ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №3, 2010 Механика

УДК 539.3

МАГНИТОУПРУГОСТЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН*)

Саркисян С.О., Саркисян Л.С.

Ключевые слова: микрополярная теория, электропроводность, неферромагнитность, тонкие оболочки, пластины.
Key words: micropolar theory, electroconductivity, nonferromagnetic, thin shells, plates

Սարգսյան Ս. Հ., Սարգսյան Լ.Ս.
Բարակ թաղանթների և սալերի մագնիսաառաձգականությունը առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսությամբ

Աշխատանքում ասիմպտոտիկական մեթոդի հիմքի վրա կառուցված են միկրոպոլյար առաձգական էլեկտրահաղորդիչ ոչ ֆերրոմագնիսական բարակ թաղանթների և սալերի ազատ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով, “սահքային փոքր կոշտությամբ” ընդհանուր մաթեմատիկական մոդելները:

Sargsyan S.H., Sargsyan L.S.
Magnetoelasticity of Thin Plates and Shells on the basis of the Asymmetrical Theory of Elasticity

The present paper is aimed at constructing general mathematical models with independent and constraint rotation and models with “small shift rigidity” of thin elastic electro conductive micropolar shells and plates.

В работе на основе асимптотического метода построены общие математические модели микрополярных упругих электропроводящих неферромагнитных оболочек и пластин с независимыми полями перемещений и вращений со стеснённым вращением «с малой сдвиговой жёсткостью».

Введение. Вопрос о построении теории магнитоупругости электропроводящих тонких оболочек и пластин на основе классической теории упругости изучены в работах [1-5]. С вопросом о построении теории упругости, учитывающей не только силовые, но и моментные напряжения, приходится сталкиваться при решении задач об определении напряженно-деформированного состояния для материалов, обладающих электромагнитными свойствами [6-10]. С этой точки зрения, актуально построение общих математических моделей упругих электропроводящих, а также, ферромагнитных тонких оболочек и пластин на основе трехмерной несимметричной теории упругости.

В работе [5] на основе асимптотического метода построена общая прикладная-двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек по классической теории упругости. В работах [11-16] асимптотическим методом построены теории тонких балок, оболочек и пластин на основе несимметричной теории упругости.

В данной работе асимптотическим методом построена основная система двумерных уравнений магнитоупругости электропроводящих не ферромагнитных тонких оболочек и пластин на основе трехмерной несимметричной теории магнитоупругости. Для определения электромагнитного поля в окружающем оболочку или пластинку области (бесконечное трёхмерное пространство за

---

*) Работа доложена на «Euromech Colloquium 510. UPMC, Paris, France, May 13-16, 2009, Mechanics of Generalized Continua: A hundred years after the Cosserats».

исключением области тонкого тела) трёхмерную область, занимаемую тонкой оболочкой или пластинкой на уровне исходного приближения асимптотического метода, можем представлять как математический разрез по срединной поверхности оболочки или пластинки, по которой будут течь поверхностные токи электропроводимости, представляющие собой усредненные токи по толщине оболочки или пластинки. Получены двумерные граничные условия на граничном контуре срединной поверхности оболочки или пластинки, как для механических, так и для соответствующих электродинамических величин. В результате, в зависимости от значений безразмерных физических параметров материала построены общие математические модели магнитоупругости микрополярных электропроводящих не ферромагнитных тонких оболочек и пластин с независимыми полями перемещений и вращений со стесненным вращением и «с малой сдвиговой жесткостью».

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное микрополярное упругое электропроводящее (неферромагнитное) однородное тело и отнесём его к триортогональной неподвижной системе координат [5,17]. Пусть оболочка находится во внешнем стационарном однородном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}^0=\{H_{01},H_{02},H_{03}\}$. Будем исходить из основных уравнений линеаризованной теории магнитоупругости для трехмерной микрополярной среды [6-10].

Уравнения движения микрополярного (неферромагнитного) упругого электропроводящего тела с учетом массовых сил – электромагнитного происхождения:

уравнения движения

$$\nabla_m\sigma^{mn}+f^n=\rho\frac{\partial^2V^n}{\partial t^2},\qquad \nabla_m\mu^{mn}+e^{nmk}\sigma_{mk}=J\frac{\partial^2\omega^n}{\partial t^2}\tag{1.1}$$

обобщенный закон Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{mn}&=(\mu+\alpha)\gamma_{mn}+(\mu-\alpha)\gamma_{nm}+\lambda\gamma_{kk}\delta_{nm}\\ \mu_{mn}&=(\gamma+\varepsilon)\kappa_{mn}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{nm}+\beta\kappa_{kk}\delta_{nm}\end{aligned}\tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn}=\nabla_mV_n-e_{kmn}\omega^k,\qquad \kappa_{mn}=\nabla_m\omega_n\tag{1.3}$$

уравнения электродинамики (квазистационарной) с конечной электропроводностью в области движущейся среды

$$\operatorname{rot}\vec{h}=\frac{4\pi}{c}\vec{j},\quad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\vec{h}=0,\quad \operatorname{div}\vec{E}=4\pi\rho_e\tag{1.4}$$

уравнения электродинамики (квазистационарной) во внешней от тела области (вакуума):

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=0,\quad \operatorname{rot}\vec{E}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\vec{E}^{(e)}=0,\quad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0\tag{1.5}$$

Здесь $m,n=1,2,3$; σ^{nm}, μ^{nm} – контравариантные компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn},κ_{mn} – ковариантные компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения; V_n – ковариантные компоненты вектора перемещения $(\vec{V})$, ω_n – ковариантные компоненты вектора независимого поворота $(\vec{\omega})$:

$$\vec{F}=\{f^1,f^2,f^3\}=\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{H}^0 \qquad (1.6)$$

