

УДК 539.3

**МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩЕГО СЛОЯ В
ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

ВАРТАНОВ А. Г.

Ключевые слова: волна, магнитоупругость, слой.

Key words: wave, magnetoelasticity, layer.

Վարդանով Ա. Հ.

Իդեալական հաղորդիչ շերտի մագնիսաառաձգական տատանումները հաստատուն մագնիսական դաշտում

Աշխատանքում դիտարկվում է մագնիսաառաձգական ալիքի տարածումը իզոտրոպ շերտում: Ենթադրվում է, որ շերտը օժտված է իդեալական հաղորդիչի հատկություններով: Մագնիսական դաշտը ուղղահայաց է ալիքի տարածման հարթությանը: Շերտի մի կողմը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուսը ազատ է լարումներից:

Ստացված է դիսպերսիոն հավասարում և կատարված է թվային հաշվարկ՝ շերտի փուլային արագությունը որոշելու համար:

Vardanov A.H.

Magnetoelastic Vibrations of Perfect Conductive Layer in Constant Magnetic Field

The problem of magnetoelastic waves in an isotropic layer is considered. The layer is immersed in magnetic field and have properties of perfect conductor. The magnetic field is perpendicular to the plane of wave motion. One side of the layer is clamped, and the other is free from mechanical loads.

The dispersion equation is derived. Calculated the phase velocity ratio.

В работе рассматривается распространение магнитоупругой волны в изотропном слое. Слой находится под воздействием постоянного магнитного поля. Слой имеет свойства идеального проводника. Магнитное поле перпендикулярно к плоскости распространения волны. Одна сторона слоя жёстко прикреплена, а другая свободна от напряжений.

Получено дисперсионное уравнение. Выполнены численные расчёты для фазовой скорости волны.

Впервые задача о распространении волн в упругом слое, границы которого свободны от напряжений, была решена Релеем и Лембом [2], а задача слоя, лежащего на жёстком основании, впервые была рассмотрена Ишковым [3]. Задача собственных колебаний ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на основе метода асимптотического интегрирования рассмотрена в [4]. Задачи магнитоупругих колебаний пластин рассмотрены во многих работах [5-7]. К недавно опубликованным работам о магнитоупругих колебаниях можно отнести [8-9].

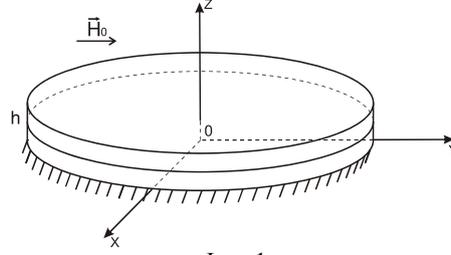
Рассмотрим изотропный упругий идеально проводящий слой, находящийся в постоянном магнитном поле

$$\vec{H}_0 = (0, H_2, 0)$$

Слой ограничен плоскостями $z = (0; h)$. Свойства окружающей среды слоя тождественны со свойствами вакуума.

Пусть в этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью c . Плоскость $z = h$ свободна от напряжений, а плоскость $z = 0$ жёстко закреплена. В бесконечном пространстве плоская продольная волна распространяется со скоростью c_L , а поперечная волна – со скоростью c_T . В слое скорость волны будет

отличной от c_L и c_T . Ограничения упругого пространства двумя плоскостями вызывают возмущения, влияющие на изменения фазовой скорости и напряжённого состояния.



Фиг. 1

Уравнения движения в перемещениях упругого слоя с учётом магнитного поля имеют следующий вид:

$$c_T^2 \Delta_0 \vec{u} + (c_L^2 - c_T^2) \text{grad div } \vec{u} + \frac{\mu_0}{4\pi\rho} \left[\text{rot rot}(\vec{u} \times \vec{H}_0) \right] \times \vec{H}_0 = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

где

$$\Delta_0 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (1')$$

$\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещения, μ_0 – магнитная проницаемость слоя. c_L и c_T – соответственно, продольная и поперечная скорости распространения волны в среде.

Будем рассматривать плоскую задачу, т.е. перемещения u_1 и u_3 будут независимы от переменной y , а $u_2 \equiv 0$.

