решения  $u_3 = 0$  и  $u_3 = 1 + \chi \delta$ . Кроме того, из выражений коэффициентов при  $F^{-3}, F^{-2}$  и  $F^{-1}$  получим уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} (G_1 + \delta u_1 F_t + u_1 u_2 - u_2 \nabla^2 F) + F_t \left[ \Delta u_1 + (1 - 2u_3 + \chi \delta) u_1 + \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} - G_2 - \right.$$

$$\left. - u_2^2 - \delta u_2 F_t \right] + \chi (G_1 - u_2 \nabla^2 F) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \nabla^2 = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \Delta u_1 + (1 - 2u_3 + \chi \delta) u_1 + \delta \frac{\partial u_1}{\partial t} - G_2 - u_2^2 - \delta u_2 F_t \right] -$$

$$- F_t \left[ \Delta u_2 + (1 - 2u_3 + \chi \delta) u_2 - \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} \right] + \chi (\Delta u_1 - G_2) = 0$$

$$G_1 = u_1 \Delta F + 2L u_1, \quad G_2 = u_2 \Delta F + 2L u_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \Delta u_2 + (1 - 2u_3 + \chi \delta) u_2 + \delta \frac{\partial u_2}{\partial t} \right] + \chi \Delta u_2 = 0, \quad L = F_t \frac{\partial}{\partial t} - F_x \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.5)$$

Выберем функцию  $F(x, t)$  в виде

$$F(x, t) = 1 + e^{kx - \omega t}, \quad \omega = \text{const}, \quad k = \text{const}, \quad (2.6)$$

где значения величин  $\omega, k$  определяются ниже. Подстановка (2.6) в (2.4) приводит к формулам

$$u_1 = 6(\omega^2 - k^2) e^{2(kx - \omega t)}, \quad u_2 = -6 \left[ (\omega^2 - k^2) \left( 1 - \frac{1}{5} \chi \right) - \frac{1}{5} \delta \omega \right] e^{kx - \omega t} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.6), (2.7) в уравнения (2.5), получим алгебраическую систему уравнений для определения значений  $\omega$  и  $k$ :

$$\begin{aligned}
& \omega^2 (\omega^2 - k^2)^2 + (1 + \chi\delta - 2u_3) \omega^2 (\omega^2 - k^2) - \frac{6}{5} \chi \omega (\omega^2 - k^2)^2 - \frac{1}{25} \chi^2 (\omega^2 - k^2)^2 - \\
& - \frac{2}{25} \chi \delta \omega^2 (\omega^2 - k^2) - \frac{6}{5} \delta \omega^3 (\omega^2 - k^2) - \frac{1}{25} \delta^2 \omega^4 = 0 \\
& 3\omega^2 (\omega^2 - k^2)^2 + 3(1 + \chi\delta - 2u_3) \omega^2 (\omega^2 - k^2) - \frac{18}{5} \chi \omega (\omega^2 - k^2)^2 + \\
& + \frac{3}{25} \chi^2 (\omega^2 - k^2)^2 + \frac{6}{25} \chi \delta \omega^2 (\omega^2 - k^2) - \frac{18}{5} \delta \omega^3 (\omega^2 - k^2) + \frac{3}{25} \delta^2 \omega^4 - \\
& - \frac{1 + \chi\delta - 2u_3}{5} [\chi \omega (\omega^2 - k^2) + \delta \omega^3] = 0 \\
& \omega (\omega^2 - k^2) + (1 + \chi\delta - 2u_3) \omega - \chi (\omega^2 - k^2) - \delta \omega^2 = 0 \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует соотношение, комбинирование которого с третьим уравнением позволяет выявить полезные для последующего анализа системы (2.8) связи

$$\omega (\omega^2 - k^2 + 1 + \chi\delta - 2u_3) \left( \omega^2 - k^2 + \frac{1 + \chi\delta - 2u_3}{6} \right) = 0 \tag{2.9}$$

**Решения нелинейного уравнения Клейна–Гордона.** Пусть  $\delta = \chi = 0$ . В случае  $u_3 = 0$  из (2.9) находим значение  $\omega^2 - k^2 = -1$ , которое подстановкой в формулы (2.7) позволяет, в силу разложения (2.3), получить явный вид функции  $u(x, t)$ . Совершив переход к размерным координатам (1.2) и давлению  $P = P_0(1 + P')$ , будем иметь

