ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №3, 2010 Механика

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК

САРКИСЯН А. А.

Ключевые слова: тонкие балки, упругие, микрополярные, свободные колебания, собственные частоты, собственные формы.
Key words: thin beams, elastic, micropolar, free oscillation, own frequencies, own forms.

Սարգսյան Ա. Հ.

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի ազատ տատանումները

Աշխատանքում միկրոպոլյար, առաձգական բարակ ձողերի ազատ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով և “փոքր սահքային կոշտությամբ” տեսությունների միաչափ դինամիկ հավասարումների հիման վրա, որտեղ հաշվի են առնված բոլոր պտտա-սահքային դեֆորմացիաները, ուսումնասիրված են ձողերի ազատ տատանումները ծայրերի հոդակապորեն ամրացման դեպքում: Ըստ նշված տեսությունների, լուծելով դրված խնդիրը, որոշված են միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի ծռման տատանումների սեփական հաճախությունններն ու տատանումների սեփական ձևերը ըստ նշված տեսությունների: Բոլոր հաշվումները հանգեցված են վերջնական թվային արդյունքների: Թվային անալիզի հիման վրա պարզաբանվում են միկրոպոլյար առաձգական ձողերի դինամիկական բնութագրերի ինքնատիպ յուրահատկությունները:

Sargsyan A. H.
The Free Vibrations of Micropolar Thin Elastic Bars

The present paper is aimed at the study of free vibrations of thin bars in case of hinged end. The study is based on the one-dimensional dynamic equations of the theories of micropolar thin elastic bars with independent rotation; constraint rotation; and small shift rigidity, in case of which all rotator-shift deformations are taken into consideration. The solution of the formulated problem enables the definition of frequencies proper and forms proper of bending vibrations of micropolar thin elastic bars in terms of the aforementioned theories. All the calculations are reduced to final numerical results. The numerical analysis exposes the peculiarities inherent to the dynamic characteristics of micropolar thin elastic bars.

В работе на основе одномерных динамических уравнений микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью”, при которых учтены все вращательно-сдвиговые деформации, изучены свободные колебания балок при шарнирном опирании на концах. Решая поставленную задачу, определены собственные частоты и собственные формы изгибных колебаний микрополярных упругих тонких балок по указанным теориям. Все расчеты доведены до окончательных численных результатов. На основе численного анализа выявляются специфические особенности динамических характеристик упругих микрополярных балок.

Введение. Построению теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек посвящены работы [1-8]. В работах [9-12], в зависимости от значений безразмерных физических параметров, построены общие математические модели микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек, при которых фактически не учтены поперечные и родственные с ними другие сдвиговые деформации. На основе асимптотического анализа начально-граничных задач несимметричной теории упругости в тонких областях, в работах [13,14] сформулированы предположения (гипотезы), при помощи которых построены общие уточненные модели микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек, при которых в указанных тонких телах полностью учитываются все вращательно-сдвиговые деформации. В работах [15-18], на основе [9-12] теорий микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек со свободным вращением, со стесненным вращением и «с малой сдвиговой жесткостью» изучены колебания шарнирно-опертых балок, прямоугольных и круглых пластин, цилиндрических оболочек.

В данной работе, на основе уточненных общих моделей микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью» [13,14] изучаются собственные изгибные колебания шарнирно-опертых балок. Проводится численный анализ, выявляются специфические особенности колебаний упругих балок из микрополярного материала, сравниваются полученные результаты с соответствующими результатами работ [15-17].

1. **Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением.**

Основные уравнения динамических изгибных колебаний микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций имеют вид [13,14]:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$N_{21} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3}\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \right) = 0$$

соотношения упругости

$$N_{12} = \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha} N_{21} + 2h\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\gamma_{12}, \qquad N_{21} = 2h(\mu+\alpha)\left(\gamma_{21} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\gamma_{12} \right)$$

$$M_{11} = D\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\psi_1(x_1,t) - \frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_3(x_1,t) \right), \qquad L_{13} = 2hB\chi_{13} \tag{1.2}$$