Эти уравнения в раскрытом виде можно представить как

$$\begin{aligned} c_T^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + c_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ c_1^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + c_T^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$c_1^2 = c_L^2 + v_2^2, \quad v_2^2 = \frac{\mu_0 H_0^2}{4\pi\rho} \quad (2')$$

Аналогично [1], уравнения (2) с помощью введения потенциалов φ, ψ

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

можно привести к виду

$$c_1^2 \Delta \varphi - \ddot{\varphi} = 0, \quad c_T^2 \Delta \psi - \ddot{\psi} = 0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4)$$

Уравнения (4) являются волновыми уравнениями. Их решения будем искать в виде

$$\varphi(x, z, t) = \varphi^*(z) \exp[ik(x - ct)], \quad \psi(x, z, t) = \psi^*(z) \exp[ik(x - ct)] \quad (5)$$

где $\Phi^*(z)$ и $\Psi^*(z)$ – неизвестные функции от переменной z , $k = 2\pi/l$ – волновое число, c – фазовая скорость волны, l – длина волны.

Подставив уравнения (5) в волновые уравнения (4), получим

$$\frac{d^2\Phi^*(z)}{dz^2} - k^2\alpha^2\Phi^*(z) = 0, \quad \frac{d^2\Psi^*(z)}{dz^2} - k^2\beta^2\Psi^*(z) = 0 \quad (6)$$

где

$$\alpha^2 = 1 - \frac{c^2}{c_1^2}, \quad \beta^2 = 1 - \frac{c^2}{c_2^2} \quad (6')$$

Уравнения (6) есть однородные линейные дифференциальные уравнения, решения которых будем искать в виде

$$\Phi^*(z) = A \sin h(k\alpha z) + B \cos h(k\alpha z) \quad (7)$$

$$\Psi^*(z) = C \sin h(k\beta z) + D \cos h(k\beta z)$$

где A, B, C, D – неизвестные постоянные интегрирования.

Вместе с уравнениями (1) рассмотрим линейные уравнения электродинамики окружающей среды (вакуума), которые в нашем случае приводятся к следующим уравнениям:

$$c_0^2 \Delta h_2^{(e)} - \ddot{h}_2^{(e)} = 0, \quad c_0^2 \Delta e_1^{(e)} - \ddot{e}_1^{(e)} = 0 \quad (8)$$

где величины с индексом (e) характеризуют окружающую среду, c_0 – электродинамическая постоянная, h_2 и e_1 – составляющие векторов индуцированного магнитного и электрического полей.

Решения уравнений (8) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} h_2^{(1)} &= C_1 \exp[-v_3 z + ik(x - ct)] \\ e_1^{(1)} &= C_2 \exp[-v_3 z + ik(x - ct)] \end{aligned} \quad \text{при } z \geq h \quad (9)$$

$$\begin{aligned} h_2^{(2)} &= C_3 \exp[v_3 z + ik(x - ct)] \\ e_1^{(2)} &= C_4 \exp[v_3 z + ik(x - ct)] \end{aligned} \quad \text{при } z \leq 0$$

$$\text{где } v_3^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_0^2} \right)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные, связанные между собой следующими выражениями:

$$C_1 = -\frac{ikc}{c_0 v_3} C_2, \quad C_3 = \frac{ikc}{c_0 v_3} C_4 \quad (9')$$

Далее, имеем 6 граничных условий на поверхностях пластинки:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} + T_{13} &= T_{13}^{(1)} & u_1 &= 0 \\ \sigma_{33} + T_{33} &= T_{33}^{(1)} \quad \text{при } z = h, & u_3 &= 0 & \text{при } z = 0 \\ e_1 &= e_1^{(1)} & e_1 &= e_1^{(2)} \end{aligned} \quad (10)$$

где σ_{13} и σ_{33} – компоненты тензора напряжений, T_{13} и T_{33} – компоненты тензора Максвелла, которые имеют следующий вид:

$$T_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} (H_i h_j + H_j h_i) - \delta_{ij} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{H}_0 \vec{h} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (11)$$

