ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №3, 2010 Механика

УДК 539.3, 539.3:537.228.1

ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

САРГСЯН А.М.

Ключевые слова: упругость, электроупругость, анизотропия, принцип соответствия.
Key words: elasticity, electroelasticity , anisotropy, the principle of conformity.

Սարգսյան Ա.Մ.
Համապատասխանության սկզբունքը առաձգականության և էլեկտրաառաձգականության տեսության խնդիրներում

Համաձայն պարզված ու հաստատված սկզբունքի, եթե հայտնի է ընդհանրացված հարթ դեֆորմացիոն վիճակում գտնվող ընդհանուր տեսքի անիզոտրոպիայով օժտված համասեռ պրիզմաձև մարմնի առաձգականության տեսության խնդրի լուծումը,, ապա ընդհանրարացված հարթ լարվածային վիճակում գտնվող բարակ պլաստինկայի համար (որի միջին հարթությունը համընկնում է առաձգական մարմնի ընդլայնական կտրվածքի հետ) էլեկտրաառաձգականության խնդիրը կարելի է ստանալ առաձգական մարմնի դեֆորմացիայի բերված գործակիցների համապատասխան փոփոխությամբ՝ պեզաէլեկտրիկ մարմնի առաձգական հաստատուններով, դիէլեկտրիկ ընկալունակություններով և պեզամոդուլներով: Առաձգական և էլեկտրաառաձգական գործակիցների միջև ստացված են անհրաժեշտ առնչություններ, որոնք հնարավորությունն են տալիս լուծել նաև հակառակ խնդիրը ՝ էլեկտրաառաձգական խնդրի լուծումից ստանալ առաձգական խնդրի լուծումը:

Sargsyan A.M.
The principle of conformity in the problems of elasticity theory and elektroelasticity

According to the established principle, if the solution of the elasticity theory problem for a homogeneous prismatic body, having anisotropy of the general form and being in the state of generalized plane deformation is known, then the solution of the elektroelasticity problem for a thin piezoelectric plate (the mean plane of which coincides with the cross-section of the elastic body), being in plane stress state, if is possible with the corresponding change of the derived deformation's coefficients of the elastic material on the elasticity coefficients, dielectric sensitivites and piezoelectric modules of the piezomaterial. The necessary correlations, between these coefficients, giving possibility to solve the inverse problem as well, i.e. to have the solution of elastic problem from the solution of the elektroelasticity problem.

Согласно установленному принципу, если известно решение задачи теории упругости для однородного призматического тела, обладающего анизотропией общего вида и находящегося в состоянии обобщенной плоской деформации, то решение задачи электроупругости для тонкой пьезоэлектрической пластинки (срединная плоскость которого совпадает с поперечным сечением упругого тела), находящейся в обобщенном плоском напряженном состоянии, можно получить соответствующей заменой приведенных коэффициентов деформации упругого материала на коэффициенты упругости, диэлектрической восприимчивости и пьезоэлектрические модули пьезоматериала. Получены необходимые соотношения между этими коэффициентами, дающие возможность для решения также обратной задачи, т.е. из решений задачи электроупругости получить решение упругой задачи.

Подобие многих установившихся плоских полей различной физической природы (механических, тепловых, диффузионных, фильтрационных, электрических, магнитных и т. д.) и их характеристик (напряжения, поток тепла, поток вещества, плотность расхода жидкости, напряжения электрических и магнитных полей и т.д.) общеизвестны [1-4]. Например, задача о кручении бруса полностью отождествляется с задачей равновесия гибкой мембраны, равномерно натянутой на жесткий контур, совпадающий с контуром поперечного сечения бруса, и нагруженный равномерным давлением (мембранная аналогия Прандтля). В точках концентрации напряжений более точные результаты можно получить из аналогии с листовым проводником.

Существуют также несколько аналогий между задачами о кручении и гидростатическими задачами о движении жидкости в трубах [1].

Таблица подобия некоторых вышеуказанных полей и их характеристик приведена, например, в книге [2].

В работах [4,5] исследован характер распределения установившихся плоских физических полей и поведения их характеристик в окрестности края поверхности контакта кусочно однородного изотропного и анизотропного клина.