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{3\gamma}{\gamma + 1} \text{ch}^{-2} \left( \frac{1}{2} K \xi \right), \quad \xi = x - Vt \tag{2.10}$$

$$K = k \frac{\omega_{ar}}{a_{f0}} = \omega \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2} \frac{\omega_{ar}}{a_{f0}}}, \quad \Omega = \omega \frac{a_{10}}{a_{f0}} \omega_{ar}, \quad V = \frac{\Omega}{K} = a_{10} \left( 1 + \frac{1}{\omega^2} \right)^{-1/2}$$

Здесь и ниже  $K$  и  $\Omega$  – величины, имеющие размерность волнового числа и частоты,  $\xi$  – сопутствующая координата, связанная с фронтом  $\xi = 0$ ,  $V$  – скорость перемещения фронта волны.

Если же  $u_3 = 1$ , то  $\omega^2 - k^2 = 1$  и для размерного давления получим формулу

$$\frac{P}{P_0} = \frac{3\gamma + 1}{\gamma + 1} \left[ 1 - \frac{3\gamma}{3\gamma + 1} \text{ch}^{-2} \left( \frac{1}{2} K \xi \right) \right], \quad V = a_{10} \left( 1 - \frac{1}{\omega^2} \right)^{-1/2} \tag{2.11}$$

Построенные решения (2.10) и (2.11) описывают поведения уединенных волн с разными амплитудами, распространяющимися вдоль положительного направления оси  $x$ , соответственно, со скоростями  $V < a_{10}$  и  $V > a_{10}$ . При значениях  $\omega^2 \gg 1$  получим  $V \approx a_{10}$ . Отметим, что в работах Корпела, например [10], приводится лишь решение (2.10).

**Решение уравнения (2.2).** Ограничимся рассмотрением наличия достаточно крупных пузырьков, что позволяет без ущерба общности в системе (2.8), (2.9) полагать  $\chi\delta \ll 1$ . Физически приемлемыми являются лишь решения, построенные при значении  $u_3 = 0$ . Из системы следует, что её корнями являются значения

$$\omega^2 - k^2 = -1, \quad \omega = \pm \sqrt{\frac{\chi}{\delta}}$$

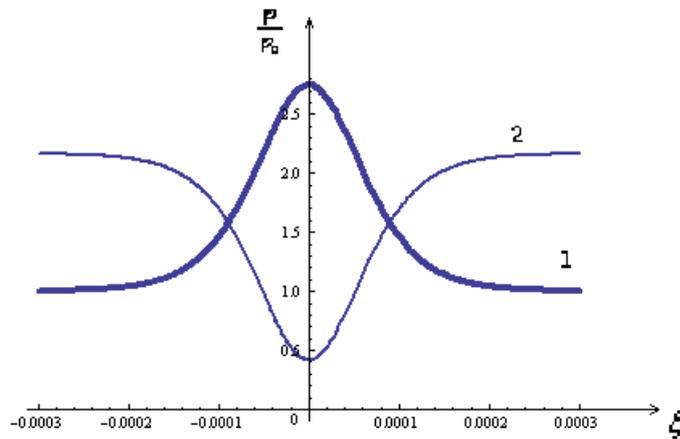
Тогда, в силу формул (2.6), (2.7) и разложения (2.3), можно построить функцию  $u(x, t)$  как точное частное решение уравнения (2.2). Далее после перехода к координатам (1.2) и размерному (истинному) давлению решение запишется в форме

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{3\gamma}{\gamma+1} \text{ch}^{-2}\left(\frac{1}{2}K\xi\right), \quad \xi = x - Vt \quad (2.12)$$

$$K = \sqrt{1 + \frac{\chi}{\delta} \frac{\omega_{ar}}{a_{f0}}}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\chi}{\delta} \frac{a_{10}}{a_{f0}}} \omega_{ar}, \quad V = \frac{\Omega}{K} = a_{10} \left(1 + \frac{\delta}{\chi}\right)^{-1/2}$$

Полученное решение описывает эволюцию уединённой волны, перемещающейся вдоль положительного направления оси  $x$  со скоростью  $V < a_{10}$ . В случае  $\chi/\delta \gg 1$  получим  $V \approx a_{10}$ . Отметим, что первое решение (2.10) уравнения Клейна–Гордона является обобщением формулы (2.12), поскольку, полагая в (2.10)  $\omega = \sqrt{\chi/\delta}$ , приходим к решению (2.12).