В нашем случае тензор Максвелла [6] имеет вид

$$T_{13} = T_{13}^{(1)} = 0, \quad T_{33} = -\frac{\mu_0}{4\pi} h_2 H_2, \quad T_{33}^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} h_2^{(1)} H_2 \quad (12)$$

где

$$h_2 = -H_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \quad (13)$$

Из закона Ома для движущейся среды [6] имеем

$$\vec{j} = 4\pi\sigma \left(\vec{e} + \frac{\mu_0}{c_0} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right)$$

Для идеального проводника имеем

$$e_1 \approx \frac{\mu_0}{c_0} \frac{\partial u_3}{\partial t} H_2 \quad (14)$$

Таким образом, получим граничные условия в виде:

$$\sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{33} - \frac{\mu_0}{4\pi} H_2^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) = -\frac{1}{4\pi} H_2 h_2^{(1)} \quad \text{при } z = h \quad (15)$$

$$\frac{\mu_0}{c_0} \frac{\partial u_3}{\partial t} H_2 = e_1^{(1)}$$

$$u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \frac{\mu_0}{c_0} \frac{\partial u_3}{\partial t} H_2 = e_1^{(2)} \quad \text{при } z = 0 \quad (16)$$

Закон Гука для изотропного тела имеет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

отсюда получим

$$\sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda\varepsilon_{11} \quad (17)$$

Для деформации имеем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (18)$$

Подставив уравнения (18) в (17), получим напряжения, представленные перемещениями

$$\sigma_{13} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right), \quad \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (19)$$

Подставив уравнения (12), (13), (14), (19) в (15) и (16), получим граничные условия, представленные перемещениями. Далее получим граничные условия для функции Φ и Ψ . Подставив значения Φ и Ψ (7) и удовлетворяя граничным условиям, получим следующую однородную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} Aa_{11} + Ba_{12} + Ca_{13} + Da_{14} = 0 \\ Aa_{21} + Ba_{22} + Ca_{23} + Da_{24} + C_1a_{25} = 0 \\ Aa_{31} + Ba_{32} + Ca_{33} + Da_{34} + C_1a_{35} = 0 \\ \phantom{Aa_{31} + Ba_{32} + Ca_{33} + Da_{34} + C_1a_{35} = 0} Ba_{42} + Ca_{43} = 0 \\ \phantom{Aa_{31} + Ba_{32} + Ca_{33} + Da_{34} + C_1a_{35} = 0} Aa_{51} + Da_{54} = 0 \\ \phantom{Aa_{31} + Ba_{32} + Ca_{33} + Da_{34} + C_1a_{35} = 0} Ba_{62} + Da_{64} + C_4a_{66} = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

где приняты следующие обозначения:

$$a_{11} = 2i\alpha \cos h(k\alpha h), \quad a_{12} = 2i\alpha \sin h(k\alpha h)$$

$$a_{13} = -(1 + \beta^2) \sin h(k\beta h), \quad a_{14} = -(1 + \beta^2) \cos h(k\beta h)$$

$$a_{21} = \left(2\mu\alpha^2 + \lambda(\alpha^2 - 1) + \frac{\mu_0 H_2^2}{4\pi} (\alpha^2 - 1) \right) \sin h(k\alpha h)$$

$$a_{22} = \left(2\mu\alpha^2 + \lambda(\alpha^2 - 1) + \frac{\mu_0 H_2^2}{4\pi} (\alpha^2 - 1) \right) \cos h(k\alpha h)$$

$$a_{23} = 2i\mu\beta \cos h(k\beta h), \quad a_{24} = 2i\mu\beta \sin h(k\beta h), \quad a_{25} = \frac{H_2 e^{-v_3 h}}{4\pi k^2}$$

$$a_{31} = -i\alpha \sin h(k\alpha h), \quad a_{32} = -i\alpha \cos h(k\alpha h), \quad a_{41} = a_{44} = a_{52} =$$

$$a_{33} = \sin h(k\beta h), \quad a_{34} = \cos h(k\beta h), \quad = a_{53} = a_{61} = a_{63} = 0$$

$$a_{35} = \frac{c_0^2 v_3 e^{-v_3 h}}{ik^3 c^2 \mu_0 H_2}, \quad a_{42} = a_{54} = i, \quad a_{43} = -\beta$$

$$a_{51} = \alpha, \quad a_{62} = -i\alpha, \quad a_{64} = 1, \quad a_{66} = -\frac{c_0}{\mu_0 H_2 k^2 c}$$