где

$$\gamma_{21} = \psi_1(x_1,t) + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_3(x_1,t), \;\; \gamma_{12} = \frac{\partial w(x_1,t)}{\partial x_1} - \Omega_3(x_1,t), \;\; \chi_{13} = \frac{\partial \Omega_3(x_1,t)}{\partial x_1} \tag{1.3}$$

$D = 2Eh^3/3$ – классическая жесткость балки

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a \tag{1.4}$$

Здесь N_{12}, N_{21} – усилия; M_{11} – усредненный момент от силового напряжения; L_{13} – усредненный момент от моментного напряжения; w – прогиб стержня; Ω_3 – свободный поворот точек средней линии балки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости ее изгиба; ψ_1 – часть этого поворота; E, μ, α, B –упругие константы микрополярного материала балки; γ_{12} и γ_{21} – сдвиговые деформации; χ_{13} – изгибно-крутильная деформация в точках средней линии балки; ρ – плотность материала; J – ее мера инерции при вращении; a – длина балки; $0 \le x_1 \le a$; t – время.

Отметим, что как указанно в работах [13,14], микрополярная теория балок (1.1)-(1.4) имеет место, когда физические безразмерные параметры имеют следующие значения:

$$\frac{\mu}{4\alpha} \sim 1, \qquad \frac{\grave{a}^2\mu}{\hat{A}} \sim 1 \tag{1.5}$$

Из уравнений (1.1)-(1.3) перейдём к уравнениям относительно перемещения w и углов Ω_3, ψ_1 и получим:

$$(\mu-\alpha)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$B\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial x_1^2}-2\alpha\psi_1+2\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_3=J\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}$$

$$(\mu+\alpha)\psi_1+(\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_1}-\frac{Eh^2}{3}\left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}-\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial x_1^2}\right]+ \qquad (1.6)$$

$$+\frac{\rho h^2}{3}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}-\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}\right)=0$$

Граничные условия (1.4) примут вид

$$w=0,\qquad \frac{\partial\psi_1(x_1,t)}{\partial x_1}=0,\qquad \frac{\partial\Omega_3(x_1,t)}{\partial x_1}=0 \ \text{ при } x_1=0;a \qquad (1.7)$$

Представим решение граничной задачи (1.6), (1.7) в виде:

$$w=\left(A_m\cos(p_m t)+B_m\sin(p_m t)\right)\sin\frac{m\pi}{a}x_1$$

$$\Omega_3=\left(A'_m\cos(p_m t)+B'_m\sin(p_m t)\right)\cos\frac{m\pi}{a}x_1 \qquad (1.8)$$

$$\psi_1=\left(A''_m\cos(p_m t)+B''_m\sin(p_m t)\right)\cos\frac{m\pi}{a}x_1$$

где $A_m, B_m, A'_m, B'_m, A''_m, B''_m$ – постоянные; p_m – частота собственных колебаний микрополярной балки со свободным вращением. Подставим решение (1.8) в систему дифференциальных уравнений (1.6), в результате получим однородные алгебраические уравнения относительно $A_m, B_m, A'_m, B'_m, A''_m, B''_m$:

$$\left[\rho p_m^2-(\mu+\alpha)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]A_m+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{m\pi}{a}A'_m-(\mu-\alpha)\frac{m\pi}{a}A''_m=0$$

$$(\mu-\alpha)\frac{m\pi}{a}A_m-\left[\frac{Eh^2}{3}\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\frac{\rho h^2}{3}\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}p_m^2\right]A'_m+$$

$$+\left[(\mu+\alpha)+\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\frac{\rho h^2}{3}p_m^2\right]A''_m=0 \qquad (1.9)$$

$$2\alpha\frac{m\pi}{a}A_m+\left[Jp_m^2-B\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\right]A'_m-2\alpha A''_m=0$$