$\vec{F}$ – вектор массовых сил электромагнитного происхождения;

$$\vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\times\vec{H}^0\right) \qquad (1.7)$$

$\vec{j}$ – вектор плотности возбужденного в теле полного электрического тока; $\vec{E},\vec{E}^{(e)}$ – векторы напряженности возбужденного электрического тока, соответственно, в теле и в вакууме; $\vec{h},\vec{h}^{(e)}$ – векторы напряженности возбужденного магнитного поля, соответственно, в теле и в вакууме; ρ_e – объемная плотность электрического заряда в теле; $\lambda,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ – упругие константы микрополярного материала оболочки, ρ – плотность материала, j – мера инерции при вращении материала тела; σ – коэффициент электропроводности материала тела; c – электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в вакууме; δ_{nm} – символы Кронекера, e^{nmk} – контравариантные компоненты тензора Леви-Чивиты.

Механические граничные условия на лицевых поверхностях оболочки имеют вид:

$$\sigma_{k3}\Big|_{\alpha_3=\pm h}=\mp q_k^{\pm} \qquad (k=1,2,3) \qquad (1.8)$$

На поверхности края оболочки Σ предполагается, что заданы граничные условия либо первого, либо второго, либо смешанного варианта граничных условий микрополярной теории упругости.

Электродинамические граничные условия, как на лицевых поверхностях оболочки, так и на поверхности края оболочки будут представлять следующие соотношения:

$$n^k\left[E_k\right]_-=4\pi\hat{\rho}_e,\quad e^{nmk}n_m\left[h_k\right]_-=0,\quad n^k\left[h_k\right]_-=0,\quad e^{nmk}n_m\left[E_k\right]_-=0 \qquad (1.9)$$

Здесь, $[\cdot]_-$ – скачок искомой величины через поверхность раздела сред (тела и вакуума); $\hat{\rho}_e$ – плотность поверхностного электрического заряда; $n^k\ (k=1,2,3)$ – компоненты вектора нормали к поверхности тела.

Условиями на бесконечности будут служить требования, по которым убывание векторов электромагнитного поля в вакууме на расстоянии происходило бы по закону:

$$\left|\vec{E}^{(e)}\right|=0\left(\frac{1}{r}\right),\quad \left|\vec{h}^{(e)}\right|=0\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r\to\infty,\quad 0\le t<\infty \qquad (1.10)$$

где r – расстояние от начала координат до точки наблюдения.

При помощи начальных условий, при $t=0$ задаются значения компонентов вектора перемещения, вектора независимого поворота, компоненты линейной и вращательной скоростей точек тела, а также изменения характеристик электромагнитного поля.

2. Преобразование трехмерных уравнений микрополярной теории магнитоупругости. Удобно введение несимметричного тензора силовых напряжений [5,14,17] и аналогичного тензора для моментных напряжений [14,15]:

$$\tau_{ii}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{ii},\ \tau_{ij}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{ij},\ \tau_{i3}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{i3}\left(i\leftrightarrow 3\right)$$

$$v_{ii}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\mu_{ii},\ v_{ij}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\mu_{ij},\ \ v_{i3}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\mu_{i3}\left(i\leftrightarrow 3\right) \qquad (2.1)$$

$$\tau_{33}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\sigma_{33},\quad v_{33}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\mu_{33}$$

Здесь и в дальнейшем индексы i, j принимают значения 1,2, притом $i\neq j$.

В обозначениях (2.1) основная система магнитоупругости микрополярного тела принимает вид:

уравнения движения

$$L_1+\frac{\tau_{13}+\tau_{31}}{R_1}+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{\partial\tau_{31}}{\partial\alpha_3}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\left\{\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}-\frac{1}{c}H_{03}j_2+\frac{1}{c}H_{02}j_3\right\}$$

$$L_2+\frac{\tau_{23}+\tau_{32}}{R_2}+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial\tau_{32}}{\partial\alpha_3}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\left\{\rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}+\frac{1}{c}H_{03}j_1-\frac{1}{c}H_{01}j_3\right\}$$

$$-L+F+\frac{\partial\tau_{33}}{\partial\alpha_3}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\left\{\rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2}-\frac{1}{c}H_{02}j_1+\frac{1}{c}H_{01}j_2\right\} \qquad (2.2)$$

$$K_i+\frac{v_{i3}+v_{3i}}{R_i}+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)\frac{\partial v_{3i}}{\partial\alpha_3}-(-1)^j\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\left(\tau_{3j}-\tau_{j3}\right)=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)J\frac{\partial^2\omega_i}{\partial t^2}$$

$$-K+\Phi+\frac{\partial v_{33}}{\partial\alpha_3}+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\tau_{12}-\left(1+\frac{\alpha_3}{R2}\right)\tau_{21}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)J\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2}$$

физико-геометрические соотношения

$$\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)e_i=\frac{1}{E}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)\tau_{ii}-\frac{v}{E}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\tau_{jj}-\frac{v}{E}\tau_{33}$$

$$\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_3}=\frac{1}{E}\tau_{33}-\frac{v}{E}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\tau_{11}-\frac{v}{E}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\tau_{22}$$

$$\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)t_j-(-1)^j\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\omega_3=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)\tau_{ij}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\tau_{ji}$$

$$\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\frac{\partial V_i}{\partial\alpha_3}-(-1)^j\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\omega_j=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\tau_{3i}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\tau_{i3}$$

$$\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)g_i+(-1)^j\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\omega_j=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)\tau_{i3}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)\tau_{3i} \quad (2.3)$$

$$\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\kappa_i=\frac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)v_{ii}-\frac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)v_{jj}-\frac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}v_{33}$$

$$\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_3}=\frac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}v_{33}-\frac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)v_{11}-\frac{\beta}{2\gamma(3\beta+2\gamma)}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)v_{22}$$

$$\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)n_j=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)v_{ij}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}v_{ji},\qquad \left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_3}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}v_{3i}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}v_{i3}$$

$$\left(1+\frac{\alpha_3}{R_j}\right)\theta_i=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)v_{i3}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_i}\right)v_{3i}.$$