Для того, чтобы система уравнений (20) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель матрицы его коэффициентов был равен нулю

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & 0 & 0 \\ 0 & a_{62} & 0 & a_{64} & 0 & a_{66} \end{pmatrix} = 0$$

Имея в виду, что $c^2/c_0^2 \ll 1$ и выполнив необходимые упрощения, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 \cos h(hk\alpha) \cos h(hk\beta) + \Gamma_3 \sin h(hk\alpha) \sin h(hk\beta) = 0 \quad (21)$$

где приняв во внимание обозначения (1'), (2'), (6'), а также

$$\eta^2 = \frac{c^2}{c_T^2}, \quad \theta = \frac{c_T^2}{c_1^2}, \quad \theta_A = \frac{c_T^2}{c_L^2}, \quad \gamma = \frac{v_2^2}{c_L^2}, \quad \theta = \frac{\theta_A}{1+\gamma} \quad (22)$$

получим

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -2\sqrt{1-\eta^2}\theta\sqrt{1-\eta^2} \left(\eta^2\theta(\gamma-1) + \theta_A(4-\eta^2) \right) \\ \Gamma_2 &= \sqrt{1-\eta^2}\theta\sqrt{1-\eta^2} \left(4\theta_A + (2-\eta^2)(2\theta_A - \eta^2\theta(1+\gamma)) \right) \\ \Gamma_3 &= (2-\eta^2)(\eta^2\theta+\gamma) + 2\theta_A \left(\eta^2(3+2\theta(1-\eta^2)) - 4 \right) \end{aligned}$$

Напишем уравнение (21) в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(\eta) &= -2 \left(\eta^2\theta(\gamma-1) + \theta_A(4-\eta^2) \right) + \\ &+ \left(4\theta_A + (2-\eta^2)(2\theta_A - \eta^2\theta(1+\gamma)) \right) \cos h \left(hk\sqrt{1-\eta^2}\theta \right) \cos h \left(hk\sqrt{1-\eta^2} \right) + \\ &+ \left((2-\eta^2)(\eta^2\theta+\gamma) + 2\theta_A \left(\eta^2(3+2\theta(1-\eta^2)) - 4 \right) \right) \frac{\sin h \left(hk\sqrt{1-\eta^2}\theta \right) \sin h \left(hk\sqrt{1-\eta^2} \right)}{\sqrt{1-\eta^2}\theta\sqrt{1-\eta^2}} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь нами будут рассмотрены решения, относящиеся к случаю $\eta < 1$.

Как следует из численного решения уравнения (23), это уравнение не имеет решений $\eta < 1$ при малых hk .

Таблица 1

$\theta_A = 0.25; \quad \theta = \theta_A/1+\gamma$						
γ	0	10^{-4}	10^{-3}	0,01	0,1	0,2
hk	4.145	4.147	4.163	4.336	7.045	20.784

Таблица 2

$\theta_A = 1/3 \quad (\lambda = \mu)$						
γ	0	10^{-4}	10^{-3}	0,01	0,1	0,2
hk	3.806	3.807	3.819	3.942	5.616	9.792

В табл. 1 и 2 представлены предельные значения параметра hk , до которого уравнение (23) не имеет решения с фазовой скоростью меньше, чем скорость поперечной волны при разных θ и γ . γ характеризует магнитное поле, а $\theta_A = c_T^2/c_L^2$.

