

УДК 534.111

**ОБ УТОЧНЕНИИ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННОЙ
ЧАСТОТЫ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО МАЯТНИКА
САРКИСЯН В. К.**

Ключевые слова: горизонтальный маятник, собственная частота.
Keywords: horizontal pendulum, intrinsic frequency.

Մարզայան Վ. Կ.

Հորիզոնական ճոճանակի սեփական հաճախության որոշման բանաձևի ճշգրտման մասին

Էներգիայի հավասարման օգտագործումով որոշված է ճոճանակի սեփական հաճախությունը: Կոնկրետ ճոճանակի համար հաշվարկված է սեփական հաճախությունը: Փորձով հաստատված է բանաձևի ճշտությունը: Կատարված է ստացված բանաձևի համեմատությունը գրականության մեջ բերված բանաձևերի հետ:

Sarkisyan V. K.

About clarification of the formula for determination of intrinsic frequency of horizontal pendulum

Using the equation the intrinsic frequency of pendulum is decided. Intrinsic frequency is calculated for a certain pendulum. The verity of formula is confirmed by experiment. The deduced is compared with formulas brought in literature.

Выведена формула для определения собственной частоты горизонтального маятника с применением уравнения энергии. Произведен расчет собственной частоты конкретного маятника. Доказано, что экспериментальные результаты совпадают с расчетными данными в пределах корректности эксперимента. Проведено сравнение с формулами, приведенными в литературе.

Известно, что в сейсмологии горизонтальный маятник применяется для измерения вертикальных колебаний почвы. Выбором собственной частоты маятника подбирается низкий предел частот измеряемых колебаний. В теории сейсмометрии доказывается, что маятник может с достаточной точностью измерять амплитуду колебания, если частота измеряемых колебаний больше собственной частоты маятника более чем в 2 раза. Поэтому, разработка маятника с возможно низкой собственной частотой является решающим фактором для измерения сейсмических колебаний. Диапазон частот сейсмических колебаний – 1...20 Гц для инженерной сейсмологии, и начиная с 0,01 Гц – для региональной сейсмологии. Таким образом, для применения в инженерной сейсмологии необходимо иметь сейсмометр с собственной частотой маятника 0,5 Гц.

Известно, что собственная частота маятника зависит от длины и массы маятника. Для уменьшения размеров и веса сейсмометра, в сейсмометрии используют астатический маятник [5], причем астатическую силу создает пружина, соединенная с маятником под некоторым углом, одновременно уравновешивая вес маятника (фиг. 1).

Известна формула для определения собственной частоты горизонтального маятника [1]. При применении этой формулы в конкретном инженерном расчете сейсмометра получаются сомнительные результаты, а полученные результаты экспериментально не подтверждаются.

Обсудим формулы горизонтального маятника, приведенные в литературе. В литературе известна формула для определения собственной частоты горизонтального маятника ([1], стр.380):

$$p^2 = \frac{g}{l} \left[\frac{ka^2 \sin^2 \beta}{Mgl} - \left(1 - \frac{a \cos \beta}{Z} \operatorname{ctg} \beta \right) \right] \quad (1)$$

Буквенные обозначения формулы см. ниже.

Не вникая в подробности вывода формулы и не проводя её анализа, а имея в виду только окончательный результат (1), который предлагается для практического инженерного применения, заметим недостатки формулы:

– почему собственная частота маятника зависит от полной длины Z , уравновешивающей пружины?

По сути, пружина на процесс колебаний может влиять только своей жесткостью. Одинаковую жесткость могут иметь пружины различных размеров.

– почему при $\beta = 0^\circ$ p стремится к бесконечности?

По сути, при $\beta = 0^\circ$ собственная частота маятника должна уменьшаться до нуля ввиду увеличения астазирующей силы.

Обсуждая формулу, приведенную в другой литературе ([2], стр. 112)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgl}} = T_0 \sqrt{\operatorname{tg} \gamma} \quad (2)$$

(угол γ – это угол между осью маятника и прямой, соединяющей центр качания маятника с точкой закрепления пружины с корпусом прибора), увидим, что при $\gamma = 0$ $T = 0$ и при $\gamma = 90^\circ$ T стремится к бесконечности, что неверно.

Кроме того, на собственную частоту маятника не может влиять место (точка) закрепления пружины с корпусом прибора.

Как показано выше, имеются непонятные и необъяснимые результаты, которые ставят под сомнение применение формул (1) и (2) в практических расчетах. Это вынудило автора, для разработки нового сейсмометра вновь решить задачу определения собственной частоты горизонтального маятника, когда уравновешивающая пружина действует под некоторым углом.

Уравновешивающую вес маятника пружина действует на плечо l маятника под некоторым углом β (фиг.1).