уравнения электродинамики для движущейся оболочки области

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_2}-\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_3}-\frac{h_2}{R_2}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{4\pi\sigma}{c}\left(E_1+\frac{1}{c}\left(H_{03}\frac{\partial V_2}{\partial t}-H_{02}\frac{\partial V_3}{\partial t}\right)\right)$$

$$\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_3}+\frac{h_1}{R_1}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_1}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{4\pi\sigma}{c}\left(E_2+\frac{1}{c}\left(H_{01}\frac{\partial V_3}{\partial t}-H_{03}\frac{\partial V_1}{\partial t}\right)\right)$$

$$\frac{1}{A_1}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)h_2-\frac{1}{A_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)h_1=$$
$$=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{4\pi\sigma}{c}\left(E_3+\frac{1}{c}\left(H_{02}\frac{\partial V_1}{\partial t}-H_{01}\frac{\partial V_2}{\partial t}\right)\right)$$

$$\frac{1}{A_1}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)h_1+\frac{1}{A_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)h_2+$$
$$+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_3}+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{h_3}{R_1}+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{h_3}{R_2}=0$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial E_3}{\partial\alpha_2}-\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial E_2}{\partial\alpha_3}-\frac{E_2}{R_2}=-\frac{1}{c}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial h_1}{\partial t}$$

$$\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{\partial E_1}{\partial\alpha_3}+\frac{E_1}{R_1}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial E_3}{\partial\alpha_1}=-\frac{1}{c}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{\partial h_2}{\partial t}\qquad(2.4)$$

$$\frac{1}{A_1}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial E_2}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)E_2-\frac{1}{A_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{\partial E_1}{\partial\alpha_2}-$$
$$-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)E_1=-\frac{1}{c}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial h_3}{\partial t}$$

$$\frac{1}{A_1}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial E_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)E_1+\frac{1}{A_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{\partial E_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)E_2+$$
$$+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial E_3}{\partial\alpha_3}+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{E_3}{R_1}+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{E_3}{R_2}=\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)4\pi\rho_e$$

$$\frac{1}{A_1}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial j_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)j_1+\frac{1}{A_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{\partial j_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)j_2+$$

$$+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{\partial j_3}{\partial\alpha_3}+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)\frac{j_3}{R_1}+\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)\frac{j_3}{R_2}=0$$

$$j_1=\sigma\left(E_1+\frac{1}{c}\left(H_{03}\frac{\partial V_2}{\partial t}-H_{02}\frac{\partial V_3}{\partial t}\right)\right),\quad j_2=\sigma\left(E_2+\frac{1}{c}\left(H_{01}\frac{\partial V_3}{\partial t}-H_{03}\frac{\partial V_1}{\partial t}\right)\right)\quad(2.5)$$

$$j_3=\sigma\left(E_3+\frac{1}{c}\left(H_{02}\frac{\partial V_1}{\partial t}-H_{01}\frac{\partial V_2}{\partial t}\right)\right)$$

Механические граничные условия на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3=\pm h$ будут выражаться так:

$$\left[\frac{\tau_{3i}}{1+\alpha_3/R_j}\right]_{\alpha_3=\pm h}=\mp q_i^{\pm},\quad \left[\frac{\tau_{33}}{\left(1+\alpha_3/R_1\right)\left(1+\alpha_3/R_2\right)}\right]_{\alpha_3=\pm h}=\mp q_3^{\pm}$$

$$\left[\frac{v_{3i}}{1+\alpha_3/R_j}\right]_{\alpha_3=\pm h}=\mp m_i^{\pm},\quad \left[\frac{v_{33}}{\left(1+\alpha_3/R_1\right)\left(1+\alpha_3/R_2\right)}\right]_{\alpha_3=\pm h}=\mp m_3^{\pm}\quad(2.6)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$L_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\tau_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(\tau_{ii}-\tau_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial\tau_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(\tau_{ji}+\tau_{ij}\right)$$

$$L=\frac{\tau_{11}}{R_1}+\frac{\tau_{22}}{R_2},\quad F=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\tau_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tau_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau_{23}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\tau_{23}$$

$$K_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(v_{ii}-v_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial v_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(v_{ji}+v_{ij}\right)\quad(2.7)$$

$$K=\frac{v_{11}}{R_1}+\frac{v_{22}}{R_2},\quad \Phi=\frac{1}{A_1}\frac{\partial v_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}v_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial v_{23}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}v_{23}$$

$$e_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial V_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}V_j+\frac{V_3}{R_i},\quad t_i=\frac{1}{A_j}\frac{\partial V_i}{\partial\alpha_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}V_j,\quad g_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_i}-\frac{V_i}{R_i}$$

$$\kappa_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\omega_j+\frac{\omega_3}{R_i},\quad n_i=\frac{1}{A_j}\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\omega_j,\quad \theta_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\omega_i}{R_i}$$

3. Асимптотический метод. Рассмотрим задачу сведения трехмерной начально-граничной задачи (2.2)-(2.5), (1.5), (2.6), (1.9), (1.10) несимметричной теории магнитоупругости для тонкой оболочки к двумерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем, включая вопрос об удовлетворении граничным и начальным условиям. Отметим, что указанная проблема тесно связана с построением внутреннего итерационного процесса, а последняя, как убедимся, представляет двумерную задачу.