Поскольку нас интересует ненулевое решение, то потребуем, чтобы детерминант матрицы, соответствующий системе уравнений (1.9), был равен нулю. Тогда для определения собственных частот p_m получим следующее алгебраическое уравнение шестой степени:

$$C_{m1}p_m^6-C_{m2}p_m^4+C_{m3}p_m^2-C_{m4}=0 \qquad (1.10)$$

где $C_{m1} = J\dfrac{\rho^2 h^2}{3}$

$$C_{m2} = \frac{\rho^2 h^2}{3}\left[B\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + 4\alpha\right] + J\rho\left[\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \mu + \alpha + (\mu+\alpha)\frac{h^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned} C_{m3} = {} & J\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left[4\mu\alpha + (\mu+\alpha)\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] + B\rho\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left[\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \right. \\ & \left. + (\mu+\alpha) + (\mu+\alpha)\frac{h^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] + 4\alpha\rho\left[\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \mu + \mu\frac{h^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] \end{aligned} \qquad (1.11)$$

$$C_{m4} = B\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4\left[4\mu\alpha + (\mu+\alpha)\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] + 4\mu\alpha\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4$$

Результаты численных вычислений приведены в табл. 1,2,3.

Таблица 1

Физические параметры материала балки: α = 0,115 ГПа, μ = 1,033 ГПа, λ = 2,195 ГПа, B=γ+ε = 4,23 Н; плотность материала: ρ =590 кг/м^3; мера инерции при вращении: J=5,31·10^{-4} кг/м; $\delta = h/a = 1/40$								
размеры балки		Жесткость		Собственные частоты				
		микро-полярная теория	класси-ческая теория	микрополярная теория балок со свободным вращением [15-18]		уточненная микрополярная теория балок со свободным вращением		
a,мм	h, мм	2Bh, Н·мм	D, Н·мм	P_1, МГц	P_2, МГц	P_1, МГц	P_2,МГц	P_3, МГц
0,01	0,00025	0,00212	0,00000003	262,109	281,496	263,042	281,541	9694,43
0,05	0,00125	0,01058	0,0000036	49,792	59,272	49,951	59,313	1938,89
0,1	0,0025	0,02115	0,000088	23,034	32,031	23,122	32,049	969,94
0,5	0,0125	0,10575	0,003605	2,584	11,42	2,637	11,42	193,91
1	0,025	0,2115	0,028838	0,769	9,599	0,821	9,598	96,98
2	0,0375	0,423	0,230702	0,204	9,033	0,254	9,022	48,56
3	0,075	0,6345	0,77862	0,092	8,921	0,014	8,887	32,46

Таблица 2

Физические параметры материала балки: α = 4,33 МПа, μ = 104 МПа, λ = 416 МПа, B =γ+ε = 45,3 Н; плотность материала: ρ =340 кг/м^3; мера инерции при вращении: J=1,76·10^{-3} кг/м; $\delta = h/a = 1/40$								
размеры балки		Жесткость		Собственные частоты				
		микро-полярная теория	классическая теория	микрополярная теория балок со свободным вращением [15-18]		уточненная микрополярная теория балок со свободным вращением		
a, мм	h, мм	2Bh, Н·мм	D, Н·мм	P_1, Гц	P_2, Гц	P_1, Гц	P_2, Гц	P_3, Гц
0,5	0,0125	1,1325	0,00038	1002918	1396573	1003520	1415740	78497500
1	0,025	2,265	0,00303	494312	708383	495416	717284	39248800
2	0,05	4,53	0,02427	235520	371690	237210	375239	19624400
5	0,125	11,325	0,37917	77145	181561	79213	182200	7849780
10	0,25	22,65	3,03333	27639	126691	29768	126771	3924930
20	0,375	45,3	24,2667	8264	105929	10322	105930	1962540
30	0,75	67,95	81,9	3843	101249	5731	101249	1308440

