ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №3, 2010 Механика

УДК 539

К МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ВЕСЬМА ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

АМБАРЦУМЯН С.А., БЕЛУБЕКЯН М.В.

Ключевые слова: пологая оболочка, микровращение, изгиб, колебание
Keywords: shallow shell, microrotation, bending, vibration

Համբարձումյան Ս.Ա., Բելուբեկյան Մ.Վ.
Փոքր կորություն ունեցող թաղանթների միկրոբևեռ տեսության վերաբերյալ

Կիրխով-Լյավի վարկածի և պսևդո Կոսեռայի միջավայրի տեսության հիման վրա առաջարկված է փոքր կորություն ունեցող թաղանթների տեսություն:

Հետազոտված է փոքր կորություն ունեցող սֆերիկ թաղանթի ծռման և տատանումների խնդիրները: Որոշված է թաղանթի հաստության չափը, որի դեպքում միկրոպտույտները էական են:

Ambartsumian S.A., Belubekyan M.V.
On micropolar theory of shallow shells

The simplified theory of the shallow shells is suggested on the base of the Kirchhof-Love hypothesis and psevdo-Cosserat medium. The bending and vibrations problem of the shallow spherical shell is investigated. The value of shell small thickness is determined, when microrotational are essential.

Предлагается теория весьма пологих оболочек, основанная на гипотезе Кирхгофа-Лява и среды псевдо Коссера. Исследуется задача изгиба и колебания пологой сферической оболочки. Устанавливается порядок малости толщины оболочки, при которой учет микровращений имеет существенное значение.

Рассматривается вопрос построения микрополярной технической теории весьма пологих тонких оболочек на основании общей теории оболочек [1,2] и теории псевдоконтинуума Коссера [3].

1.Теория строится на основании следующих гипотез и предположений:

а) гипотеза недеформируемых нормалей Кирхгоффа –Лява 1,2,4];

б) основные положения теории псевдоконтинуума Коссера, в предположении, что повороты в плоскостях, параллельных срединной поверхности, пренебрежительно малы и при дифференцировании ведут себя как постоянные [1];

в) оболочка описывается в смешанной системе триортогональных координат α_i, где α_1 и α_2 – криволинейные координаты, совпадающие с направлениями главных кривизн срединной поверхности оболочки, α_3 – нормальная к ним прямолинейная координата;

г) коэффициенты первой квадратичной формы и главные кривизны срединной поверхности оболочки k_i при дифференцировании ведут себя как постоянные [1,4];

д) теория строится с точностью $1 \pm k_i \alpha_3 \approx 1$, и соответствующие коррективы, при очевидности, вводятся по ходу изложения.

2. Согласно принятым гипотезам и предположениям для перемещений какой-либо точки оболочки имеем [1,4]:

$$u_1 = u - \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \quad u_2 = \mathrm{v} - \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \quad u_3 = w \tag{2.1}$$

где $u = u(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathrm{v} = \mathrm{v}(\alpha_1, \alpha_2)$ и $w = w(\alpha_1, \alpha_2)$ – продольные и поперечное перемещения срединной поверхности оболочки.

С учетом принятых предположений и (2.1) для поворотов имеем [3,5]

$$\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \ \omega_2 = -\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \ \omega_3 \approx 0 \tag{2.2}$$

Для компонент несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения получим [3,6]:

$$\begin{gathered} \gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} - \alpha_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + k_1 w, \quad \gamma_{33} = 0 \\ \gamma_{22} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \alpha_2} - \alpha_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + k_2 w \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \gamma_{12} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \alpha_1} - \alpha_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \\ \gamma_{23} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \alpha_2} - \alpha_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \end{gathered} \tag{2.4}$$

Далее

$$\begin{gathered} \chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \ \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \ \chi_{33} = 0 \\ \chi_{13} = -k_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \ \chi_{23} = k_2 \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \qquad \chi_{31} = 0 \\ \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, \qquad \chi_{21} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, \qquad \chi_{32} = 0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Закон малых упругих деформаций имеет вид [3]

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + \sigma_{ij}\lambda\gamma_{kk} \tag{2.6}$$

$$\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ij} + \sigma_{ij}\beta\chi_{kk} \tag{2.7}$$

где σ_{ji} – силовые напряжения; μ_{ji} – моментные напряжения; $\mu = E/2(1+\nu)$; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; $\lambda = \nu E/(1+\nu)(1-2\nu)$; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – новые упругие постоянные; σ_{ji} – символ Кронекера.