Для этой цели в трехмерных уравнениях несимметричной теории магнитоупругости перейдем к безразмерным величинам и выполним замену независимых переменных (координат α_n и времени t):

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta, \quad t = \lambda^{\omega}\frac{h}{c_0}\tau, \;\; c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\frac{J}{\rho h^2} = \lambda^{l(2k+1)}\overline{J}, \;\; \overline{\tau}_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{E}, \;\; \overline{v}_{ij} = \frac{v_{ij}}{RE}, \;\; \overline{V}_k = \frac{V_k}{h}, \;\; \overline{H}_{ok} = \frac{H_{ok}}{\sqrt{E}} \tag{3.1}$$

$$\overline{H}_{ok} = \lambda^{\kappa_1}H^*_{ok}, \;\; \overline{h}_k = \frac{h_k}{\sqrt{E}}, \;\; \overline{E}_k = \frac{c}{c_0}\frac{E_k}{\sqrt{E}}, \quad \overline{\rho}_e = \frac{c}{c_0}\frac{h\rho_e}{\sqrt{E}}$$

$$\overline{j}_k = \frac{c}{c_0}\frac{j_k}{\sigma\sqrt{E}}, \;\; R_m = \frac{c_0}{c}\frac{\sigma h}{c}, \;\; \overline{R}_i = \frac{R_i}{R}, \;\; \overline{q}^{\pm}_k = \frac{q^{\pm}_i}{E}, \;\; \overline{m}^{\pm}_\kappa = \frac{m^{\pm}_\kappa}{RE}, \;\; t_0 = \lambda^{-l(\omega-1)}\frac{R}{c_0}$$

Здесь R_m – безразмерный параметр электропроводимости материала оболочки, величина ω характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния (НДС) во времени; величина p/l характеризует изменяемость НДС по координатам; p, l – целые числа, $l > p \geq 0$; λ – большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определяемый формулой $h = R\lambda^{-l}$; R – характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки.

При определении НДС оболочки большую роль играют значения физических констант микрополярного материала оболочки. С этой точки зрения будем вводить следующие безразмерные параметры:

$$\frac{\alpha}{E}, \quad \frac{\beta}{R^2E}, \quad \frac{\gamma}{R^2E}, \quad \frac{\varepsilon}{R^2E} \tag{3.2}$$

Во всех рассмотренных ниже случаях примем: $R_m \sim 1$.

Следуя асимптотическому методу при построении внутренней задачи, наша цель будет заключаться в том, чтобы приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ и времени τ) уравнения магнитоупругости к двумерным уравнениям (с независимыми переменными ξ_1 и ξ_2 и времени τ).

4. Теория магнитоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Будем предполагать, что безразмерные физические параметры (3.2) имеют значения:

$$\frac{\alpha}{E} \sim 1, \quad \frac{\beta}{R^2E} \sim 1, \quad \frac{\gamma}{R^2E} \sim 1, \quad \frac{\varepsilon}{R^2E} \sim 1 \tag{4.1}$$

Числа ω, k и κ_1 в выражении (3.1) выбираем таким образом, чтобы в асимптотических приближениях получались непротиворечащие уравнения и чтобы инерционные члены входили в систему уравнений исходного приближения. Таким образом, получим:

$$\omega = 1 + \frac{p}{l}, \quad k = \frac{1}{2} - \frac{p}{l}, \quad 2\kappa_1 = -l - p \tag{4.2}$$

Имея в виду (4.1), (4.2), для величин внутренней задачи в трехмерной области оболочки с асимптотической точностью $O\left(\lambda^{p-l}\right)$ получим следующие асимптотические представления:

$$V_i = h\lambda^{l-p}\left(V_i^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta V_i^1\right), \;\; V_3 = h\lambda^{l-2p+c}\left(V_3^0 + \lambda^{-l+c}\zeta V_3^1\right), \;\; \tau_{ii} = E\lambda^0\left(\tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\tau_{ii}^1\right)$$

$$\omega_i=\lambda^{-p+c}\left(\omega_i^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\omega_i^1\right),\ \ \omega_3=\lambda^0\left(\omega_3^0+\lambda^{-l+c}\zeta\omega_3^1\right),\quad \tau_{ij}=E\lambda^0\left(\tau_{ij}^0+\lambda^{-l+c}\zeta\tau_{ij}^1\right)$$
$$\tau_{3i}=E\lambda^{-p+c}\left(\tau_{3i}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{3i}^1\right),\quad \tau_{i3}=E\lambda^{-p+c}\left(\tau_{i3}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{i3}^1\right)$$
$$v_{ii}=RE\lambda^{-2p+c}\left(v_{ii}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{ii}^1\right),\ \ v_{ij}=RE\lambda^{-2p+c}\left(v_{ij}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{ij}^1\right)$$
$$v_{3i}=RE\lambda^{-p}\left(v_{3i}^0+\lambda^{-l+c}\zeta v_{3i}^1\right),\ \ v_{i3}=RE\lambda^{-p}\left(v_{i3}^0+\lambda^{-l+c}\zeta v_{i3}^1\right) \tag{4.3}$$
$$\tau_{33}=E\lambda^{-l+c}\left(\tau_{33}^0+\zeta\tau_{33}^1+\lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\tau_{33}^2\right),\quad v_{33}=RE\lambda^{-l}\left(v_{33}^0+\zeta v_{33}^1+\lambda^{-l+c}\zeta^2 v_{33}^2\right)$$
$$h_i=\sqrt{E}\lambda^{\kappa_2}\left(h_i^0+\zeta h_i^1\right),\quad h_3=\sqrt{E}\lambda^{\kappa_2}h_3^0,\quad 2\kappa_2=-l+p$$

где $c=2p-l$ при $l\le 2p$, $c=l-2p$ при $2p\le l\le 4p$, $c=2p$ при $l\ge 4p$.