В рассматриваемом режиме при малых возмущениях радиуса для вычисленных по формулам (1.3), (1.4) значений параметра  $\chi$  должно выполняться требование (2.1). В качестве иллюстрации изложенной теории рассмотрена водовоздушная ( $\lambda_2 = 2.16 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ) смесь с исходными параметрами  $\beta_0 = 0.01$ ,  $P_0 = 0.05 \text{ МПа}$ ,  $T_0 = 293 \text{ К}$ . На фиг. 1 приведены графики решений (2.10), (2.12) и (2.11), отнесённые к пузырькам с  $R_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , при которых  $\chi = 6.762 \cdot 10^{-3}$ ,  $\chi/\delta = 87670$ ,  $\text{Nu} = 77.5$ ,  $\Omega = 38.463 \text{ МГц}$ ,  $V = 1500 \text{ м/с}$ .



Фиг.1. Уединенные волны, описываемые нелинейными уравнениями (2.2) и Клейна–Гордона. Кривая 1 соответствует решению уравнения (2.10) или (2.12), кривая 2 – (2.11).

**3. Квазиизотермический режим.** Такой режим в газожидкостной смеси реализуется в случае, когда термодинамическое поведение газа в пузырьках отличается, пусть ненамного, от изотермического. Полагая в (1.1)  $a_0 = a_{e0}$ , будем иметь  $\alpha_e = 1$ ,  $\alpha_f = \gamma$ . При чисто изотермическом режиме время тепловой релак-

сации несравнимо мало в сравнении с макроскопическим, например, с периодом колебания пузырька  $t = 2\pi/\omega_{ir}$  и восстановление теплового равновесия в пузырьках можно полагать мгновенным:  $t_T \rightarrow 0$  ( $Nu \rightarrow \infty$ ,  $\chi \rightarrow \infty$ ). Волновой процесс описывается лишь правой частью уравнения (1.3). В исследуемом квазиизотермическом режиме, когда

$$t_T < t = \frac{2\pi}{\omega_{ir}}, \quad \chi = 6\gamma \frac{a_{e0}}{a_{10}} \frac{Nu}{Pe} > \frac{1}{2\pi} \frac{a_{e0}}{a_{10}}, \quad Pe = \frac{2R_0^2}{\lambda_2} \omega_{ir} \quad (3.1)$$

в уравнении (1.3) главной является его правая часть. Подставляя её в левую часть, получим упрощенное уравнение

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial P}{\partial t} + P - P^2 - \frac{2(\gamma-1)}{\chi} P \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

Здесь диссипация проявляется через эффект вязкости. Искомое решение  $p(x, t)$  ищется в виде разложения (2.2), а функция  $F(x, t)$  будет вновь выбрана в форме (2.6). Последующие выкладки аналогичны приведённым в п.2. Из приравненных нулю выражений коэффициентов при  $F^{-5}, F^{-3}$  будет иметь

$$P_1 = 0, \quad P_2 = -\frac{\chi}{\gamma-1} \frac{F_t^2 - F_x^2}{F_t} = \frac{\chi}{\gamma-1} \frac{\omega^2 - k^2}{\omega} e^{kx - \omega t} \quad (3.3)$$

При получении рекуррентных соотношений, из которых должны последовательно определяться функции  $P_i (i \geq 3)$ , выясняется, что функция  $P_5$ , удовлетворяющая приравненной нулю совокупности свободных членов (коэффициент при  $F^0$ ), в силу (3.3), выпадает из рассмотрения, что приводит к нарушению рекуррентности. Тогда можно полагать  $P_i = 0 (i \geq 5)$ , а из коэффициента при  $F$  находим  $P_4 = 0$ . В силу полученных нулевых значений, функция  $P_3$  удовлетворяет уравнению по виду, совпадающему с (3.2), откуда следуют тривиальные значения  $P_3 = 0, P_3 = 1$ . Из приравненных нулю коэффициентов при  $F^{-2}, F^{-1}$  будем иметь уравнения

$$P_2 \Delta F + 2LP_2 + \delta P_2 F_t + P^2 + \frac{2(\gamma-1)}{\chi} \left( P_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} - P_2 P_3 F_t \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$\Delta P_2 + \delta \frac{\partial P_2}{\partial t} + P_2 (1 - 2P_3) - \frac{2(\gamma-1)}{\chi} P_3 \frac{\partial P_2}{\partial t} = 0$$