Таблица 3

<table>
<tr><td colspan="13">Физические параметры материала балки: α = 1,6 ГПа, μ = 2ГПа, λ = 3ГПа, B =γ+ε = 2 кН;
плотность материала: ρ =10⁵ кг/м³; мера инерции при вращении: J=10⁴ кг/м; $\delta = h/a = 1/40$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">размеры балки</td><td colspan="2">Жесткость</td><td colspan="9">Собственные частоты</td></tr>
<tr><td>микро-поляр-ная теория</td><td>класси-ческая теория</td><td colspan="2">уточненная классическая теория балок Тимошенко-Рейсснера</td><td colspan="2">микрополярная теория балок со свободным вращением [15-18]</td><td colspan="3">уточненная микрополярная теория балок со свободным вращением</td></tr>
<tr><td>a мм</td><td>h мм</td><td>$2Bh$ Н·мм</td><td>D Н·мм</td><td>P_1 Гц</td><td>P_2 Гц</td><td>P_1 Гц</td><td>P_2 Гц</td><td>P_1 Гц</td><td>P_2 Гц</td><td>P_3 Гц</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,125</td><td>500</td><td>6,7708</td><td>6473,1</td><td>1966820</td><td>280,9</td><td>118478,4</td><td>282,88</td><td>118479</td><td>2633000</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,25</td><td>1000</td><td>54,167</td><td>3236,5</td><td>983410,2</td><td>140,5</td><td>59241,44</td><td>144,23</td><td>59241,8</td><td>1316500</td></tr>
<tr><td>20</td><td>0,5</td><td>2000</td><td>433,33</td><td>1618,3</td><td>491705,1</td><td>70,23</td><td>29625,22</td><td>77,449</td><td>29625,4</td><td>658251</td></tr>
<tr><td>30</td><td>0,75</td><td>3000</td><td>1462,5</td><td>1078,9</td><td>327803,4</td><td>46,81</td><td>19755,15</td><td>57,064</td><td>19755,3</td><td>438834</td></tr>
<tr><td>50</td><td>1,25</td><td>5000</td><td>6770,8</td><td>647,31</td><td>196682,1</td><td>28,06</td><td>11862,68</td><td>43,022</td><td>11862,7</td><td>263301</td></tr>
</table>

В табл. 1 расчеты сделаны для синтетического полиуретана [19], в табл. 2 – для пенистого полиуретана [19], а в табл. 3 – для гипотетического материала. Как видно из этих таблиц, частоты микрополярной балки могут находиться как в области сверхвысоких частот, так и в области низких частот. Для весьма тонких микрополярных балок частоты по теории работ [15-18] близки к частотам по уточнённой теории микрополярных балок (на основе уточнённой теории получается еще одна высокая частота) при относительно толстых микрополярных балках, результаты по указанным теориям различаются, в последних строках таблиц эта разность составляет 30%÷50%.

2. Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок со стеснённым вращением.

Основные уравнения динамических изгибных колебаний микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций имеют вид [13,14]:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = 2Jh\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}$$
$$N_{21} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0, \tag{2.1}$$

соотношения упругости

$$N_{12} + N_{21} = 4\mu h \gamma_{21}, \quad M_{11} = D\frac{\partial \psi_1(x_1,t)}{\partial x_1}, \quad L_{13} = 2hB\chi_{13} \tag{2.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{21} = \psi_1(x_1,t) + \frac{\partial w(x_1,t)}{\partial x_1}, \ \Omega_3(x_1) = -\frac{1}{2}\left(\psi_1(x_1,t) - \frac{\partial w(x_1,t)}{\partial x_1}\right), \ \chi_{13} = \frac{\partial \Omega_3(x_1,t)}{\partial x_1} \tag{2.3}$$

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; a \tag{2.4}$$

Отметим, что как указанно в работах [13,14], микрополярная теория балок (2.1)-(2.4) имеет место, когда физические безразмерные параметры имеют следующие значения:

$$\frac{\mu}{4\alpha} \sim \delta^2, \qquad \frac{a^2\mu}{B} \sim 1 \tag{2.5}$$

Относительно перемещения w и угла ψ_1 получим следующие уравнения:

$$2\mu\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)+\frac{B}{2}\left(\frac{\partial^3\psi_1}{\partial x_1^3}-\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}\right)=2\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{J}{2}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial x_1\partial t^2}-\frac{J}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial t^2} \tag{2.6}$$

$$2\mu\left(\psi_1+\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)-\frac{B}{2}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}\right)+\frac{J}{2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}-\frac{J}{2}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}-\frac{2Eh^2}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}+\frac{2\rho h^2}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}=0$$

Граничные условия (2.4) примут вид

$$w=0, \qquad \frac{\partial\psi_1(x_1,t)}{\partial x_1}=0, \qquad \frac{\partial^2 w(x_1,t)}{\partial x_1^2}=0 \quad \text{при } x_1=0;a \tag{2.7}$$