Для последующих числовых расчётов удобно сделать следующие обозначения, следуя Лембу [2]:

$$hk\alpha = \omega, \quad hk\beta = m\omega \quad \text{и} \quad \rho v_2^2 = \mu\beta_2^2.$$

Для простоты, здесь и в последующих расчётах рассматривается случай $\theta_A = 1/3$ ($\lambda = \mu$). В этом случае дисперсионное уравнение (21) примет вид:

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 \cos h(\omega) \cos h(m\omega) + \Gamma_3 \sin h(\omega) \sin h(m\omega) = 0$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{4\sqrt{2}m(2\beta_2^2(m^2 - 3) - 3(3 + m^2))\sqrt{6 - \beta_2^2(m^2 - 3)}}{(3 + \beta_2^2)(m^2 - 3)^2\sqrt{3 + \beta_2^2}}$$

$$\Gamma_2 = \frac{\sqrt{2}m(5m^4 - 18m^2 + 45)\sqrt{6 - \beta_2^2(m^2 - 3)}}{(m^2 - 3)^3\sqrt{3 + \beta_2^2}}$$

$$\Gamma_3 = \frac{\beta_2^2(7m^4 - 30m^2 - 9) - 3(m^4 + 22m^2 + 9)}{(3 + \beta_2^2)(m^2 - 3)^2}$$

А для η и hk получим

$$\eta = \sqrt{\frac{(m^2 - 1)(3 + \beta_2^2)}{m^2 - 3 - \beta_2^2}}; \quad kh = \sqrt{\frac{3 - m^2}{2}}\omega^2$$

В таблицах представлены числовые расчёты безмерной фазовой скорости η от величины hk , характерной толщины слоя при различных значениях магнитного поля.

Таблица 3

$\beta_2^2 = 0$		$\beta_2^2 = 0.001$		$\beta_2^2 = 0.01$		$\beta_2^2 = 0.1$		$\beta_2^2 = 0.2$	
hk	η	hk	η	hk	η	hk	η	hk	η
5,239	0,942	5,239	0,942	5,239	0,942	5,247	0,941	5,284	0,94
4,346	0,968	4,346	0,968	4,346	0,968	4,352	0,968	4,367	0,967
4,006	0,986	4,006	0,986	4,006	0,986	4,009	0,986	4,02	0,985
3,851	0,996	3,851	0,996	3,851	0,996	3,854	0,996	3,863	0,996
3,806	1	3,806	1	3,809	1	3,833	1	3,858	1
3,763	1,003	3,763	1,003	3,765	1,003	3,788	1,003	3,812	1,003
3,483	1,028	3,483	1,028	3,483	1,028	3,498	1,029	3,513	1,029
2,958	1,101	2,958	1,101	2,958	1,102	2,959	1,103	2,959	1,105
2,676	1,162	2,676	1,162	2,675	1,163	2,67	1,165	2,66	1,169
2,458	1,224	2,458	1,224	2,456	1,225	2,446	1,229	2,434	1,234
1,929	1,463	1,929	1,464	1,926	1,465	1,903	1,477	1,877	1,49
1,689	1,638	1,689	1,638	1,686	1,64	1,659	1,661	1,626	1,683
1,605	1,715	1,605	1,715	1,611	1,717	1,608	1,742	1,573	1,769
0	1,732	0	1,732	0	1,734	0	1,76	0	1,788

Наименьшее значение фазовая скорость принимает при $hk \rightarrow \infty$, равное скорости Релея. С уменьшением hk фазовая скорость увеличивается, достигая значения $\sqrt{3 + \beta_2^2}$. Магнитное поле слабо влияет на фазовую скорость при $hk > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA., vol. 93, 1917.
3. Ишков П.К. О распространении упругих волн в слое, лежащем на жёстком основании. //Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1941. №2. С.169-176.
4. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. // Изв.НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С. 18–28.
5. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
6. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991.
7. Саркисян С.В. К задаче распространения магнитоупругих волн в пластине. //Тр.14-ой Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Кутаиси: 1987. Т.2. С.400-405.
8. Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В. Определение частот изгибных колебаний магнитоупругой цилиндрической оболочки //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №3. С.227–237.
9. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localized Magnetoelastic Bending Vibration of an Electroconductive Elastic Plate, Journal of Applied Mechanics, Transaction ASME, USA, November 2007, vol. 74, p. 1071-1077.

Сведения об авторе:

Варганов Арташес Гайкович,

Аспирант Института механики НАН Армении

Адрес: Ереван, 0019, пр. Маршала Баграмяна 24^б

E-mail: geops@mail.ru

Поступила в редакцию 17.06.2009