Во всех перечисленных выше исследованиях речь идет о подобии несвязанных физических полей.

В данной работе установлено, что задачи теории упругости анизотропного тела и задачи электроупругости также подобны, откуда и название статьи.

Как известно, решения задач теории упругости для однородного тела, обладающего прямолинейной анизотропией общего вида, ограниченного какой-либо цилиндрической поверхностью (или плоскостями) и находящегося в состоянии обобщенной плоской деформации, приводятся к интегрированию систем линейных связанных дифференциальных уравнений [6]

$$L_4^y F(x,y) + L_3^y \psi(x,y) = 0,\quad L_3^y F(x,y) + L_2^y \psi(x,y) = 0 \tag{1}$$

с соответствующими граничными условиями на боковой поверхности тела, образующая которого паралельна оси z .

В (1) L_4^y, L_3^y, L_2^y – дифференциальные операторы четвертого, третьего и второго порядков

$$L_4^y = \beta_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{2b}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} + (2\beta_{12}+\beta_{6b})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} - 2\beta_{1b}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3} + \beta_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$L_3^y = -\beta_{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25}+\beta_{46})\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} - (\beta_{14}+\beta_{56})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} + \beta_{15}\frac{\partial^3}{\partial y^3} \tag{2}$$

$$L_2^y = \beta_{44}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \beta_{55}\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3}\,a_{j3}/a_{33}$$

где β_{ij} – приведенные коэффициенты деформации упругого материала, a_{ij} – коэффициенты деформации.

Функции напряжений $F(x,y)$ и $\psi(x,y)$, с помощью которых определяются напряжения

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\ \tau_{xz} = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \tau_{yz} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{3}$$

тождественно удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\sigma_y}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

Если на боковой поверхности (на контуре поперечного сечения) цилиндрического тела заданы внешние усилия X_n, Y_n, Z_n, то граничные условия имеют вид [6,7]

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\int_0^s Y_n ds,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^s X_n ds,\quad \psi = \int_0^s Z_n ds \tag{5}$$

где интегралы берутся по дуге контура поперечного сечения цилиндрического тела от некоторой начальной точки до переменной точки s.

Когда на контуре поперечного сечения цилиндрического тела известны перемещения $u_1(s), v_1(s)$ и $w_1(s)$, то граничные условия запишутся в виде

$$u(s)=u_1(s)\,,\quad v(s)=v_1(s)\,,\quad w(s)=w_1(s) \tag{6}$$

Известно также, что для решения задач электоупругости тонкой пьезоэлектрической пластинки, имеющей в каждой точке плоскость материальной симметрии, параллельную срединной плоскости пластинки (плоскость xy) и находящуюся в обобщенном плоском напряженном состоянии, имеем систему линейных связанных дифференциальных уравнений

$$4\pi L_4\tilde{F}(x,y)-L_3\tilde{\psi}(x,y)=0\,,\ L_3\tilde{F}(x,y)+L_2\tilde{\psi}(x,y)=0 \tag{1'}$$

и соответствующие механические и электрические граничные условия [8,9].

Дифференциальные операторы $\tilde{L}_k\ (k=2,3,4)$ в (1') имеют вид

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_4 &= s_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4}-2s_{26}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}+\left(2s_{12}+s_{66}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}-2s_{16}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}+s_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\\
\tilde{L}_3 &= -g_{22}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\left(g_{12}+g_{26}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}-\left(g_{21}+g_{16}\right)\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+g_{11}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\\
\tilde{L}_2 &= \eta_{22}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\eta_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\eta_{11}\frac{\partial^2}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{2'}$$

где s_{ij} – упругие коэффициенты пластинки при отсутствии электрической индукции, η_{ij} – диэлектрические восприимчивости, измеренные при постоянных механических напряжениях, g_{ij} – пьезоэлектрические модули.