Представим решение в следующем виде:

$$w=\left(A_m\cos(p_m t)+B_m\sin(p_m t)\right)\sin\frac{m\pi}{a}x_1$$
$$\psi_1=\left(A''_m\cos(p_m t)+B''_m\sin(p_m t)\right)\cos\frac{m\pi}{a}x_1 \tag{2.8}$$

где A_m, B_m, A''_m, B''_m – постоянные; p_m – частота собственных колебаний микрополярной балки со стесненным вращением. Подставим решение (2.8) в систему дифференциальных уравнений (2.6), в результате получим однородные алгебраические уравнения относительно A_m, B_m, A''_m, B''_m:

$$\left[2\rho p_m^2+\frac{J}{2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\frac{B}{2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4-2\mu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]A_m+\left[\frac{B}{2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3-\frac{J}{2}\frac{m\pi}{a}p_m^2-2\mu\frac{m\pi}{a}\right]A''_m=0$$

$$\left[\frac{J}{2}\frac{m\pi}{a}p_m^2-\frac{B}{2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3+2\mu\frac{m\pi}{a}\right]A_m+\left[\frac{2Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\frac{2\rho h^2}{3}p_m^2-\frac{J}{2}p_m^2+\frac{B}{2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+2\mu\right]A''_m=0$$

Для определения собственных частот p_m получается алгебраическое уравнение четвертой степени:

$$C_{m1}p_m^4-C_{m2}p_m^2+C_{m3}=0 \tag{2.9}$$

где

$$C_{m1}=\frac{4\rho^2h^2}{3}+\rho J+\frac{J\rho h^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

$$C_{m2}=\frac{2Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left[2\rho+\frac{J}{2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]+$$
$$+\left[2\rho+\frac{2\rho h^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\left[2\mu+\frac{B}{2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]+4\mu J\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \tag{2.10}$$

$$C_{m3}=\frac{2Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4\left[2\mu+\frac{B}{2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]+4B\mu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4$$

Решение этого уравнения дает два спектра собственных частот, в то время, как соответствующая теория работ [15-17] дает один спектр собственных частот. Для указанных частот колебаний получим следующие формулы:

$$p_m^2 = \frac{C_{m2} - \sqrt{C_{m2}^2 - 4C_{m1}C_{m3}}}{2C_{m1}} \qquad (2.11)$$

$$p_m^2 = \frac{C_{m2} + \sqrt{C_{m2}^2 - 4C_{m1}C_{m3}}}{2C_{m1}} \qquad (2.12)$$

Результаты численных вычислений приведены в табл. 4, 5.

Таблица 4

Физические параметры материала балки: α = 100 ГПа, μ = 2ГПа, λ = 3ГПа, $B=\gamma+\varepsilon$ = 1 кН; плотность материала: ρ =1114 кг/м^3; мера инерции при вращении: J=0,01 кг/м; $\delta = h/a = 1/40$								
размеры балки		Жесткость		Собственные частоты				
		микро-поляр-ная теория	класси-ческая теория	уточненная классическая теория балок Тимошенко-Рейсснера		микрополярная теория балок со стесненным вращением [15-18]	уточненная микрополярная теория балок со стесненным вращением	
a, мм	h, мм	D*,Н·мм	D, Н·мм	P_1, Гц	P_2, Гц	P_1, Гц	P_1, Гц	P_2, Гц
20	0,5	2433,3	433,3	14607	4889939	24965	24881	975096
10	0,25	1054,2	54,2	30665	9317343	71685	71454	1226098
5	0,125	506,77	6,77	61329	18634687	177831	177517	1907033
3	0,075	301,46	1,46	102215	31057812	317049	316790	2945472
2	0,05	200,43	0,43	153323	46586718	486933	486740	4302747
1,5	0,0375	150,18	0,18	204431	62115624	654849	654698	5682048
1	0,025	100,05	0,05	306647	93173437	988434	988330	8463668
0,5	0,0125	50,007	0,007	613294	186346874	1984389	1984336	16855614

