ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №3, 2010 Механика

УДК 539.1

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ШТАМПОВ С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ С УЧЁТОМ ФАКТОРА ИЗНОСА

ДИНУНЦ А. С.

Ключевые слова: нестационарные задачи штампов, износ, метод Винера-Хопфа, форма решения Смирнова-Соболева.
Key words: unsteady stamp problems, wear, Vinner-Hopf method, Smirnov–Sobolev solution form.

Դինունց Ա. Ս.
Կիսաանվերջ դրոշմի կոնտակտային դինամիկ խնդիրների լուծումն առաձգական կիսահարթությունում՝ մաշման գործոնի հաշվառումով

Աշխատանքում տրված է Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ կիսաանվերջ դրոշմի և առաձգական վերին կիսահարթության կոնտակտային փոխազդեցության դինամիկական խնդրի լուծումը՝ մաշման գործոնի հաշվառումով: Բերված է Վիներ-Հոպֆի հավասարման և կառուցված է վերջինիս փակ լուծումը: Կատարված է խնդրի թվային վերլուծությունը և կոնտակտային լարումների փոփոխության օրինաչափությունները ներկայացված են գրաֆիկներով:

Dinunts A.S.
The solution of dynamic contact problems of interactions of semi-infinite stamps with elastic half-plane in presence of wear

In present paper the analytical and numerical investigation of problems of stamps for unsteady mixed boundary conditions and in presence of wear by the method of integral transforms of Laplace and Fourier, as well as by method of Vinner-Hopf is done. The stresses on stamps are calculated and graphs are constructed.

В настоящей работе исследуется задача контактного взаимодействия полубесконечных штампов с упругой средой в виде упругой верхней полуплоскости при нестационарном динамическом режиме с учетом фактора износа материала среды методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье, а также Винера-Хопфа. Другие нестационарные смешанные задачи о полубесконечных вертикальном и горизонтальном штампах при наличии износа решены в [1]. Последний приводит к устранению особенности у края штампа. Тем не менее, как и в случае без износа, где может иметь место разрушение среды около края штампа и в данном случае при некоторых граничных параметрах, может иметь место неупругое поведение под штампом, что проверено в настоящей работе численными расчетами нормального и касательного напряжения под штампом и дано сравнение с пределами текучести механики разрушения. Контактные задачи теории упругости с учетом фактора износа исследованы в монографиях [4,5].

1.1. Обозначим через U,V компоненты перемещений, a,b – скорости упругих волн. Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в плоском случае имеют вид:

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$a^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\quad\left(-\infty<x<\infty,\ 0<y<\infty\right)\tag{1.1}$$

Граничные условия имеют вид $(y=0)$:

$$\sigma_{yy}=0, x<0,\ \frac{\partial V}{\partial t}+k\sigma_{yy}=C_0H(x)\delta(t),\ \ x>0 \tag{1.2}$$

$$\sigma_{xy}=0,\ -\infty<x<\infty$$

где $H(x)$ – единичная функция Хевисайда, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Вторым условием (1.2) описывается обобщённая модель абразивного износа.

Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x. Обозначая $\overline{U},\overline{V}$ преобразование Лапласа по t от $U,V,$ через $\overline{\overline{U}},\overline{\overline{V}}$ преобразование Фурье по x от $\overline{U},\overline{V},$ можно искать решение в виде

$$\overline{U};\overline{V}=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\overline{\alpha}x+i\overline{\beta}_n y}\overline{\overline{U}}^{(n)};\overline{\overline{V}}^{(n)}d\overline{\alpha} \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получим

$$\overline{\beta}_n=\sqrt{\omega^2/c_n^2-\overline{\alpha}^2},\ \overline{\beta}_n^{\pm}=\sqrt{\omega/c_n\pm\overline{\alpha}},\ c_1=a,\ c_2=b,\ \overline{\beta}_n=\overline{\beta}_n^{+}\overline{\beta}_n^{-},\ \ n=1,2 \tag{1.4}$$

$s=-i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа по t. Кроме того,

$$\overline{\overline{V}}^{(1)}=\frac{\overline{\beta}_1}{\overline{\alpha}}\overline{\overline{U}}^{(1)},\ \overline{\overline{V}}^{(2)}=-\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}_2}\overline{\overline{U}}^{(2)}$$