Здесь виды операторов  $\Delta, L$  приведены в (2.5). Подставляя уже укороченное разложение (2.2) и формулу (3.3) в уравнения (3.4), получим систему алгебраических соотношений, из которой определятся значения

$$\omega = \frac{\chi}{\gamma-1-\chi\delta} (2P_3 - 1), \quad \omega^2 - k^2 = -\frac{\gamma-1}{\gamma-1-\chi\delta} (2P_3 - 1)^2, \quad \chi\delta < \gamma-1 \quad (3.5)$$

Согласно формулам (3.3), (3.5), вне зависимости от значения  $P_3$ , точное частное решение уравнения (3.2), выраженное через размерное (истинное) давление и записанное в размерных координатах (1.2), будет иметь вид:

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{1}{1 + e^{\pm k\xi}}, \quad \xi = x \mp Vt, \quad V = \frac{\Omega}{K} = a_{10} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\chi} \frac{\gamma-1-\chi\delta}{\chi} \right)^{-1/2}$$

$$K = \frac{\chi}{\gamma - 1 - \chi\delta} \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{\chi} \frac{\gamma - 1 - \chi\delta}{a_{e0}} \omega_{ir}}, \quad \Omega = \frac{\chi}{\gamma - 1 - \chi\delta} \frac{a_{10}}{a_{e0}} \omega_{ir} \quad (3.6)$$

Здесь  $\Omega$  – частота,  $K$  – волновое число,  $V$  – скорость перемещения фронта волны. Для волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $x$  в (3.6) выбираются верхние знаки. В этом случае получим асимптотические значения

$$P(-\infty) = 2P_0, \quad P(\infty) = P_0$$

которые характеризуют однородные состояния смеси вдали от фронта  $\xi = 0$ . Поскольку решение (3.6) непрерывно соединяет эти состояния впереди ( $\xi > 0$ ) и позади ( $\xi < 0$ ) него, постольку оно описывает структуру ударной волны давления, распространяющейся со скоростью  $V < a_{10}$ . При реализации значений  $\chi \gg \gamma - 1$ , имеющих место в случае сверхмелких пузырьков, имеем  $V \approx a_{10}$ . Для более крупных ( $\chi\delta \ll \gamma - 1$ ,  $\chi \sim \gamma - 1$ ), слагаемыми, ответственными за эффект вязкости в (3.2) и (3.6), можно пренебречь. Если же  $\chi\delta > \gamma - 1$ , то получаемое решение лишено физического смысла. С увеличением  $R_0$  происходит увеличение значения числа  $Pe$  и поверхности пузырька, что усиливает интенсивность межфазного теплообмена. Однако, в силу (1.4) и (3.1), значения  $Nu/Pe$  и  $\chi$  уменьшаются, при этом, для рассматриваемого режима ограничение снизу на величину параметра  $\chi$  сохраняется.

Помимо вязкости, существует другой механизм диссипации, а именно: необратимый межфазный теплообмен. В исследуемом режиме в уравнении (1.3) главной является его правая часть и поэтому в волновом операторе левой части можно полагать  $\partial^2/\partial t^2 \approx a_{10}^2 \partial^2/\partial x^2$ . Далее принимается, что избыточное давление является медленно меняющимся по  $t$ -функции, т.е.  $\partial P/\partial t \ll P$ . В этом случае уравнение (1.3) упрощается и запишется в виде

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{\chi} \frac{\partial P}{\partial t} + P - P^2 - \frac{2\gamma}{\chi} P \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (3.7)$$

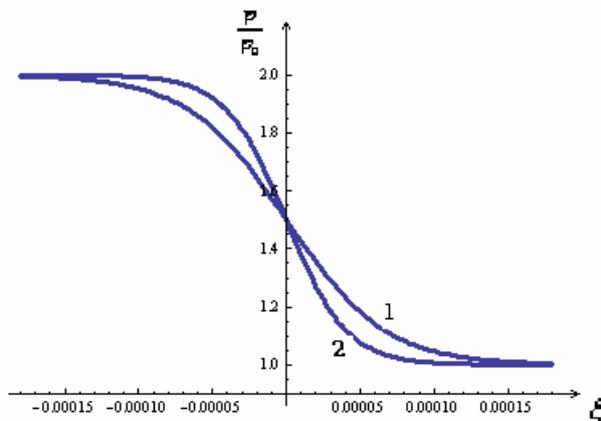
где диссипация обусловлена лишь наличием теплообмена. Решением уравнения (3.7), записанном в размерной форме, является описывающая структуру ударной волны функция (3.6), однако, с иными параметрами