В построенном итерационном процессе важен тот факт, что поле вращений точек оболочки независимо от поля перемещений.

Используем понятия усредненных усилий, силовых и моментных усредненных моментов:

$$T_{ii}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\sigma_{ii}d\alpha_3,\ S_{ij}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\sigma_{ij}d\alpha_3,\ G_{ii}=-\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\sigma_{ii}\alpha_3 d\alpha_3 \tag{4.4}$$
$$L_{ii}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\mu_{ii}d\alpha_3,\ L_{ij}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\mu_{ij}d\alpha_3,\ H_{ij}=\int_{-h}^{h}\left(1+\alpha_3/R_j\right)\sigma_{ij}\alpha_3 d\alpha_3$$

а также, перемещений и независимых поворотов точек срединной поверхности оболочки:

$$u_i=V_i\big|_{\zeta=0},\qquad w=-V_3\big|_{\zeta=0},\quad \Omega_i=\omega_i\big|_{\zeta=0},\quad \Omega_3=-\omega_3\big|_{\zeta=0}. \tag{4.5}$$

Как главный результат, на основе построенной внутренней задачи, на уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$, получим основную систему уравнений общей прикладной-двумерной теории магнитоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения движения

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+$$
$$+(-1)^j\frac{1}{c}j_{0j}H_{03}=2\rho h\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}+\left(q_i^++q_i^-\right)$$
$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)+ \tag{4.6}$$
$$+(-1)^j\left(N_{3j}-N_{j3}\right)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}+\left(m_i^++m_i^-\right)$$
$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\frac{1}{c}j_{01}H_{02}+\frac{1}{c}j_{02}H_{01}=2\rho h\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-\left(q_3^++q_3^-\right)$$
$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}-\left(m_3^++m_3^-\right)$$

соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right]-\frac{\nu}{1-\nu}h\left(q_3^+-q_3^-\right),\qquad S_{ij}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}\right]$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right]-h\frac{\beta}{\beta+2\gamma}m,\; L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}\right] \quad (4.7)$$

$$N_{i3}=-2h\frac{4\alpha\mu}{\alpha+\mu}\Gamma_{i3}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}h\left(q_i^+-q_i^-\right),\quad L_{i3}=-2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\chi_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}h\left(m_i^+-m_i^-\right)$$

геометрические соотношения

$$\varGamma_{i3}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}-\frac{u_i}{R_i}+(-1)^j\varOmega_j,\quad \chi_{i3}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial\varOmega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\varOmega_i}{R_i}$$

$$\varGamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j-\frac{w}{R_i},\qquad \varGamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i+(-1)^j\varOmega_3 \quad (4.8)$$

$$\chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\varOmega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\varOmega_j-\frac{\varOmega_3}{R_i},\quad \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\varOmega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\varOmega_i$$

интегродифференциальные уравнения для компонентов электрической поверхностной токи проводимости [5]:

$$j_{01}(P,t)=-\frac{2\sigma h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega\left[\frac{j_{01}(Q,t)\vec{e}_1(Q)\vec{e}_1(P)}{R_{PQ}}+\frac{j_{02}(Q,t)\vec{e}_2(Q)\vec{e}_1(P)}{R_{PQ}}\right]d\Omega+$$
$$+\frac{2\sigma h}{c}\left(H_{03}\frac{\partial u_2(P,t)}{\partial t}-H_{02}\frac{\partial w(P,t)}{\partial t}\right),\quad P\in\Omega$$

$$j_{02}(P,t)=-\frac{2\sigma h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega\left[\frac{j_{01}(Q,t)\vec{e}_2(P)\vec{e}_1(Q)}{R_{PQ}}\frac{j_{02}(Q,t)\vec{e}_2(Q)\vec{e}_2(P)}{R_{PQ}}\right]d\Omega+$$
$$+\frac{2\sigma h}{c}\left(H_{01}\frac{\partial w(P,t)}{\partial t}-H_{03}\frac{\partial u_1(P,t)}{\partial t}\right),\quad P\in\Omega \quad (4.9)$$

Здесь T_{ii}, S_{ij}, N_{i3} – усредненные усилия; L_{ii}, L_{ij}, L_{i3} – усредненные моменты от моментных напряжений; $\tilde{A}_{ii}, \tilde{A}_{ij}, \tilde{A}_{i3}$ – компоненты тензора деформации, χ_{ii}, χ_{ij}, χ_{i3} – компоненты тензора изгиба-кручения в точках срединной поверхности оболочки. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – орты координатных линий α_1 и α_2 на срединной поверхности оболочки; R_{PQ} – фундаментальное решение системы уравнений (1.5) для всего вакуумного трехмерного пространства (R^3)[5]; R_{PQ} – трехмерное расстояние между точкой $Q\in\Omega$ и произвольной точкой $P\in R^3$ наблюдателя (в системе уравнений (4.9), $P\in\Omega$).

Механические граничные условия на контуре Г срединной поверхности оболочки будут выражаться так:

$$T_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3, \qquad S_{12}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3, \qquad N_{13}\Big|_{\Gamma}=-\int_{-h}^{h}p_3^*d\alpha_3$$

$$L_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_1^*d\alpha_3, \qquad L_{12}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_2^*d\alpha_3, \qquad L_{13}\Big|_{\Gamma}=-\int_{-h}^{h}m_3^*d\alpha_3 \tag{4.10}$$

Электродинамические граничные условия на этом же контуре Γ имеют вид [5]:

$$j_{01}=0, \quad j_{02}=0 \tag{4.11}$$

К основным уравнениям (4.6)-(4.9) и граничным условиям (4.10),(4.11) следует присоединить соответствующие начальные условия.