Подставляя (1.3) в (1.2) и проводя обратное преобразование Фурье по x, можно получить уравнение Винера-Хопфа

$$\sigma_{yy}^{-}\frac{kF_2(\overline{\alpha})}{F(\overline{\alpha})}=\frac{C_0}{2\pi i\overline{\alpha}}+sV^{+} \tag{1.5}$$

где $\sigma_{yy}^{-}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\overline{\sigma}_{yy}\Big|_{y=0}e^{-i\overline{\alpha}x}dx,\ V^{+}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\overline{V}\Big|_{y=0}e^{-i\overline{\alpha}x}dx,$

$$R(\overline{\alpha})=2F(\overline{\alpha})\left(\omega^2/b^2-\omega^2/a^2\right)\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2$$

$$F_2(\overline{\alpha})=F(\overline{\alpha})-\frac{a^2\omega}{2\rho kb^4\left(a^2/b^2-1\right)\overline{\beta}_2},$$

$R(\overline{\alpha})=4\overline{\alpha}^2\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2+\left(\omega^2/b^2-2\overline{\alpha}^2\right)^2$ – функция Рэлея, $F(\overline{\alpha})\to 1,\ F_2(\overline{\alpha})\to 1$ при $\overline{\alpha}\to\infty$.

Отметим, что индекс (+) дает функции аналитические в верхней полуплоскости $\overline{\alpha}$, а индекс (-) дает функции аналитические в нижней полуплоскости $\overline{\alpha}$.

Уравнение (1.5) Винера-Хопфа решается известным методом в виде [2]. Функция $F_2(\overline{\alpha})$ имеет четыре корня. Обозначим их через $\frac{\omega}{a}\alpha_1^0$, $\frac{\omega}{a}\overline{\alpha_1^0}$, $\frac{\omega}{a}\alpha_2^0$, $\frac{\omega}{a}\overline{\alpha_2^0}$ и введём функцию

$$F_3(\bar{\alpha}) = F_2(\bar{\alpha})\frac{\left(\omega/a-\bar{\alpha}\right)\left(\omega/a+\bar{\alpha}\right)^3}{\left(\bar{\alpha}-\frac{\omega}{a}\alpha_1^0\right)\left(\bar{\alpha}-\frac{\omega}{a}\alpha_2^0\right)\left(\bar{\alpha}-\frac{\omega}{a}\overline{\alpha_1^0}\right)\left(\bar{\alpha}-\frac{\omega}{a}\overline{\alpha_2^0}\right)} \tag{1.6}$$

$F_3(\bar{\alpha}) \to 1$ при $\bar{\alpha} \to \infty$ и не имеет нулей во всей комплексной плоскости $\bar{\alpha}$. Черта над α_k^0 обозначает сопряжённое значение. Представим $F(\bar{\alpha}),\ F_3(\bar{\alpha})$ в виде

$$F\left(\bar{\alpha}\right) = F^+\left(\bar{\alpha}\right)F^-\left(\bar{\alpha}\right),\ F_3\left(\bar{\alpha}\right) = F_3^+\left(\bar{\alpha}\right)F_3^-\left(\bar{\alpha}\right) \tag{1.7}$$

где

$$F^-(\alpha) = \frac{a/c_R - a\bar{\alpha}/\omega}{\sqrt{a/b-a\bar{\alpha}/\omega}\sqrt{1-a\bar{\alpha}/\omega}}\exp\left[-\frac{1}{\pi}\int_1^{a/b}\operatorname{arctg}\frac{4\zeta^2\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{a^2/b^2-\zeta^2}}{\left(a^2/b^2-2\zeta^2\right)^2}\frac{d\zeta}{\zeta-a\bar{\alpha}/\omega}\right]$$