$$K = \frac{\chi}{\gamma - 1} \sqrt{1 + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{\chi^2} \frac{\omega_{ir}}{a_{e0}}}, \quad \Omega = \frac{\chi}{\gamma - 1} \frac{a_{10}}{a_{e0}} \omega_{ir} \quad (3.8)$$

$$V = \frac{\Omega}{K} = a_{10} \left( 1 + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{\chi^2} \right)^{-1/2}$$

При значениях  $\chi^2 \gg \gamma(\gamma - 1)$ , имеющих место в случае сверхмелких пузырьков, имеем  $V \approx a_{10}$ , а для более крупных ( $\chi \sim \gamma - 1$ ) получим  $V < a_{10}$ . С целью численной реализации полученных формул рассмотрена водовоздушная смесь с исходными характеристиками  $\beta_0 = 0.01$ ,  $P_0 = 0.05$  МПа,  $T_0 = 293$  К,  $R_0 = 7 \cdot 10^{-6}$  м, для которой, в силу (1.4) и (3.1),  $Nu = 11.48$ ,  $\chi = 0.276$ . На фиг.2 приведены графики решения (3.6) с разными (3.6) и (3.8) параметрами волны,

для которых  $\Omega = 25.62 \text{ МГц}$  и, соответственно,  $V = 852 \text{ м/с}$ ,  $V = 520 \text{ м/с}$ .



Фиг. 2. Структуры ударных волн давления. Кривая 1 соответствует решению уравнения (3.2), кривая 2 – (3.7).

**Заключение.** Распространение быстрой (высокоскоростной) волны в термически релаксирующей газожидкостной смеси описывается уравнениями, порядки которых обусловлены режимом термодинамического поведения газа в пузырьках. При адиабатическом или изотермическом поведении оно описывается нелинейным уравнением второго порядка (Клейна–Гордона). Его точные частные решения описывают распространение уединённых волн с разными амплитудами, перемещающимися как со скоростью, меньшей скорости звука в чистой жидкости (классическое решение), так и превышающей её. При квазиадиабатическом режиме порядок уравнения повышается на единицу вследствие учёта термической релаксации в пузырьках. Построенное для него точное частное решение совпадает с классическим при значении реализующейся частоты, равной отношению параметров, ответственных за проявление эффектов теплообмена, и вязкости. При квазиизотермическом режиме волновая динамика описывается обобщённым уравнением Клейна–Гордона на случай обусловленной учетом теплообмена дополнительной нелинейности. В этом режиме эффектом вязкости можно пренебречь. Построенные решения описывают структуры ударных волн давления.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fox F.E., Curley S.R., Larson G.S. Phase velocity and absorption measurements in water containing air bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1955. V.27. №3. P.534-539.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.2. М.: Наука, 1987. 360с.
3. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248с.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.2. М.: Наука, 1987. 464с.
5. Оганян Г.Г. Влияние межфазного теплообмена на нелинейное распространение волн в газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С.77-87.
6. Оганян Г.Г. О тепловом механизме затухания волны в газожидкостной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С.75-83.
7. Whitham G.B. Linear and nonlinear waves, etc.: Wiley, 1974, 636p. = Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 623с.

8. Кудряшов Н.А. Точные солитонные решения обобщённого уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т.52. № 3. С.465-470.
9. Кудряшов Н.А., Сухарев М.Б. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка для описания волн на воде // ПММ. 2001.Т.65. №5. С884-894.
10. Корпел А., Бенерджи П.П. Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям с дисперсией и к решениям солитонного типа // Тр. Ин-та инженеров по электротехн. и радиоэлектрон. ТИИЭР. 1984. Т.32. №9. С.6-30.

**Сведения об авторе:**

**Оганян Гагик Гришаевич**

Канд. физ.-мат.наук, ведущий научн.сотр.Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>. Тел.: (+37493)946-947

E-mail: oganyangagik@gmail.com

Поступила в редакцию 14.05.2009