Таким образом, уравнения (4.6)-(4.9), граничные условия (4.10),(4.11) и начальные условия образуют общую математическую модель магнитоупругости микрополярных упругих электропроводящих неферромагнитных оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

5. Теория магнитоупругости микрополярных тонких оболочек со стеснённым вращением. Предположим, что безразмерные физические параметры материала оболочки (3.2) теперь имеют значения:

$$\frac{\alpha}{E}\sim 1,\ \frac{\beta}{R^2E}=\lambda^{-2l}\beta_*, \qquad \frac{\gamma}{R^2E}=\lambda^{-2l}\gamma_*,\ \frac{\varepsilon}{R^2E}=\lambda^{-2l}\varepsilon_*, \text{ где } \beta_*,\ \gamma_*,\varepsilon_*\sim 1 \tag{5.1}$$

Для чисел ω, k и κ_1 для рассматриваемого случая (5.1) получим

$$\omega=1+\frac{p}{l}, \qquad k=\frac{1}{2}-\frac{p}{l}, \qquad 2\kappa_1=-l-p+2c, \tag{5.2}$$

где $c=2p-l$ при $l\le 2p$, $c=0$ при $l\ge 2p$.

Для величин внутренней задачи в трехмерной области оболочки на уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$ получим следующие асимптотические представления:

$$\tau_{ii}=E\lambda^0\left(\tau_{ii}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{ii}^1\right),\ \tau_{ij}=E\lambda^0\left(\tau_{ij}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{ij}^1\right),\ V_i=h\lambda^{l-p}\left(V_i^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta V_i^1\right)$$

$$\tau_{3i}=E\lambda^{p-c}\left(\tau_{3i}^0+\lambda^{-l+c}\zeta\tau_{3i}^1+\lambda^{-2l+2p}\tau_{3i}^2\right), \qquad \tau_{i3}=E\lambda^{p-c}\tau_{i3}^0, \quad \tau_{33}=E\lambda^{-l+2p-c}\left(\tau_{33}^0+\zeta\tau_{33}^1\right)$$

$$V_3=h\lambda^{l-c}V_3^0, \quad \omega_i=\lambda^{p-c}\omega_i^0,\ v_{ii}=RE\lambda^{-c}v_{ii}^0,\ \ v_{ij}=RE\lambda^{-c}v_{ij}^0,\ \omega_3=\lambda^0\left(\omega_3^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\omega_3^1\right)$$

$$v_{i3}=RE\lambda^{-p}\left(v_{i3}^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{i3}^1\right)\left(i\leftrightarrow 3\right), \quad v_{33}=RE\lambda^{-c}\left(v_{33}^0+\lambda^{-l+c}\zeta v_{33}^1+\lambda^{-2l+2p}\zeta^2v_{33}^2\right)$$

$$h_i=\sqrt{E}\lambda^{\kappa_2}\left(h_i^0+\zeta h_i^1\right),\ h_3=\sqrt{E}\lambda^{\kappa_2}h_3^0,\ 2\kappa_2=-l+p, \quad j_k=\frac{c_0}{c}\sigma\sqrt{E}\lambda^{\kappa_1}j_k^0 \tag{5.3}$$

Качественная сторона построенной внутренней задачи состоит в том, что повороты точек срединной поверхности оболочки теперь связаны с перемещениями этих же точек.

Если в данном случае ввести усредненные силовые и моментные характеристики (4.4) и использовать обозначения (4.5), как главный результат, на основе построенной внутренней задачи для случая (5.1),(5.2), на уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$ получим систему основных уравнений прикладной-двумерной теории магнитоупругости микрополярных упругих тонких оболочек со стеснённым вращением:

уравнения движения

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+\left(-1\right)^j\frac{1}{c}j_{0j}H_{03}=2\rho h\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}+\left(q_i^++q_i^-\right)$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\frac{1}{c}j_{01}H_{02}+\frac{1}{c}j_{02}H_{01}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\left(q_3^{+}+q_3^{-}\right) \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(G_{ii}-(-1)^j L_{ij}\right)+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left[\left(G_{ii}-(-1)^j L_{ij}\right)-\left(G_{jj}+(-1)^j L_{ji}\right)\right]-\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(H_{ji}+(-1)^j L_{jj}\right)$$

$$-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left[\left(H_{ji}+(-1)^j L_{jj}\right)+\left(H_{ij}-(-1)^j L_{ii}\right)\right]-N_{i3}=(-1)^j\left[2Jh\frac{\partial^2\Omega_j}{\partial t^2}+\left(m_j^{+}+m_j^{-}\right)\right]-h\left(q_i^{+}-q_i^{-}\right)$$

соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right],\quad S_{ij}=\frac{2Eh}{1+\nu}\left[\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right]+(-1)^{\mathrm{j}}\frac{1}{2}\left(m_3^{+}+m_3^{-}\right) \quad (5.5)$$

$$G_{ii}=-\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],\ H_{ij}=\frac{Eh^3}{3(1+\nu)}\left[K_{12}+K_{21}\right]+(-1)^{\mathrm{j}}\frac{1}{2}\left[\left(m_3^{+}+m_3^{-}\right)+L_{33}\right]$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},\quad L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}\right]$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j-\frac{w}{R_i},\quad \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i \quad (5.6)$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\beta_j,\quad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\beta_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\beta_i,\quad \beta_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i}$$

$$\chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i},\quad \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i$$

$$\Omega_i=-(-1)^j\frac{1}{2}\left(\psi_j-\beta_j\right),\quad \Omega_3=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{21}-\Gamma_{12}\right)$$

где $L_{33}=\left(\frac{\mathrm{th}\left(hk_1\right)}{hk_1}-1\right)4\gamma h\left(\chi_{11}+\chi_{22}\right)-\frac{\mathrm{th}\left(hk_1\right)}{hk_1}\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right).$

К уравнениям (5.4)-(5.6) следует присоединить систему интегродифференциальных уравнений (4.9) для усредненных электрических токов j_{10}, j_{20} по срединной поверхности оболочки.