Таблица 5

Физические параметры материала балки: α = 100 ГПа, μ = 2ГПа, λ = 3ГПа, $B=\gamma+\varepsilon$ = 1 кН; плотность материала: ρ =590 кг/м^3; мера инерции при вращении: J=5,31·10^{-6} кг/м; $\delta = h/a = 1/40$								
размеры балки		Жесткость		Собственные частоты				
		микро-поляр-ная теория	класси-ческая теория	уточненная классическая теория балок Тимошенко-Рейсснера		микрополяр-ная теория балок со стесненным вращением [15-18]	уточненная микрополярная теория балок со стесненным вращением	
a мм	h мм	D* Н·мм	D Н·мм	P_1 Гц	P_2 Гц	P_1 Гц	P_1 Гц	P_2 Гц
20	0,5	2433,3	433,3	20072	6719238	37909	37742	6632037
10	0,25	1054,2	54,2	42136	12802910	135212	133985	12240791
5	0,125	506,77	6,77	84272	25605821	519956	506288	21940911
3	0,075	301,46	1,46	140454	42676368	1427596	1337246	30757265
2	0,05	200,43	0,43	210681	64014552	3184075	2791610	38233131
1,5	0,0375	150,18	0,18	280908	85352736	5608053	4552171	44343071
1	0,025	100,05	0,05	421362	128029104	12320534	8520132	56016064
0,5	0,0125	50,007	0,007	842725	256058208	44154390	20984573	93966894

Как видно из табл. 4 и 5 (отметим, что материал балки–гипотетический), видно, что при больших значениях меры инерции J (табл.3) низкая частота, получаемая по уточнённой микрополярной теории балок со стесненным вращением (формула (2.11)) практически совпадает с частотой, получаемой по микрополярной теории балок со стеснённым вращением работ [15-18]. При достаточно малых значениях меры инерции J (табл.4) видно, что низкие частоты практически совпадают при относительно больших размерах, но их отличие становится намного заметнее при малых размерах и в последних строках оно достигает до 30%÷50%.

3. Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок «с малой сдвиговой жёсткостью».

Основные уравнения динамических изгибных колебаний микрополярных упругих тонких балок «с малой сдвиговой жесткостью» с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций имеют вид [13,14] (особенностью этой теории является то, что моментная часть задачи отделяется от силовой части):

«Чисто моментная часть» задачи:

уравнение движения

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} = 2Jh\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

соотношение упругости

$$L_{13} = 2hB\chi_{13} \tag{3.2}$$

геометрическое соотношение

$$\chi_{13} = \frac{\partial \Omega_3\left(x_1, t\right)}{\partial x_1} \tag{3.3}$$

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

$$L_{13} = 0 \text{ при } x_1 = 0; a \tag{3.4}$$

«Силовая часть» задачи:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\ , \quad N_{21} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0 \tag{3.5}$$

соотношения упругости

$$\begin{gathered} N_{21} = 2\mu h\gamma\left(x_1\right), \quad M_{11} = D\frac{\partial \psi_1\left(x_1,t\right)}{\partial x_1} + \nu\frac{h^2}{3}\frac{\partial N_{21}}{\partial x_1} \\ N_{12} = N_{21} - 8h\alpha\Omega_3\left(x_1,t\right) - 4h\alpha\left(\psi_1\left(x_1,t\right) - \frac{\partial w\left(x_1,t\right)}{\partial x_1}\right) \end{gathered} \tag{3.6}$$

геометрическое соотношение

$$\gamma\left(x_1\right) = \psi_1\left(x_1,t\right) + \frac{\partial w\left(x_1,t\right)}{\partial x_1} \tag{3.7}$$

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

$$w = 0, \quad M_{11} = 0 \text{ при } x_1 = 0; a \tag{3.8}$$

Отметим, что как указанно в работах [13,14], микрополярная теория балок (3.1)-(3.8) имеет место, когда физические безразмерные параметры имеют следующие значения:

$$\frac{\mu}{4\alpha} \sim \delta^{-2}, \qquad \frac{a^2\mu}{B} \sim 1 \tag{3.9}$$

Из уравнений (3.1)-(3.3) можем перейти к уравнению относительно угла Ω_3:

$$B\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial x_1^2} - J\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2} = 0 \tag{3.10}$$

к которому присоединим граничные условия (3.4) (с учетом (3.2),(3.3)):

$$\frac{\partial\Omega_3(x_1,t)}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0; a \tag{3.11}$$