Функции напряжений $\tilde{F}(x,y)$ и индукции $\tilde{\psi}(x,y)$, с помощью которых определяются осредненные по толщине напряжения и компоненты вектора электрической индукции

$$\tilde{\sigma}_x=\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial y^2}\,,\ \tilde{\sigma}_y=\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial x^2},\ \tilde{\tau}_{xy}=-\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial x\partial y}\,,\ D_1=\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\,,\ D_2=-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x} \tag{3'}$$

тождественно удовлетворяют первым двум уравнениям (4) и уравнению электростатики

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}_x}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\tau}_{xy}}{\partial y}=0\ ,\ \frac{\partial\tilde{\tau}_{xy}}{\partial x}+\frac{\tilde{\sigma}_y}{\partial y}=0\ ,\ \frac{\partial D_1}{\partial x}+\frac{\partial D_2}{\partial y}=0 \tag{4'}$$

Пусть на боковой поверхности цилиндрического тела (той же геометрии, что в упругой задаче) заданы осредненные значения внешних усилий $\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n$ и распределение заряда q_s. Тогда граничные условия задаются в виде [8,9]

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x}=-\int_0^s\tilde{Y}_n ds\ ,\ \frac{\partial\tilde{F}}{\partial y}=\int_0^s\tilde{X}_n ds\ ,\ \tilde{\psi}=\int_0^s q_s ds \tag{5'}$$

Если на контуре поперечного сечения заданы осредненные значения перемещений $\tilde{u}_1(s)$ и $\tilde{v}_1(s)$ и электростатического потенциала $\tilde{U}_1(s)$, то граничные условия принимают вид

$$\tilde{u}(s)=\tilde{u}_1(s),\quad \tilde{v}(s)=\tilde{v}_1(s),\quad \tilde{U}(s)=\tilde{U}_1(s). \tag{6'}$$

Введя обозначения

$$\tilde{L}_4 = L_4^*, \quad \tilde{L}_3 = -4\pi L_3^*, \quad \tilde{L}_2 = -4\pi L_2^*$$

и подставляя их в (1'), (2'), получим

$$L_4^* \tilde{F} + L_3^* \tilde{\psi} = 0 \; , \; L_3^* F + L_2^* \tilde{\psi} = 0 \qquad (1'')$$

где

$$L^*{}_4 = s_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26}\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + \left(2s_{12} + s_{66}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16}\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$L_3^* = -\left(-\frac{g_{22}}{4\pi}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(-\frac{g_{12}+g_{26}}{4\pi}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - \left(-\frac{g_{21}+g_{16}}{4\pi}\right)\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \left(-\frac{g_{11}}{4\pi}\right)\frac{\partial^3}{\partial y^3} \qquad (2'')$$

$$L_2^* = \left(-\frac{\eta_{22}}{4\pi}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\left(-\frac{\eta_{12}}{4\pi}\right) + \left(\frac{\eta_{11}}{-4\pi}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Сравнивая краевые задачи (1), (2), (5), (6) и (1''), (2''), (5'), (6'), легко установить принцип соответствия между математическими задачами теории упругости и электроупругости: если известно решение задач теории упругости для однородного призматического тела, обладающего анизотропией общего вида и находящегося в состоянии обобщенной плоской деформации, то решение задач электроупругости для тонкой пьезоэлектрической пластинки, находящейся в обобщенном плоском напряженном состоянии, получим заменой в упругой задаче

$$\beta_{22} \text{ на } s_{22}, \; \beta_{26} \text{ на } s_{26}, \; 2\beta_{12} + \beta_{66} \text{ на } 2s_{12} + s_{66}, \; \beta_{16} \text{ на } s_{16}, \; \beta_{11} \text{ на } s_{11}$$

$$\beta_{24} \text{ на } \left(-\eta_{22}\right)/4\pi, \; \beta_{45} \text{ на } \left(-\eta_{12}\right)/4\pi, \; \beta_{55} \text{ на } \left(-\eta_{11}\right)/4\pi \qquad (7)$$

$$\beta_{24} \text{ на } \left(-\eta_{12}\right)/4\pi, \; \left(\beta_{25} + \beta_{46}\right) \text{ на } \left(-g_{12} - g_{16}\right)/4\pi$$

$$\left(\beta_{14} + \beta_{56}\right) \text{ на } \left(-g_{21} - g_{16}\right)/4\pi$$

Причем, в электроупругой задаче компоненты вектора электрической индукции D_1 и D_2 соответствуют напряжениям τ_{xz} и τ_{yz} в упругой задаче, а электростатический потенциал $\tilde{U}\left(x, y\right)$ – упругому перемещению $w\left(x, y\right)$.