Согласно гипотезе Кирхгофа–Лява, пренебрегая нормальным напряжением σ_{33} из (2.6) , для нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22} получим

$$\sigma_{11} = B\gamma_{11} + B_{12}\gamma_{22}, \ \sigma_{22} = B\gamma_{22} + B_{12}\gamma_{11} \tag{2.8}$$

где $B = \dfrac{E}{1-\nu^2}, \quad B_{12} = \dfrac{\nu E}{1-\nu^2}$ (2.9)

Для касательных напряжений σ_{12} и σ_{21}, учитывая, что $\delta_{ji} = 0$ при $i \neq j$, получим

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} \tag{2.10}$$

Из (2.7), согласно (2.5) и значению символа Кронекера $\delta_{ii}=1$, для моментных напряжений μ_{ii} получим

$$\mu_{11}=(2\gamma+\beta)\chi_{11}+\beta\chi_{22},\ \ \mu_{22}=(2\gamma+\beta)\chi_{22}+\beta\chi_{11},\ \ \mu_{33}=0 \tag{2.11}$$

а для остальных напряжений, естественно,

$$\mu_{ji}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{ji}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ij} \tag{2.12}$$

Подставляя значения γ_{ji} и χ_{ji}, соответственно, из (2.3)–(2.5) в (2.8)–(2.12), для силовых и моментных напряжений получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}&=B\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+B_{12}\frac{\partial u}{\partial\alpha_2}+\left(Bk_1+B_{12}k_2\right)w-\alpha_3\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}\right)\\ \sigma_{22}&=B\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\alpha_2}+B_{12}\frac{\partial u}{\partial\alpha 1}+\left(Bk_2+B_{12}k_1\right)w-\alpha_3\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}\right)\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12}&=\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial\alpha_2}\right)+\alpha\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial\alpha_2}\right)-2\alpha_3\mu\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\\ \sigma_{21}&=\mu\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\alpha_1}\right)+\alpha\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\alpha_1}\right)-2\alpha_3\mu\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\end{aligned} \tag{2.14}$$

Остальные силовые напряжения при необходимости будут определяться из уравнений равновесия.

Далее имеем:

$$\mu_{11}=2\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},\ \ \mu_{22}=-2\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},\ \ \mu_{33}=0 \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\mu_{12}&=-(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}\\ \mu_{21}&=(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}-(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\mu_{13}&=-k_1(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial w}{\partial\alpha_2},\ \ \mu_{31}=-k_1(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\\ \mu_{23}&=-k_2(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial w}{\partial\alpha_1},\ \ \mu_{32}=k_2(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\end{aligned} \tag{2.17}$$

Уравнения движения без учета объемных сил и объемных моментов имеют вид [1,3,6]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\sigma_{31}\right)+k_1\sigma_{13}=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\\ &\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\sigma_{32}\right)+k_2\sigma_{23}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ &\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\sigma_{33}\right)+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\alpha_2}-k_2\sigma_{22}-k_1\sigma_{11}=\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{2.18}$$

а также

$$\frac{\partial\mu_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\mu_{31}\right)+k_1\mu_{13}+\sigma_{23}-\sigma_{32}=J\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial\mu_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\mu_{12}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\mu_{32}\right)+k_1\mu_{23}+\sigma_{31}-\sigma_{13}=J\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\mu_{33}\right)+\frac{\partial\mu_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial\alpha_2}-k_2\mu_{22}-k_1\mu_{11}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0$$

где

$$H_1=1+\alpha_3k_1,\quad H_2=1+k_2\alpha_3 \quad (2.20)$$

ρ – плотность материала оболочки, J – динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении)