Одновременно, из уравнений (3.5)-(3.7) можем перейти к уравнениям относительно перемещения w и угла ψ_1:

$$\begin{gathered}
\mu\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) - 2\alpha\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) - 4\alpha\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
\mu\left(\psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) - \frac{Eh^2}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2} - \frac{\nu\mu h^2}{3}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}\right) + \frac{\rho h^2}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = 0
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Представим решение граничной задачи (3.10), (3.11) в виде:

$$\Omega_3 = \left(A'_m\cos\left(p_m t\right) + B'_m\sin\left(p_m t\right)\right)\cos\frac{m\pi}{a}x_1 \tag{3.13}$$

а решение соответствующих однородных уравнений системы (3.12) – в виде:

$$\begin{gathered}
w = \left(A_m\cos\left(p_m t\right) + B_m\sin\left(p_m t\right)\right)\sin\frac{m\pi}{a}x_1 \\
\psi_1 = \left(A''_m\cos\left(p_m t\right) + B''_m\sin\left(p_m t\right)\right)\cos\frac{m\pi}{a}x_1
\end{gathered} \tag{3.14}$$

где $A_m, B_m, A'_m, B'_m, A''_m, B''_m$ – постоянные; p_m – частота собственных колебаний микрополярной балки «с малой сдвиговой жесткостью».

Подставим решение (3.13) в дифференциальное уравнение (3.10). Поскольку постоянные A'_m, B'_m отличны от нуля, то для определения собственных частот получим:

$$p_m = \frac{m\pi}{a}\sqrt{\frac{B}{J}}, \qquad m = 1,2,... \tag{3.15}$$

Теперь подставим решение (3.15) в систему дифференциальных уравнений (3.12), в результате получим однородные алгебраические уравнения относительно A_m, B_m, A''_m, B''_m:

$$\begin{gathered}
\left[\rho p_m^2 - \mu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]A_m + \left(2\alpha - \mu\right)\frac{m\pi}{a}A''_m = 0 \\
\left[\mu + \frac{\nu\mu h^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\frac{m\pi}{a}A_m + \left[\mu + \frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{\nu\mu h^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{\rho h^2}{3}p_m^2\right]A''_m = 0
\end{gathered} \tag{3.16}$$

Из этой системы для определения собственных частот p_m получим алгебраическое уравнение четвертой степени:

$$C_{m1}p_m^4 - C_{m2}p_m^2 + C_{m3} = 0 \tag{3.17}$$

где

$$C_{m1} = \frac{\rho^2 h^2}{3},\; C_{m2} = \rho\left[\mu + \frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{\nu\mu h^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] + \left(\mu + 2\alpha\right)\frac{\rho h^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \tag{3.18}$$

$$C_{m3} = 4\alpha\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left[\mu + \frac{\nu\mu h^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] + (\mu + 2\alpha)\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4$$

Решение уравнения (3.17) даёт два спектра собственных частот, имеющие вид (2.11), (2.12). В итоге получается три спектра собственных частот (отметим, что по теории, не учитывающей поперечные сдвиги [15-17], имеем два спектра собственных частот).

Результаты численных вычислений приведены в табл.6.

Таблица 6

Физические параметры материала балки: α = 4,33 МПа, μ =104 МПа, λ = 416 МПа, $B=\gamma+\varepsilon$ =45,3 Н; плотность материала: ρ =340 кг/м^3; мера инерции при вращении: $J=4,4\cdot10^{-4}$ кг/м;