Для иллюстрации полученного соответствия рассмотрим местное решение задачи теории упругости для призматического анизотропного клина с произвольным углом раствора θ_1, на радиальных сторонах которого заданы внешние нагрузки.

Представляя решение уравнений (1) в виде [10]

$$\begin{aligned} F\left(x, y\right) &= \sum_{j=1}^{3}\left[A_j\left(x + \mu_j y\right)^{\lambda+1} + B_j\left(x + \bar{\mu}_j y\right)^{\lambda+1}\right] \\ \psi\left(x, y\right) &= \sum_{j=1}^{3}\left[f_j A_j\left(x + \mu_j y\right)^{\lambda} + \bar{f}_j B_j\left(x + \bar{\mu}_j y\right)^{\lambda}\right] \end{aligned} \qquad (8)$$

и удовлетворяя однородным граничным условиям, для определения A_j, B_j получим однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3 = 0 \\ &A_1\mu_1 + A_2\mu_2 + A_3\mu_3 + B_1\bar{\mu}_1 + B_2\bar{\mu}_2 + B_3\bar{\mu}_3 = 0 \\ &A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + B_1\bar{a}_1 + B_2\bar{a}_2 + B_3\bar{a}_3 = 0 \\ &A_1\mu_1 a_1 + A_2\mu_2 a_2 + A_3\mu_3 a_3 + B_1\bar{\mu}_1\bar{a}_1 + B_2\bar{\mu}_2\bar{a}_2 + B_3\bar{\mu}_3\bar{a}_3 = 0 \\ &A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 + B_1\bar{f}_1 + B_2\bar{f}_2 + B_3\bar{f}_3 = 0 \\ &A_1 f_1 a_1 + A_2 f_2 a_2 + A_3 f_3 a_3 + B_1\bar{f}_1\bar{a}_1 + B_2\bar{f}_2\bar{a}_2 + B_3\bar{f}_3\bar{a}_3 = 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

Из условий существования нетривиального решения системы (9) получим трансцендентное уравнение для определения параметра λ

$$\Delta(\lambda)=0 \tag{10}$$

В (8) – (10) λ – параметр, определяющий степень сингулярности напряжений в окрестности ребра трехмерного клина, $\mu_j=\sigma_j+j\tau_j$ и $\mu_j=\sigma_j-j\tau_j$ – корни алгебраического уравнения

$$l_4^y(\mu)l_2^y(\mu)-\ l_3^y(\mu)^y l_3(\mu)=0 \tag{11}$$

где

$$l_4^y(\mu)=\beta_{11}\mu^4-2\beta_{16}\mu^3+(2\beta_{12}\beta_{66})\mu^2-2\beta_{26}\mu+\beta_{22}$$

$$l_3^y(\mu)=\beta_{15}\mu^3-(\beta_{14}+\beta_{56})\ \mu^2+(\beta_{25}+\beta_{46})\ \mu-\beta_{24}$$

$$l_2^y(\mu)=\beta_{55}\mu^2-2\beta_{45}\mu+\beta_{44} \tag{11'}$$

$$f_j=-l_3^y(\mu_j)\big/l_2^y(\mu_j),\ \ \overline{f}_j=-l_3^y(\overline{\mu}_j)\big/l_2^y(\overline{\mu}_j)$$

$$a_j=(\cos\theta_1+\mu_j\sin\theta_1)^{\lambda},\ \overline{a}_j=(\cos\theta_1+\overline{\mu}_j\sin\theta_1)^{\lambda}$$

Переходя в (3) и (8) к полярной системе координат $r,\theta(x=r\cos\theta,\ y=\sin\theta)$, легко исследовать поведение напряжений в окрестности ребра анизотропного клина.