3. Пусть условия на внешних поверхностях оболочки ($\alpha_3=\pm h/2,\ h$ – толщина оболочки) таковы:

$$\sigma_{33}=Z^+,\ \ \sigma_{31}=X^+,\ \ \sigma_{32}=Y^+ \quad \text{при} \quad \alpha_3=\frac{h}{2}$$

$$\sigma_{33}=-Z^-,\ \ \sigma_{31}=-X^-,\ \ \sigma_{32}=-Y^- \quad \text{при} \quad \alpha_3=-\frac{h}{2} \quad (3.1)$$

$$\mu_{33}=0,\ \ \mu_{31}=0,\ \ \mu_{32}=0 \quad \text{при} \quad \alpha_3=\pm\frac{h}{2}$$

Согласно (2.1), (2.18), (3.1), осредненные уравнения движения запишутся следующим образом [1,2,6,7]:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial S_{21}}{\partial\alpha_2}=-X_2+\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial T_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial S_{12}}{\partial\alpha_1}=-Y_2+\rho\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial\alpha_2}-k_1T_{11}-k_2T_{22}=-Z_2+\rho h\frac{\partial^2w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial H_{21}}{\partial\alpha_2}-\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{31}d\alpha_3=-hX_1-\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^3w}{\partial\alpha_1\partial t^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_1}-\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{32}d\alpha_3=-hY_1-\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^3w}{\partial\alpha_1\partial t^2}$$

Здесь, как и в классической теории пологих оболочек [1,4], в первых двух уравнениях (3.2) опущены члены k_1N_{13} и k_2N_{23} . Третье уравнение (моментное-силовое) не приводится, так как считается, что они с точностью $1\mp\alpha_3k_i$ удовлетворены тождественно [1,2].

Что касается шестого уравнения равновесия, которое имеет вид [1,2,4]

$$S_{12}-S_{21}+k_1H_{12}-k_2H_{21}=0 \quad (3.4)$$

с точностью теории весьма пологих оболочек удовлетворяется тождественно [1,2].

Согласно (2.2), (2.19) и (3.1), осредненные уравнения движения запишутся следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial R_{21}}{\partial \alpha_2} + k_1 Q_{13} + N_{23} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{32} d\alpha_3 = Jh \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_2 \partial t^2} \\ &\frac{\partial P_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial R_{12}}{\partial \alpha_1} + k_2 Q_{23} - N_{23} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} d\alpha_3 = Jh \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_1 \partial t^2} \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Третье «планарное» уравнение движения, которое имеет вид

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial \alpha_2} - k_2 P_{22} - k_1 P_{11} + S_{12} - S_{21} = 0 \qquad (3.6)$$

с принятой точностью также удовлетворяется тождественно.

Для внутренних сил и моментов, входящих в уравнения (3.2)-(3.6), согласно (2.13)-(2.17) имеем:

$$\begin{aligned} &T_{11} = Bh\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + k_1 w\right) + B_{12} h\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \alpha_2} + k_2 w\right) \\ &T_{22} = Bh\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \alpha_2} + k_2 w\right) + B_{12} h\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + k_1 w\right) \end{aligned} \qquad (3.7)$$

$$\begin{aligned} &S_{12} = \mu h\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_2}\right) + \alpha h\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u}{\partial \alpha_2}\right) \\ &S_{21} = \mu h\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \alpha_1}\right) + \alpha h\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \alpha_1}\right) \end{aligned} \qquad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &M_{11} = -\frac{Bh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - \frac{B_{12} h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \\ &M_{22} = -\frac{Bh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} - \frac{B_{12} h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \end{aligned} \qquad (3.9)$$

$$H_{12} = H_{21} = -2\mu \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \qquad (3.10)$$

$$P_{12} = 2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad P_{22} = -2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \qquad (3.11)$$

$$\begin{aligned} &R_{12} = -(\gamma + \varepsilon) h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + (\gamma - \varepsilon) h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \\ &R_{21} = (\gamma + \varepsilon) h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} - (\gamma - \varepsilon) h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \end{aligned} \qquad (3.12)$$

$$Q_{13} = -(\gamma + \varepsilon) h k_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \; Q_{23} = (\gamma + \varepsilon) h k_2 \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \qquad (3.13)$$