$$G^-\left(\bar{\alpha}\right) = \operatorname{Exp}\left\{\frac{1}{\pi}\int_1^{a/b}\operatorname{arctg}\frac{\left(\rho ka\right)^{-1}a^4/b^4\sqrt{\zeta^2-1}-4\zeta^2\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{a^2/b^2-\zeta^2}}{\left(a^2/b^2-2\zeta^2\right)^2}\frac{d\zeta}{\zeta-a\bar{\alpha}/\omega}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{a/b}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\left(\rho ka\right)^{-1}a^4/b^4\sqrt{\zeta^2-1}}{\left(a^2/b^2-2\zeta^2\right)^2-4\zeta^2\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\zeta^2-a^2/b^2}}\frac{d\zeta}{\zeta-a\bar{\alpha}/\omega}\right\}$$

$$F_3^-\left(\bar{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{\omega/a-\bar{\alpha}}}{\sqrt{\omega/b-\bar{\alpha}}}G^-\left(\bar{\alpha}\right);\ F^+\left(\bar{\alpha}\right) = \frac{F\left(\bar{\alpha}\right)}{F^-\left(\bar{\alpha}\right)};\ F_3^+\left(\bar{\alpha}\right) = \frac{F_3\left(\bar{\alpha}\right)}{F_3^-\left(\bar{\alpha}\right)}.$$

Тогда для $F_2(\bar{\alpha})$ получим

$$F_2\left(\bar{\alpha}\right) = F_2^+\left(\bar{\alpha}\right)F_2^-\left(\bar{\alpha}\right) \tag{1.8}$$

$$F_2^-(\alpha) = \frac{G^-\left(\bar{\alpha}\right)\omega/a\left(a\bar{\alpha}/\omega-\alpha_1^0\right)\left(a\bar{\alpha}/\omega-\alpha_2^0\right)}{\sqrt{a/b-a\bar{\alpha}/\omega}\sqrt{1-a\bar{\alpha}/\omega}};$$

$$F_2^+(\alpha) = \frac{F_2\left(\bar{\alpha}\right)\sqrt{\omega/a-a\bar{\alpha}/\omega}\sqrt{\omega/b-a\bar{\alpha}/\omega}}{G^-\left(\bar{\alpha}\right)\left(a\bar{\alpha}/\omega-\alpha_1^0\right)\left(a\bar{\alpha}/\omega-\alpha_2^0\right)}$$

Уравнение Винера-Хопфа (1.5) примет вид:

$$\sigma_{yy}^-\frac{kF_2^+(\bar{\alpha})F_2^-(\bar{\alpha})}{F^+(\bar{\alpha})F^-(\bar{\alpha})} = \frac{C_0}{2\pi i\bar{\alpha}} + sV^+$$

или $$k\sigma_{yy}^-\frac{F_2^-(\bar{\alpha})}{F^-(\bar{\alpha})} = \frac{C_0}{2\pi i\bar{\alpha}}\frac{F^+(\bar{\alpha})}{F_2^+(\bar{\alpha})} + sV^+\frac{F^+(\bar{\alpha})}{F_2^+(\bar{\alpha})} \tag{1.9}$$

Левая часть уравнения – аналитическая функция в нижней полуплоскости, а правая часть – в верхней полуплоскости, кроме $\bar{\alpha} = 0$, где она имеет полюс первого порядка. Вычитаем из обеих сторон главную часть Лорановского разложения функции $\frac{C_0}{2\pi i\bar{\alpha}}\frac{F^+(\bar{\alpha})}{F_2^+(\bar{\alpha})}$ в этой точке и получаем [2,3]

$$k\sigma_{yy}^{-}\frac{F_2^{-}(\overline{\alpha})}{F^{-}(\overline{\alpha})}-\frac{C_0}{2\pi i\overline{\alpha}}\frac{F^{+}(0)}{F_2^{+}(0)}=\frac{C_0}{2\pi i\overline{\alpha}}\frac{F^{+}(\overline{\alpha})}{F_2^{+}(\overline{\alpha})}-\frac{C_0}{2\pi i\overline{\alpha}}\frac{F^{+}(0)}{F_2^{+}(0)}+sV^{+}\frac{F^{+}(\overline{\alpha})}{F_2^{+}(\overline{\alpha})} \quad (1.10)$$