Механические граничные условия на контуре Γ срединной поверхности оболочки будут выражаться так [14,15]:

$$T_{11}\big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_1^{*}d\alpha_3,\ S_{12}\big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_2^{*}d\alpha_3,\ \left(L_{12}-G_{11}\right)\big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}\left(\alpha_3p_1^{*}+m_2^{*}\right)d\alpha_3 \quad (5.7)$$

$$\left[-N_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_{12}-L_{11}\right)\right]\bigg|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}\left[p_3^{*}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\alpha_3p_2^{*}-m_1^{*}\right)\right]d\alpha_3$$

Электродинамические граничные условия на Γ будут иметь вид (4.11).

Уравнения (5.4)-(5.6),(4.9), граничные условия (5.7), (4.11) и соответствующие начальные условия образуют общую математическую модель микрополярных упругих электропроводящих не ферромагнитных оболочек со стеснённым вращением.

6. Теория магнитоупругости микрополярных тонких оболочек “с малой сдвиговой жёсткостью”. Предположим, теперь, что физические безразмерные параметры (3.2) представимы в виде:

$$\frac{\alpha}{E}=\lambda^{-2l+2p}\alpha_*,\quad \frac{\beta}{R^2E}=\beta_*,\ \frac{\gamma}{R^2E}=\gamma_*,\quad \frac{\varepsilon}{R^2E}=\varepsilon_*,\ \text{где } \alpha_*,\beta_*,\gamma_*,\varepsilon_*\sim 1 \qquad (6.1)$$

Для чисел ω, k и κ_1 для рассматриваемого случая получим:

$$\omega=1+\frac{c}{2l},\qquad k=\frac{1}{2}+\frac{p}{l}-\frac{c}{2l},\qquad 2\kappa_1=-l-p+c \qquad (6.2)$$

где $c=2p-l$ при $l\le 2p,\ c=l-2p$ при $2p\le l\le 4p,\ c=2p$ при $l\ge 4p.$

Для величин внутренней задачи в трехмерной области оболочки с асимптотической точностью $O\left(\lambda^{p-l}\right)$ получим следующие асимптотические представления:

$$\tau_{ii}=\mu\lambda^{l}\left(\tau_{ii}^{0}+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{ii}^{1}\right),\ \tau_{ij}=\mu\lambda^{l}\left(\tau_{ij}^{0}+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{ij}^{1}\right),$$

$$\tau_{3i}=\mu\lambda^{p}\left(\tau_{3i}^{0}+\zeta\tau_{3i}^{1}+\lambda^{-l+2p-c}\tau_{3i}^{2}\right),\ \tau_{3i}=\mu\lambda^{p}\left(\tau_{i3}^{0}+\zeta\tau_{i3}^{1}+\lambda^{-l+2p-c}\tau_{i3}^{2}\right),$$

$$\tau_{33}=\mu\lambda^{c}\left(\tau_{33}^{0}+\lambda^{-c}\zeta\tau_{33}^{1}\right),\ V_i=R\lambda^{l-p}\left(V_i^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta V_i^1\right)$$

$$v_{ii}=R\mu\lambda^{l+2p-c}\left(v_{ii}^{0}+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{ii}^{1}\right),\ v_{ij}=R\mu\lambda^{l+2p-c}\left(v_{ij}^{0}+\lambda^{-l+2p-c}\zeta v_{ij}^{1}\right)$$

$$v_{3i}=R\mu\lambda^{l+3p-2c}\left(v_{3i}^{0}+\lambda^{-l+c}\zeta v_{3i}^{1}\right),\quad v_{i3}=R\mu\lambda^{l+3p-2c}\left(v_{i3}^{0}+\lambda^{-l+c}\zeta v_{i3}^{1}\right)$$

$$v_{33}=R\mu\lambda^{4p-2c}\left(v_{33}^{0}+\zeta v_{33}^{1}+\lambda^{-l+c}\zeta^2 v_{33}^{1}\right),\quad V_3=R\lambda^{l-c}\left(V_3^0+\lambda^{-l+c}\zeta V_3^1\right) \qquad (6.3)$$

$$\omega_i=\lambda^{l+p-c}\left(\omega_i^0+\lambda^{-l+2p-c}\zeta\omega_3^1\right),\ \omega_3=\lambda^{l+2p-2c}\left(\omega_3^0+\lambda^{-l+c}\zeta\omega_3^1\right)$$

$$h_i=\sqrt{E}\lambda^{\kappa_2}\left(h_i^0+\zeta h_i^1\right),\quad h_3=\sqrt{E}\lambda^{\kappa_2}h_3^0,\ 2\kappa_2=-l+p-c,\quad j_k=\frac{c_0}{c}\sigma\sqrt{E}\lambda^{\kappa_1}j_k^0$$

Отметим, что на основании (6.1), (6.2) в получаемых двумерных уравнениях внутренней задачи магнитоупругости микрополярных оболочек на уровне асимптотической точности $O\left(\lambda^{p-l}\right)$, величины “чисто моментного” происхождения отделяются и образуют отдельную систему уравнений.

Сформулируем эти отдельные группы двумерных уравнений.