С помощью уравнений (3.3) и (3.5) из третьего уравнения системы (3.2), исключая N_{13} и N_{23}, получим следующее уравнение движения:

$$
\frac{\partial^2(\mu_{11}+R_{12})}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2(H_{12}+H_{21}+P_{22}-P_{11})}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+\frac{\partial^2(M_{22}-R_{21})}{\partial\alpha_2^2}-
$$

$$
-k_1\frac{\partial Q_{13}}{\partial\alpha_2}+k_2\frac{\partial Q_{23}}{\partial\alpha_1}-k_1T_{11}-k_2T_{22}=-Z_2-h\left(\frac{\partial X_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial Y_1}{\partial\alpha_2}\right)+ \tag{3.14}
$$

$$
+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-h\left(\rho\frac{h^2}{12}+J\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
$$

Таким образом, получили замкнутую систему из трех уравнений движения (3.2) и (3.14), где для силовых членов имеем

$$
X_1=\frac{X^+-X^-}{2},\ Y_1=\frac{Y^+-Y^-}{2},\ Z_2=Z^++Z^-
$$

$$
X_2=X^++X^-,\ Y_2=Y^++Y^-, \tag{3.15}
$$

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (3.7)-(3.13) в первые два уравнения (3.2) и в уравнения (3.14), получим следующую систему дифференциальных уравнений движения в искомых перемещениях $u(\alpha_1,\alpha_2)$, $\mathrm{v}(\alpha_1,\alpha_2)$ и $w(\alpha_1,\alpha_2)$:

$$
B\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1^2}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_2^2}+a_{12}\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+(Bk_1+B_{12}k_2)\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}=-\frac{X_2}{h}+\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.16}
$$

$$
B\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial\alpha_2^2}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial\alpha_1^2}+a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+(Bk_2+B_{12}k_1)\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}=-\frac{Y_2}{h}+\rho\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial t^2} \tag{3.17}
$$

$$
a_{33}\Delta\Delta w+(Bk_1+B_{12}k_2)\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+(Bk_2+B_{12}k_1)\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial\alpha_2}+
$$

$$
+(\gamma+\varepsilon)\left(k_1^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}+k_2^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}\right)w+\left(Bk_1^2+2B_{12}k_1k_2+Bk_2^2\right)w= \tag{3.18}
$$

$$
=\frac{Z_2}{h}+\left(\frac{\partial X_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial Y_1}{\partial\alpha_2}\right)-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\left(\rho\frac{h^2}{12}+J\right)\Delta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
$$

где

$$
a_{12}=B_{12}+\mu-\alpha,\ a_{33}=\frac{Bh^2}{12}+\gamma+\varepsilon,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2} \tag{3.19}
$$

Вероятнее всего, во многих задачах весьма пологих оболочек члены с множителями k_i^2 в уравнении (3.19) могут быть пренебрежены.

Граничные условия имеют структуру граничных условий классической теории, однако имеют некоторое иное содержание [1,4,6].

Граничные условия запишем лишь для края, определяющегося координатной линией $\alpha_1=\alpha_0=\mathrm{const}$:

а) свободный край –

$$
T_{11}=0,\ S_{12}+k_2(H_{12}-P_{11})=0,\ N_{13}+\frac{\partial(H_{12}-P_{11})}{\partial\alpha_2}=0,\ M_{11}+R_{12}=0 \tag{3.20}
$$

б) шарнирно закреплённый край –

$$
M_{11}+R_{12}=0,\ T_{11}=0,\ w=0,\ \mathrm{v}=0 \tag{3.21}
$$

в) заделанный край –

$$u=0,\quad \mathrm{v}=0,\;\; w=0,\quad -\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+k_1 u=0 \tag{3.22}$$

Очевидно, возможны и другие непротиворечащие варианты граничных условий [1,2,4,6].