Так как точки $-\omega/a,\ -\omega/b,\ -\omega/c_R$ не принадлежат верхней полуплоскости плоскости $\overline{\alpha}$, то правая часть уравнения (1.10) представляет собой функцию аналитическую в верхней полуплоскости, а левая часть того же уравнения – в нижней полуплоскости. По принципу непрерывного продолжения можно утверждать, что левая и правая части этого уравнения являются аналитическими продолжениями одна другой. Остается выяснить поведение определенной таким образом функции, аналитической во всей плоскости $\overline{\alpha}$ в бесконечно удалённой точке. Используя теорему [2], нетрудно показать, что аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Тогда, в силу теоремы Лиувиля, она тождественно равна нулю во всей плоскости $\overline{\alpha}$,

$$k\sigma_{yy}^{-}\frac{F_2^{-}(\overline{\alpha})}{F^{-}(\overline{\alpha})}-\frac{C_0}{2\pi i\overline{\alpha}}\frac{F^{+}(0)}{F_2^{+}(0)}=\frac{C_0}{2\pi i\overline{\alpha}}\frac{F^{+}(\overline{\alpha})}{F_2^{+}(\overline{\alpha})}-\frac{C_0}{2\pi i\overline{\alpha}}\frac{F^{+}(0)}{F_2^{+}(0)}+sV^{+}\frac{F^{+}(\overline{\alpha})}{F_2^{+}(\overline{\alpha})}=0 \quad (1.11)$$

Из (1.11) получаем

$$\sigma_{yy}^{-}=\frac{C_0}{2\pi i\overline{\alpha}}\frac{F^{+}(0)}{F_2^{+}(0)}\frac{F^{-}(\overline{\alpha})}{F_2^{-}(\overline{\alpha})}$$

где $F^{+}(0)=F^{-}(0)=\sqrt{\dfrac{a^3/b^3}{2\left(a^2/b^2-1\right)}},\ F_2^{+}(0)=\left[1-1/\rho ka\right]\dfrac{a^5/b^4}{2G^{-}(0)\left(a^2/b^2-1\right)\sqrt{a/b}\,\alpha_1^0\alpha_2^0\omega}$

Сделав обратные преобразования Лапласа и Фурье и переходя к безразмерным переменным $\overline{\alpha}=\alpha\omega/a;\ \ \overline{\zeta}=\zeta\omega/a,$ можно получить решение (1.5) в форме Смирнова-Соболева [3], при $y=0,\ \ x>0$

$$\sigma_{yy}=-2\operatorname{Re}\frac{C_0}{2\pi ati}\frac{F^{+}(0)}{F_2^{+}(0)}\frac{F^{-}\left(at/x\right)}{F_2^{-}\left(at/x\right)} \quad (1.12)$$

где

$$F^{-}\left(at/x\right)=\frac{a/c_R-at/x}{\sqrt{1-at/x}\sqrt{a/b-at/x}}\exp\left[-\frac{1}{\pi}\int_1^{a/b}\operatorname{arctg}\frac{4\zeta^2\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{a^2/b^2-\zeta^2}}{\left(a^2/b^2-2\zeta^2\right)^2}\frac{d\zeta}{\zeta-at/x}\right]$$

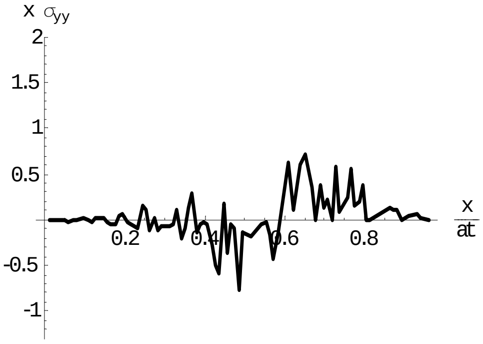
$$F_2^{-}\left(at/x\right)=\frac{G^{-}\left(at/x\right)\left(at/x-\alpha_1^0\right)\left(at/x-\alpha_2^0\right)}{a\sqrt{a/b-at/x}\sqrt{1-at/x}} \quad (1.13)$$

В формуле $F_2^{+}(0)$ подставлено $\omega=1$.