размеры балки			Собственные частоты						
			уточненная классическая теория балок Тимошенко-Рейсснера		микрополярная теория балок “с малой сдвиговой жесткостью” [15-18]		уточненная микрополярная теория балок “с малой сдвиговой жесткостью”		
δ=h/a=1/40	a,мм	h,мм	P_1 ,Гц	P_2 ,Гц	P_1 ,Гц	P_2 ,Гц	P_1 ,Гц	P_2 ,Гц	P_3 ,Гц
	3	0,075	43775	12822246	240405	350530	239823	350530	12826399
	6	0,15	21887	6411123	120202	180519	119911	180519	6413199
	8	0,2	16415	4808342	90151	136677	89933	136677	4809899
	15	0,375	8755	2564449	48081	74249	47964	74249	2565279
δ=h/a=1/10	a,мм	h,мм	P_1 ,Гц	P_2 ,Гц	P_1 ,Гц	P_2 ,Гц	P_1 ,Гц	P_2 ,Гц	P_3 ,Гц
	3	0,3	165927	3382781	294555	350530	281938	350530	3399023
	6	0,6	82963	1691391	147277	180519	140969	180519	1699511
	8	0,8	62222	1268543	110458	136677	105727	136677	1274633
	15	1,5	33185	676556	58911	74249	56387	74249	679804

В расчетах использованы параметры упругости для полиуретана с другими инерционными характеристиками [19]. Как отметили, по микрополярной теории “с малой сдвиговой жесткостью” моментная часть полностью отделяется от силовой части задачи. Соответствующая частота при этом обозначена через P_2, эта величина (табл.6) одна и та же как по теории работ [15-18], так и по уточнённой теории (в уточнённой теории и в теории работ [15-18] моментная часть задачи определяется системой одинаковых уравнений и граничных условий). Как видно из табл. 5, низкие частоты по силовой части задачи по теории работ [15-18] и по уточнённой теории почти одинаковые (следовательно, по микрополярной теории «с малой сдвиговой жесткостью» при расчетах рекомендуется руководствоваться наиболее упрощённой теорией [15-18]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Green A.E., Naghdi P.M. The Linear Elastic Cosserat Surface and Shell Theory // Intern. J. Solid and Struct. 1968. V.4. № 6. P.585-592.
2. Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Динамика и прочность машин/ Тр.Ленингр. политех. ин-та. № 386. 1982. С.29-42.
3. Palmov V.A., Altenbach H. Uber eine Cosseratsche Theorie fur elastische Platen // Thechn. Mech. 1982. V.3. №.3. S.3-9.
4. Пальмов В.А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек //В сб.: Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1986. С. 106-112.
5. Шкутин А. И. Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Изд-во «Наука», 1988. 128 с.
6. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Механика упругих микрополярных оболочек // Дальневосточный математический журнал. 2003. Т.4. № 2. С.182-225.

7. Ванин Г.А. Моментная механика тонких оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 4. С.116-138.
8. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. 214 с.
9. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости //Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С.129-147.
10. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости //Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С.41-54.
11. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С.309-319.
12. Саркисян С.О. Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек // Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. № 2. С.154-166.
13. Саркисян С.О. Общие модели микрополярных упругих тонких пластин // Вестник Пермского гос.тех. ун.-та. Математическое моделирование систем и процессов. 2008. №16. С. 111-120.
14. Саркисян С.О. Общая теория тонких пластин на основе несимметричной теории упругости //Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010 (в печати).
15. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Динамические задачи для тонких стержней и пластин по несимметричной теории упругости //Межвуз. сб. научных трудов, посвящённый 80-летию С. Н. Мергеляна. Ванадзор: Государственный педагогический институт им. О. Туманяна. 2008. Т. 2. С. 4-17.
16. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Свободные колебания микрополярных пластин //Тр.VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». Нижный Новгород: Изд.Дом «Диалог Культур», 2008. С.415-423.
17. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Динамические эффекты колебаний микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек. //Первая Всероссийская конференция. Проблемы механики и акустики сред с микро- и наноструктурой: Наномех.-2009. Нижний Новгород, 21-23 сентября, 2009. Тезисы докладов. С.58.
18. Саркисян А.А. Свободные колебания микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек //Сб.тр. Международной школы-конференции молодых ученых. 28 сентября –1 октября, 2009, Агавнадзор, Армения 2009. С.304-309.
19. Lakes R. Experimental Methods for study of Cosserat Elastic Solids and Other Generalized Elastic Continua //Continuum Models for Materials with Micro-Structure (Edited by H. Muhlaus, J. Wiley). New York,1995. P. 1-22.

Сведения об авторе:

Саркисян Арменуи Акоповна – аспирант

Гюмрийский Государственный Пединстиут им. М.Налбандяна

Поступила в редакцию 12.03.2010