Перерезывающие силы определяются из уравнений (3.3), (3.5) и имеют вид

$$\begin{aligned} N_{13}&=\frac{\partial\left(M_{11}+R_{12}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(H_{21}+P_{22}\right)}{\partial\alpha_2}+k_2 Q_{23}+hX_1\\ N_{23}&=\frac{\partial\left(M_{22}+R_{21}\right)}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\left(H_{12}+P_{11}\right)}{\partial\alpha_1}-k_1 Q_{13}+hY_1 \end{aligned} \tag{3.23}$$

4. Рассмотрим две задачи.

а) Весьма пологая оболочка в виде сферического прямоугольника перекрывает площадь $a\times b$, имеет толщину h и кривизну срединной поверхности $k_1=k_2=k=R^{-1}$. Оболочка шарнирно закреплена по всему контуру $\left(\alpha_1=0,a;\ \alpha_2=0,b\right)$ и несёт нормально приложенную нагрузку

$$Z_2=q\sin\frac{\pi\alpha_1}{a}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b},\;\; X^{\pm}=0,\;\; Y^{\pm}=0 \tag{4.1}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} &T_{11}=0,\; M_{11}+R_{12}=0,\; \mathrm{v}=0,\; w=0 \quad \text{при} \quad \alpha_1=0,\alpha_1=a\\ &T_{22}=0,\; M_{22}-R_{21}=0,\; u=0,\; w=0 \quad \text{при} \quad \alpha_2=0,\alpha_2=b \end{aligned} \tag{4.2}$$

Полагая

$$u=A_1\cos\frac{\pi\alpha_1}{a}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b},\;\; \mathrm{v}=A_2\sin\frac{\pi\alpha_1}{a}\cos\frac{\pi\alpha_2}{b},\;\; w=A\sin\frac{\pi\alpha_1}{a}\sin\frac{\pi\alpha_2}{b} \tag{4.3}$$

удовлетворяем граничным условиям (4.2), а из системы уравнений (3.16)–(3.18), согласно (3.19) и (4.1), для искомых постоянных A_i получим:

$$A_1=\frac{1+\nu}{\pi R}a\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}A,\;\; A_2=\frac{1+\nu}{\pi R}\frac{a^2}{b}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1} \tag{4.4}$$

$$A=\frac{qa^4}{D\pi^4}\left[\left(\gamma_0+1\right)\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^2+\frac{12\left(1-\nu^2\right)a^4}{\pi^2R^2h^2}-\gamma_0\frac{a^2}{\pi^2R^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\right]^{-1} \tag{4.5}$$

где $$\gamma_0=12\frac{\gamma+\varepsilon}{Bh^2}=\frac{6\left(1-\nu\right)}{\mu h^2}\left(\gamma+\varepsilon\right),\quad D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \tag{4.6}$$

Обратим внимание, что в формулах отсутствуют постоянные α и β, которые тоже характеризуют микрополярность, однако при этом постоянное α фигурирует в соответственных формулах расчётных напряжений и внутренних усилий.

Из (4.4) и (4.5) при $\gamma=0$, т.е. без учёта явлений микрополярности получим соответствующие представления классической теории [4], в частности, из (4.5) для постоянного A имеем:

$$A_0=\frac{qa^4}{D\pi^4}\left[\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^2+\frac{12\left(1-\nu^2\right)a^4}{\pi^2R^2h^2}\right]^{-1} \tag{4.7}$$

Сопоставляя (4.5) и (4.7), получим относительный прогиб оболочки с учётом явлений микрополярности

$$\frac{A}{A_0}=\frac{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^2+\frac{12\left(1-\nu^2\right)a^4}{\pi^4R^2h^2}}{\left(1+\gamma_0\right)\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^2+\frac{12\left(1-\nu^2\right)a^4}{\pi^4R^2h^2}-\gamma_0\frac{a^2}{\pi^2R^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)} \tag{4.8}$$

Рассмотрим численный пример. Пусть $a=b=20h,\ R=2a.$ Материал оболочки – «алюминиевая дробь в эпоксидной смоле» [7], для которого имеем: $\mu=1{,}89\cdot10^9\,\text{Па},\ \nu=0{,}4,\ \gamma+\varepsilon=2{,}64\cdot10^3\text{н}$. Согласно (4.6) и (4.8), для обобщённого постоянного γ_0 и относительного максимального прогиба оболочки при различных абсолютных значениях толщины оболочки h имеем (табл.1):

Таблица 1

$h-\mu$	Υ_0	A/A_0
0,001	5,0286	0,4134
0,002	1,2971	0,7429
0,003	0,5507	0,8667
0,005	0,2011	0,9475

Рассматривая результаты, приведённые в табл.1, замечаем, что с увеличением абсолютной толщины оболочки существенно уменьшается влияние учёта микрополярности.