Уравнения “чисто моментной” части задачи магнитоупругости микрополярных тонких оболочек:

уравнения движения

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}+\left(m_i^++m_i^-\right)$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]=2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}-\left(m_3^++m_3^-\right) \qquad (6.4)$$

соотношения упругости

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right]+h\frac{\beta}{\beta+2\gamma}\left(m_3^+-m_3^-\right),\ L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}\right]$$

$$L_{i3}=-2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\chi_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}L_{3i},\quad \text{где } L_{3i}=h\left(m_i^+-m_i^-\right) \qquad (6.5)$$

геометрические соотношения

$$\chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i},\ \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,\ \chi_{i3}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i} \quad (6.6)$$

Уравнения “чисто силовой” части задачи магнитоупругости микрополярных тонких оболочек:

уравнения движения

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\frac{1}{c}j_{01}H_{02}+\frac{1}{c}j_{02}H_{01}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\left(q_3^++q_3^-\right)$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+$$

$$+\left(-1\right)^j\frac{1}{c}j_{0j}H_{03}=2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\left(q_i^++q_i^-\right)$$

$$N_{3i}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial G_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(G_{ii}-G_{jj}\right)-\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial\alpha_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(H_{ji}+H_{ij}\right)+\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}+h\left(q_i^+-q_i^-\right)$$

соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right]-\frac{\nu}{1-\nu}h\left(q_3^+-q_3^-\right),\quad S_{ij}=2\mu h\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right)-\left(-1\right)^j4\alpha h\Omega_3$$

$$N_{i3}=N_{3i}-2h\cdot 4\alpha\Gamma_{i3},\quad G_{ii}=-\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],\quad H_{ij}=\frac{2h^3}{3}\mu\left(K_{12}+K_{21}\right) \quad (6.7)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{i3}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}-\frac{u_i}{R_i}+\left(-1\right)^j\Omega_j,\quad \Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j-\frac{w}{R_i} \quad (6.8)$$

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i,\ K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\beta_j,\ K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\beta_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\beta_i$$

К уравнениям (6.3)-(6.8) следует присоединить уравнения (4.9) для усредненных электрических токов по срединной поверхности оболочки.

Механические граничные условия на контуре Г срединной поверхности оболочки будут выражаться так:

для “чисто моментной части задачи”

$$L_{1i}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_i^*d\alpha_3,\quad L_{13}\Big|_{\Gamma}=-\int_{-h}^{h}m_3^*d\alpha_3-\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\int_{-h}^{h}\alpha_3m_2^*d\alpha_3 \quad (6.9)$$

для “силовой части задачи”

$$T_{11}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3,\qquad S_{12}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3,\qquad G_{11}\Big|_{\Gamma}=-\int_{-h}^{h}\alpha_3p_1^*d\alpha_3$$

$$\left(-N_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_2}\right)\Bigg|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_3^*d\alpha_3+\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\int_{-h}^{h}\alpha_3p_2^*d\alpha_3 \quad (6.10)$$

Уравнения (6.4)-(6.8),(4.9), граничные условия (6.9), (6.10), (4.11) и соответствующие начальные условия образуют общую математическую модель микрополярных упругих электропроводящих неферромагнитных оболочек “с малой сдвиговой жесткостью".

Отметим, что от построенных моделей для оболочек можем получить основные уравнения, граничные и начальные условия для микрополярных упругих электропроводящих не ферромагнитных пластин со свободным вращением; со стесненным вращением; "с малой сдвиговой жесткостью".

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Изд.Физматлит, 1996. 288с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М. В. Некоторые задачи электромагнито-упругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 143с.
4. Багдасарян Г. Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 1999. 440 с.
5. Саркисян С. О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд. НАН Армении, 1992. 232с.
6. Kaliski S. Thermo-magneto-microelasticity //Bull. De L'Academie Polonise des Sciences. 1968. Vol. XVI. № 1. P. 7-13.
7. Kaliski S., Nowacki W. Wave-type Equation of Thermo-magneto-microelasticity// Bull. De L'Academie Polonise des Sciences. 1970. Vol. XVII. № 4. P. 155-159.
8. Maugin G. A. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. 1988.
9. Eringen A. C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundation and Solids. Springer-Verlag. N. Y. 1999. 319p.
10. Багдасарян Г. Е., Асанян Д. Д. Основные уравнения и соотношения теории несимметричной магнитоупругости ферромагнитного тела //В сб.: "Проблемы механики деформируемых тел", посвящённом 80-летию С. А. Амбарцумяна. Ереван: Изд. НАН Армении, 2002. С. 37-47.
11. Саркисян С. О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости //Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С. 41-54.
12. Sargsyan S. H. Dynamic Problem of Thin Plates on the Basis of Asymmetric Theory of Elasticity// Proc. of XXXIV Summer School "Advanced Problems in Mechanics". 2006. Repino, Saint-Petersburg, Russia, 25 June-1 July, 2006. P. 447-458.
13. Саркисян С. О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. № 1. С. 129-147.
14. Саркисян С. О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости //Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С. 309-319.
15. Саркисян С. О. Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек //Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. № 2. С. 54-166.
16. Sargsyan S. H. Analytical Mechanics of Bars, Plates and Shells on Asymmetrical Theory of Elasticity //XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. ICTAM 2008. August 24-29, 2008. Adelaide, Australia. Abstracts book. P. 228.
17. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр. НАН Армении, д.ф-м.н., проф., зав. каф. мат.анализа и дифф. уравнений. Гюмрийский гос. пединститут
Тел.: (312)3–26-29; E-mail: afarmanyan@yahoo.com

Саркисян Лусине Самвеловна–к.ф.-м.н., доцент, н. С. каф. мат.анализа и дифф. уравнений. Гюмрийский гос. пединститут Тел.: (312)3–26-29;
E-mail: afarmanyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 27.06.2009