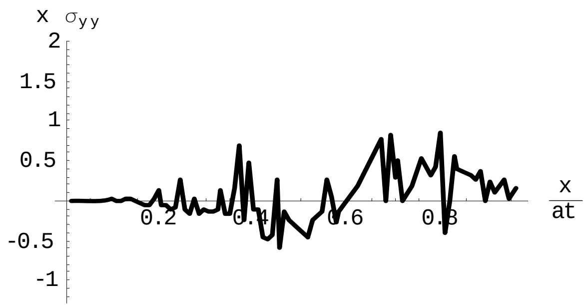
Из формулы (1.12) видно, что особенности при $x=0$ нет.

При $x=0,\ k\neq 0$ σ_{yy} конечно около края штампа, тем не менее, применимость полученного по линейной теории упругости решения может нарушаться при $\sigma_{yy}\geq\sigma_s$, где σ_s есть предел перехода в неупругое состояние. Чтобы выяснить, для каких приложенных перемещений C_0 это будет, на полуоси $x>0$ сделаны расчёты интегралов в $\frac{C_0}{\pi at}\mathrm{Re}\, i\frac{F^{+}(0)}{F_2^{+}(0)}\frac{F^{-}\left(at/x\right)}{F_2^{-}\left(at/x\right)}$ и результаты приведены на графике для $0.01 < x/at < 0.9606,\ C_0/\pi a = 0.6$

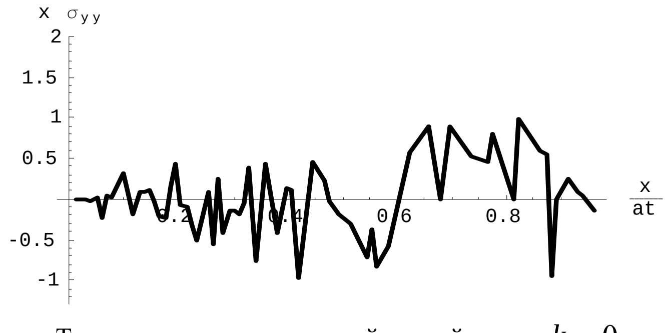
а) $ak\rho = 0.4\ \ \alpha_1^0 = 5.20618i,\ \alpha_2^0 = 0.998188,$



б) $ak\rho = 0.6,\ \ \alpha_1^0 = 3.07749\ \mathrm{i},\ \alpha_2^0 = 0.993729$



в) $ak\rho = 0.8,\ \ \alpha_1^0 = 11.7915\ i,\ \ \alpha_2^0 = 0.97917$



Теперь рассмотрим частный случай, когда $k = 0$

$$\sigma_{yy} = 0, x < 0,\ \frac{\partial V}{\partial t} = C_0 H\left(x\right)\delta(t),\ \ x > 0 \qquad (1.14)$$

$$\sigma_{xy} = 0,\ -\infty < x < \infty$$

Аналогично получим решение (1.14) в виде

$$\sigma_{yy} = 2\rho a\frac{C_0}{\pi t}\left(a^2/b^2 - 1\right)\sqrt{\frac{a^5}{2b^3\left(a^2 - b^2\right)}}\frac{b^4}{a^4}\mathrm{Re}\frac{F^{-}\left(at/x\right)\sqrt{x - bt}}{i\sqrt{x}} \qquad (1.15)$$

т. е. имеем известную особенность.

2.1. В этом параграфе рассмотрена следующая сингулярная граничная задача $(y=0)$:

$$\sigma_{xy}=0,\ x<0,\ \frac{\partial U}{\partial t}+k\sigma_{xy}=C_0H(x)\delta(t),\quad x>0 \tag{2.1}$$

$$\sigma_{yy}=0,\ -\infty<x<\infty$$

для которой получено уравнение Винера-Хопфа следующего вида:

$$\sigma_{xy}^{-}k\left(1+\frac{s\omega^2\overline{\beta}_2}{k\rho b^4 iR(\overline{\alpha})}\right)=\frac{C_0}{2\pi i\overline{\alpha}}+sU^{+} \tag{2.2}$$

$$\sigma_{xy}^{-}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\overline{\sigma}_{xy}\Big|_{y=0}e^{-i\overline{\alpha}x}dx,\ U^{+}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\overline{U}\Big|_{y=0}e^{-i\overline{\alpha}x}dx$$

Для решения уравнения (2.2) введем функцию

$$F_4(\overline{\alpha})=\left(R(\overline{\alpha})-\omega^3\overline{\beta}_2/k\rho b^4\right)\frac{1}{2\omega^2\left(1/b^2-1/a^2\right)\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2} \tag{2.3}$$

$F_4(\overline{\alpha})\to 1$ при $\overline{\alpha}\to\infty$.