б) Рассмотрим задачу свободных колебаний сферической панели $\left(a\times b,\ h,\ k_1=k_2=k=R^{-1}\right)$. В этом случае система уравнений (3.16)–(3;18) приводится к виду:

$$\begin{gathered}
B\frac{\partial^2u}{\partial\alpha_1^2}+\left(\mu+\alpha\right)\frac{\partial^2u}{\partial\alpha_2^2}+\left(B_{12}+\mu-\alpha\right)\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+\frac{B+B_{12}}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\\
B\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial\alpha_2^2}+\left(\mu+\alpha\right)\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial\alpha_1^2}+\left(B_{12}+\mu-\alpha\right)\frac{\partial^2\mathrm{u}}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+\frac{B+B_{12}}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}=\rho\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial t^2}\\
\left(\frac{Bh^2}{12}+\gamma+\varepsilon\right)\Delta^2w+\frac{B+B_{12}}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{\gamma+\varepsilon}{R^2}\Delta w+\\
+2\frac{B+B_{12}}{R}w=-\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}+\left(\rho\frac{h^2}{12}+J\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w
\end{gathered} \tag{4.9}$$

Первые два уравнения системы (4.9) преобразуем следующим образом:

$$\begin{gathered}
\left(\mu+\alpha\right)\Delta u+\left(B_{12}+\mu-\alpha\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{B+B_{12}}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\\
\left(\mu+\alpha\right)\Delta\mathrm{v}+\left(B_{12}+\mu-\alpha\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{B+B_{12}}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}
\end{gathered} \tag{4.10}$$

[8], преобразуем уравнения (4.10) с помощью следующих представлений:

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2},\quad \mathrm{v}=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} \tag{4.11}$$

тогда система уравнений (4.10) известным способом приводится к следующим уравнениям:

$$B\Delta\Phi + \frac{B+B_{12}}{R} w = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$
$$(\mu+\alpha)\Delta\Psi = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{4.12}$$

Полагая

$$\bar{\Psi} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{mn} e^{i\omega_{mn}t} \cos\mu_m\alpha_1 \cos\lambda_n\alpha_2 \tag{4.13}$$

где

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b}, \quad \mu_m = \frac{m\pi}{a} \tag{4.14}$$

из второго уравнения (4.12), откуда следует, что сдвиговая волна планарных колебаний (Ψ) не зависит от изгибных (w), получим следующую формулу для определения частот этих колебаний:

$$\omega_{mn}^2 = (\mu+\alpha)\rho^{-1}\left(\lambda_n^2 + \mu_m^2\right) \tag{4.15}$$

откуда видно, что учёт микрополярности приводит к увеличению частоты колебаний.

Третье уравнение системы (4.9) с учётом (4.11) приводится к виду

$$\left(B\frac{h^2}{12} + \gamma + \varepsilon\right)\Delta^2 w + \frac{B+B_{12}}{R}\Delta\Phi + \frac{\gamma+\varepsilon}{R^2}\Delta w +$$
$$+2\frac{B+B_{12}}{R^2} w = -\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho\frac{h^2}{12} + J\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w \tag{4.16}$$

Первое уравнение (4.12) и уравнение (4.16) составляют полную систему уравнений относительно искомых функций Φ и w.