Если уравнение (10) имеет корни в полосе $0<\mathrm{Re}\lambda<1$ комплексной плоскости λ, то напряжения неограниченно возрастают при $r\to 0$. Порядок особенности при этом равен $|\mathrm{Re}\lambda_1-1|$, где λ_1 – корень уравнения (10) с наименьшей положительной действительной частью в полосе $0<\mathrm{Re}\lambda<1$.

Теперь, исходя из принципа соответствия, с помощью (8) – (11') получим местное решение задачи электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина, на гранях которого осуществляются граничные условия (5'). Решение этой задачи было получено ранее в работе [11].

Произведя в уравнении (11) и обозначениях (11') замену (7), будем иметь

$$4\pi l_4^*(\mu)l_2^*(\mu)+\ l_3^*(\mu)l_3(\mu)=0 \tag{12}$$

где

$$l_4^*(\mu)=s_{11}\mu^4-2s_{16}\mu^3+(2s_{12}+s_{66})\mu^2-2s_{26}\mu+s_{22}$$

$$l_3^*(\mu)=g_{11}\mu^3-(g_{21}+g_{16})\mu^2+(g_{12}+g_{26})\mu-g_{22}$$

$$l_2^*(\mu)=\eta_{11}\mu^2-2\eta_{12}\mu+\eta_{22} \tag{12'}$$

$$f_j^*=-l_3(\mu_{*j})\big/l_2(\mu_{*j}),\ \ \overline{f}_j^*=-l_3(\overline{\mu}_{*j})\big/l_2(\overline{\mu}_{*j})$$

$$a_j^*=(\cos\theta_1+\mu_{*j}\sin\theta_1),\ \overline{a}_j^*=(\cos\theta_1+\mu_{*j}\sin\theta_1)^{\lambda}$$

В формулах (8), уравнениях (9), (10) и в обозначениях (12') – μ_{*j} и $\overline{\mu}_{*xj}$ в данном случае являются корнями уже уравнения (12).

Сравнивая соотношения (8) – (10) (после замены (7)) и (12), (12') с соотношениями (6) – (10) работы [11], замечаем их полное совпадение, что подтверждает действенность обнаруженного принципа соответствия.

Отмеченное соответствие, конечно, не уменьшает в каком-либо смысле математических трудностей при решении задач электроупругости или упругости.

Однако, полученное соответствие с познавательной точки зрения имеет определенное значение, так как оно дает возможность представить влияние пьезоэлектрических модулей и диэлектрических восприимчивостей с помощью влияния соответствующей системы упругих констант, которые легче поддаются физической интерпретации [12]. И, к тому же, из многих известных решений задач теории упругости легко получить соответствующие решения электроупругой задачи и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Гудьер Д.Ж. Теория упругости М.: Наука, 1975. 575 с.
2. Будак Б.М. и др. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. 668 с.
3. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338с.
4. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. // Докл. АН АрмССР. 1988. № 4. С.161-165.
5. Саргсян А.М. О влиянии граничных условий на малонапряженность антиплоской задачи кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина. // Изв. НАН Армении, Механика. 2002. Т.55. №1.С.17-22.
6. Лехницкий С.Е. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
7. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в составном произвольно-анизотропном теле и приложения к композитам // МТТ. 1979. № 6. С.33-42.
8. Вековищева И.А. Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. // ПМ. 1975. № 2. С. 85- 89.
9. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. //ПМ. 1975. № 5. С.45-53.
10. Алексанян Р.К. Об одном классе решений уравнений плоской теории упругости анизотропного тела. // Докл. АН АрмССР. 1975. № 4. С. 219-224.
11. Саргсян А.М Поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки пьезоэлектрического клина при обобщенном плоском напряженном состоянии. //Докл. НАН Армении. 1999. № 1. С. 35-39.
12. Рабинович А.Л. Об упругих постоянных и прочности авиационных материалов. // Тр. ЦАГИ. 1946. № 582. С.1-56.

Сведение об авторе:

Саргсян Азат Мкртычевич – канд физ.-мат.наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24б

Тел.: (+37410) 52-48-90

Поступила в редакцию 08.09.2009