Эта функция имеет шесть нулей, которые обозначим через $\frac{\omega}{a}\alpha_1^0$, $\frac{\omega}{a}\overline{\alpha_1^0}$, $\frac{\omega}{a}\alpha_2^0$, $\frac{\omega}{a}\overline{\alpha_2^0}$, $\frac{\omega}{a}\alpha_3^0$, $\frac{\omega}{a}\overline{\alpha_3^0}$. Для факторизации функции $F_4(\overline{\alpha})$ введем функцию

$$F_5(\overline{\alpha})=F_4(\overline{\alpha})\frac{\left(\omega/a-\overline{\alpha}\right)\left(\omega/a+\overline{\alpha}\right)^5}{\left(\overline{\alpha}-\frac{\omega}{a}\alpha_1^0\right)\left(\overline{\alpha}-\frac{\omega}{a}\alpha_2^0\right)\left(\overline{\alpha}-\frac{\omega}{a}\overline{\alpha_1^0}\right)\left(\overline{\alpha}-\frac{\omega}{a}\overline{\alpha_2^0}\right)\left(\overline{\alpha}-\frac{\omega}{a}\alpha_3^0\right)\left(\overline{\alpha}-\frac{\omega}{a}\overline{\alpha_3^0}\right)} \tag{2.4}$$

$F_5(\overline{\alpha})\to 1$ при $\overline{\alpha}\to\infty$.

Функция $F_5(\overline{\alpha})$ не имеет нулей во всей комплексной плоскости $\overline{\alpha}$ и известным методом [2] можно представить

$$F_5(\overline{\alpha})=F_5^{+}(\overline{\alpha})F_5^{-}(\overline{\alpha}) \tag{2.5}$$

Сделав обратные преобразования Лапласа и Фурье и переходя к безразмерным переменным $\overline{\alpha}=\alpha\omega/a;$ $\overline{\zeta}=\zeta\omega/a,$ можно получить решение (2.2) в виде Смирнова-Соболева [3], при $x=0,\ k\neq 0$

$$\sigma_{xy}=\frac{C_0}{\pi kat}\cdot\frac{\sqrt{2\left(a^2/b^2-1\right)}}{\left(1-1/k\rho b\right)a^2/b^2}\mathrm{Re}\frac{G_1^{-}(0)\alpha_1^0\alpha_2^0\alpha_3^0\left(a/c_R-at/x\right)}{iG_1^{-}(at/x)\left(at/x-\alpha_1^0\right)\left(at/x-\alpha_2^0\right)\left(at/x-\alpha_3^0\right)}\times$$
$$\times\exp\left[-\int_1^{a/b}\mathrm{arctg}\frac{4\zeta^2\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{a^2/b^2-\zeta^2}}{\left(a^2/b^2-2\zeta^2\right)^2}\frac{d\zeta}{\zeta-at/x}\right] \tag{2.6}$$

где

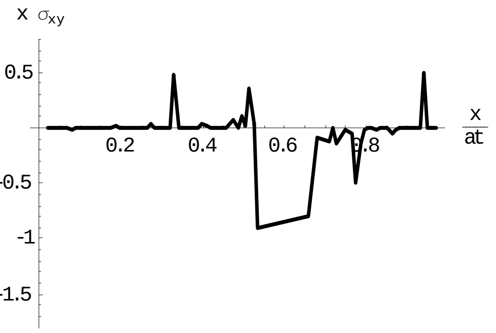
$$G_1^-\left(at/x\right)=Exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{a/b}\operatorname{arctg}\frac{4\zeta^2\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{a^2/b^2-\zeta^2}}{\left(a^2/b^2-2\zeta^2\right)^2-\sqrt{a^2/b^2-\zeta^2}\left(ka\rho\right)^{-1}a^4/b^4}\frac{d\zeta}{\zeta-at/x}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int\limits_{a/b}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\left(\rho ka\right)^{-1}\sqrt{\zeta^2-a^2/b^2}\,a^4/b^4}{\left(a^2/b^2-2\zeta^2\right)^2-4\zeta^2\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\zeta^2-a^2/b^2}}\frac{d\zeta}{\zeta-at/x}\right\}$$