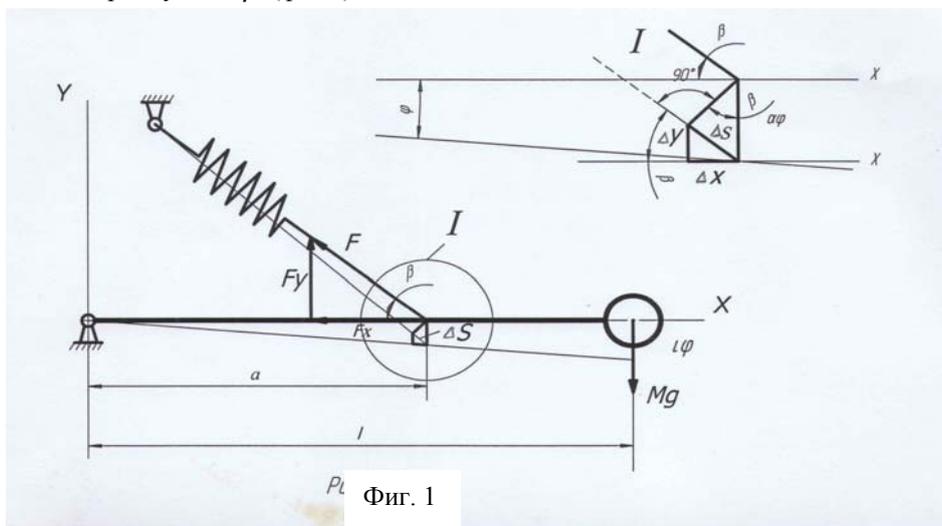


Рис. Фиг. 1

Силу растяжения пружины F можно разложить на две составляющие по оси x и y . Составляющая F_y , действуя на плечо длиной a , уравнивает момент массы M маятника. Составляющая же F_x создает астатическую силу. Увеличивая астатическую силу, можно снизить собственную частоту маятника.

С применением закона сохранения энергии для определения собственной частоты горизонтального маятника [3] удобно и просто решать поставленную задачу.

Действительно, пренебрегая массой пружины и учитывая только массу подвешенного тела маятника, находим кинетическую энергию системы в процессе колебаний

$$M v^2/2 = M \left(\frac{ld\varphi}{dt} \right)^2 / 2 \quad (3)$$

где M – масса тела, v – линейная скорость массы, $d\varphi/dt$ – угловая скорость, маятника, l – длина маятника.

Потенциальная энергия системы в данном случае состоит из потенциальной энергии деформации пружины и потенциальной энергии груза, зависящей от его положения. Как доказано в [3], полное изменение потенциальной энергии системы равно:

$$k\Delta S^2/2 \quad (4)$$

k – жесткость пружины, ΔS – полная деформация пружины (фиг.1)

Имея выражения (3), (4) и пренебрегая рассеянием энергии, получим уравнение энергии:

$$M \left(ld\varphi/dt \right)^2 / 2 + k \Delta S^2 / 2 = \text{const} \quad (5)$$

Значение постоянной в правой части этого уравнения определяется начальными условиями. В начальный момент $t = 0$ угловое перемещение груза равно φ_0 , начальная скорость равна нулю. При $\varphi = 0$, $\Delta S = 0$ скорость максимальна. Из уравнения (5) получаем:

$$Ml^2\varphi_0^2 p^2 / 2 = k\Delta S^2 / 2 \quad (6)$$

где p – собственная круговая частота маятника и $\varphi = \varphi_0 \sin pt$.

Условие (6), в сущности, означает, что максимальная кинетическая энергия равна максимальной потенциальной энергии.

Заметим, что (фиг.1) $\Delta S = a\varphi \sin \beta$, где ΔS – полная деформация пружины. Учитывая, что движение описывается уравнением $\varphi = \varphi_0 \sin pt$, из уравнения (6) получаем:

$$Ml^2\varphi_0^2 p^2 = ka^2\varphi_0^2 \sin^2 \beta$$

или

$$p^2 = ka^2 \sin^2 \beta / J \quad (7)$$

где $J = MI^2$ – момент инерции массы M относительно центра качания.

Анализируя формулу (7), заметим, что собственная частота маятника при $\beta = 90^\circ$ равна:

$$p^2 = ka^2/J$$

что совпадает с формулой, приведённой в литературе [3] и [4].

По мере уменьшения угла β от 90° до нуля, собственная частота будет уменьшаться ввиду увеличения астазирующей силы. Формула (7) не противоречит физическому смыслу колебания горизонтального маятника, и расчеты по этой формуле соответствуют экспериментальным данным с соответствующей погрешностью определения конструктивных размеров маятника.

Для конкретного маятника со следующими размерами - $k = 2000 \cdot \text{Н/м}$, $J = 20,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^2$, $a = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ при $\beta = 26^\circ$, теоретически, для собственного периода маятника получается $T = 2,3 \text{ с}$, экспериментально – $T = 2,2 \text{ с}$.

Заметим, что в формуле (7) угол β практически не может равняться нулю, ибо при этом невозможно обеспечить уравновешивание маятника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саваренский Е.Ф., Кирнс Д.П. Элементы сейсмологии и сейсмометрии. М.: Техноиздат, 1955. 531 с.
2. Гевондян Т.А., Киселев Л.Т. Приборы для измерения и регистрации колебаний. М.: Машгиз, 1962. 459 с.
3. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. М.: Изд. «Высшая школа». 1966.
4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 442 с.
5. Николаи Е.А Теоретическая механика. Ч.2. М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1957.

Сведения об авторе:

Саркисян Ваагн Каренович,

Аспирант Института геофизики и инженерной сейсмологии им. А.Г.Назарова НАН
Армении

E-mail: vahagn_sargsyan@rocketmail.com_

Поступила в редакцию 06.02.2009