В случае, когда оболочка по всему контуру шара $(\alpha_1 = 0, a;\ \alpha_2 = 0, b)$ шарнирно закреплена, т.е. имеем граничные условия (3.21), решения указанной системы уравнений представим следующим образом:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} e^{i\omega_{mn}t} \sin\mu_m\alpha_1 \sin\lambda_n\alpha_2$$
$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_m e^{i\omega_{mn}t} \sin\mu_m\alpha_1 \sin\lambda_n\alpha_2 \tag{4.17}$$

Подставляя значения Φ и w из (4.17) в первое уравнение системы (4.12) и в уравнение (4.17), приравнивая к нулю детерминант полученной системы алгебраических уравнений, приходим к следующему уравнению для определения частот колебаний:

$$\omega_{mn}^4 - \frac{B}{\rho}\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)\left[1 - \frac{\gamma+\varepsilon}{BR^2} + 2\frac{1+\nu}{R^2}\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)^{-1} + \left(\frac{h^2}{6} + \frac{\gamma+\varepsilon}{B} + \frac{J}{\rho}\right)\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)\right]$$
$$\omega_{mn}^2 + \frac{B^2}{\rho^2}\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)^2\left[\left(\frac{h^2}{12} + \frac{\gamma+\varepsilon}{B}\right)\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right) + \frac{1-\nu^2}{R^2}\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)^{-1} - \frac{\gamma+\varepsilon}{BR^2}\right] = 0 \tag{4.18}$$

Поступая известным образом, и в уравнении (4.16) пренебречь инерционными членами для определения частот продольных планарных колебаний, получим следующую приближённую формулу:

$$
\begin{gathered}
\omega_{mn}^2=\frac{B}{\rho}\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)-12\frac{\left(1+\nu\right)^2}{R^2h^2}\frac{B}{\rho}\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)^{-1}\left[1+12\frac{\gamma+\varepsilon}{Bh^2}+\right.\\
\left.+24\frac{1+\nu}{R^2h^2}\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)^{-2}-12\frac{\gamma+\varepsilon}{BR^2h^2}\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)^{-1}\right]^{-1}
\end{gathered}
\tag{4.19}
$$

Из (4.19) следует, что в отличие от частот сдвиговых планарных колебаний (4.15), частоты продольных планарных колебаний уменьшаются при учёте микрополярности материала оболочки.

Пренебрегая инерционным членом в первом уравнении системы (4.12) и поступая обычным образом, для частот поперечных колебаний получим следующую приближённую формулу:

$$
\begin{gathered}
\omega_{mn}^2=\frac{D}{\rho h}\left[1+12\frac{1-\nu^2}{R^2h^2}\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)+12\frac{\gamma+\varepsilon}{Bh^2}\left(1-\frac{\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)^{-1}}{R^2}\right)\right]\times\\
\times\left[1+\left(\frac{h^2}{12}+\frac{J}{\rho}\right)\left(\mu_m^2+\lambda_n^2\right)\right]^{-1}
\end{gathered}
\tag{4.20}
$$

Приведенные здесь результаты находятся в согласии с результатами, полученными С.О. Саркисяном и его последователями на основе применения асимптотического метода интегрирования [9,10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961.384 с.
5. Новожилов В.В. Теория упругости. Ленинград: Судпромгиз, 1958. 370 с.
6. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд. НАНА, 1999. 214 с.
7. Савин Г.Н., Лукашев А.А., Лыско Е.М., Вершенко С.А., Агасьев Г.Г. Распространение упругих волн в континууме Коссера со стеснённым вращением частиц // Прикладная механика. 1970. Т.6. Вып.6. С.37–41.
8. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. Т.1. Колебания линейных систем (Под ред. Болотина В.В.). М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
9. Саркисян С.О. Общая теория упругих оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т. 108. №4. С. 309-319.
10. Саркисян С.О. Краевые задачи несимметричной теории упругости для тонких пластин // ПММ. 2008. №1. С.129-147.

<u>Сведения об авторах:</u>

Амбарцумян Сергей Александрович – Академик НАН Армении, профессор, доктор техн. наук, иностранный член РАН, Институт механики НАН Армении

Адрес:0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна $24^б$

Тел.: (+374 10)52-06-44. E-mail: gyumreci@gmail.com

Белубекян Мелс Вагаршакович,

Профессор, кандидат физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении

Тел.: (+37410)52-15-03; E-mail: mbelubekyan@sci.am

Поступила в редакцию 17.07.2009