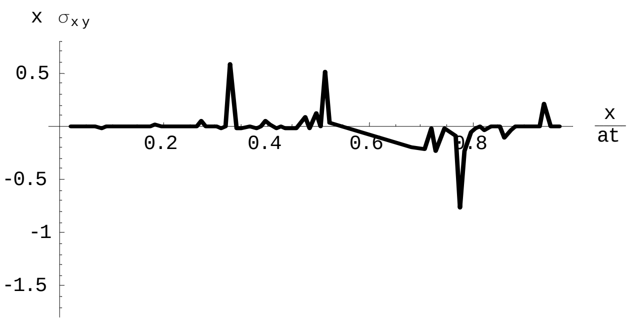
Из формулы (2.6) видно, что особенности при $x=0$ нет.

Сделаны расчеты интегралов в $x\sigma_{xy}$ и результаты приведены на графиках для $0.02<x/at<0.9706,\ C_0/a=0.6$

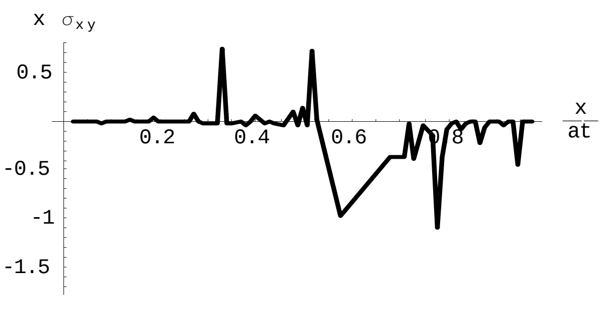
а) $ak\rho=0.4,\ \ \alpha_1^0=5.40389\,i,\ \ \alpha_2^0=-1.71871+0.0247045\,i,\ \alpha_3^0=-1.71871+0.0247045\,i$



б) $ak\rho=0.6,\ \ \alpha_1^0=3.42057\,i,\ \ \alpha_2^0=-1.72191+0.0466494\,i,\ \alpha_3^0=1.72191+0.0466494i$



в) $ak\rho=0.8,\ \ \alpha_1^0=2.37734\,i,\ \ \alpha_2^0=1.73228\ +0.0663149\,i,\ \alpha_3^0=-1.73228\ +0.0663149\,i$



2.2 Теперь рассмотрим частный случай, когда $k = 0$

$$\sigma_{xy} = 0,\ \ x < 0 \quad \frac{\partial U}{\partial t} = C_0 H(x)\delta(t),\ \ x > 0 \tag{2.7}$$

$$\sigma_{yy} = 0,\ \ -\infty < x < \infty$$

Аналогично получим решение в виде

$$\sigma_{yy} = 2\sqrt{2}\rho a \frac{C_0}{\pi t}\sqrt{a^2/b^2 - 1}b^2/a^2\sqrt{b/a}\,\mathrm{Re}\frac{F^-(at/x)\sqrt{x-at}}{i\sqrt{x}} \tag{2.8}$$

т. е. имеем известную особенность.

Автор благодарит д. ф.-м. н., профессора А. Н. Мартиросяна за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Варданян С.В., Мартиросян Г.А., Костандян К.С., Динунц А.С. Нестационарные задачи о трещинах и штампах / Вестник, Ереван: 2007, с.106-119.
2. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: И.Л. 1962. 278 с.
3. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред //Ереван: «Зангак-97». 2007. 244с.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 274с.
5. Горячева И.Р. Механика фракционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 480с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Динунц А. С. – преподаватель кафедры математики Горисского гос.университета

E-mail: dinunts2007@rambler.ru

Поступила в редакцию 12.01.2010