ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **63, №2, 2010** **Механика**

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКИ

ЦАТУРЯН А. Е

Ключевые слова: стержень, сосредоточенная масса, дивергентная неустойчивость, флаттер.
Keywords: beam,point mass,devergent instability,flutter.

Ծատուրյան Ա.Ե.
Ձողի լայնական տատանումները հետևող ուժի ազդեցության տակ

Դիտարկվում է ձողի կայունության խնդիր երկու տարբեր եզրային պայմաններով:Գտնված են ուժի կրիտիկական արժեքներ, որոնց դեպքում առկա են դիվերգենտ և ֆլատտերային անկայունություններ:

Tsaturyan A.E.
Transverse Vibration of Vertical Beam Under Action of Follower Type Load

In this work the problem of stability of disturbed movement beam with point mass at two different boundary condition is considered.Found critical value of force when taked place devergent and flutter instability.

В работе рассматривается задача устойчивости возмущенного движения стержня при двух различных граничных условиях. Найдены критические значения сил, при которых имеют место дивергентная и флаттерная неустойчивости.

1.Пусть конец стержня $x=0$ закреплен таким образом, что нет перемещений, а изгибающий момент пропорционален тангенсу угла наклона балки. На другом конце стержня $x=l$ изгибающий момент равен нулю и приложены следящая сжимающая нагрузка P и сосредоточенная масса m .
В предположении, что масса стержня и силы сопротивления пренебрежимо малы, уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид [1]

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (1.1)$$

где $w(x,t)$ – прогиб стержня.

Исследуем уравнение (1.1) при следующих граничных условиях [1, 2]:

$$w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial x}-\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\quad x=0 \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\quad EJ\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad x=l \qquad (1.3)$$

В работе [1] исследована задача устойчивости стержня при $\delta=0$, что соответствует условию жесткого защемления конца $x=0$. Отыскивая решение задачи устойчивости (1.1)-(1.3) в виде

$$w(x,t)=f(x)e^{i\omega t} \qquad (1.4)$$

приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$f''''(x) + k^2 f''(x) = 0 \tag{1.5}$$

$$f(x) = 0, \quad f'(x) - \delta f''(x) = 0, \quad x = 0$$

$$f''(x) = 0, \quad EJf'''(x) = -m\omega^2 f(x), \quad x = l \tag{1.6}$$

где $k^2 = \dfrac{P}{EJ}$.

Подставляя общее решение уравнения (1.5)

$$f(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4$$

в граничные условия (1.6), получаем следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $C_i \neq 0,\ i = \overline{1,4}$

$$\begin{aligned}
&C_2 + C_4 = 0\\
&C_1 k + \delta k^2 C_2 + C_3 = 0\\
&C_1 k^2 \sin kl + C_2 k^2 kl = 0\\
&C_1(\omega^2 m \sin kl - EJk^3 \cos kl) +\\
&+C_2(EJk^3 \sin kl + \omega^2 m \cos kl - m\omega^2) + C_3 ml\omega^2 = 0
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Чтобы иметь ненулевые коэффициенты C_i, приравниваем нулю детерминант системы (1.7)

$$\begin{vmatrix} m\omega^2 \sin kl - EJk^2 \cos kl & EJk^2 \sin kl + m\omega^2 \cos kl - m\omega^2 & m\omega^2 l \\ -k^2 \sin kl & -k^2 \cos kl & 0 \\ k & \delta k^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

откуда получаем следующее выражение для частот собственных колебаний стержня:

$$\omega^2 = \frac{EJ}{ml^3} \frac{\alpha^3}{\sin\alpha(1 + \delta\alpha^2/l) - \alpha\cos\alpha}, \quad \alpha > 0 \tag{1.8}$$

где $\alpha = kl$.

Переходя к пределу при $a \to 0 \quad (P \to 0)$ в выражении (1.8), в принятом приближении получаем

$$\omega^2 = \frac{3}{1 + 3\delta/l} \frac{EJ}{ml^3}, \quad \alpha = 0 \tag{1.9}$$

Из выражения (1.9) очевидно, что $\omega^2 > 0$ при всех δ. Иными словами, при отсутствии следящей силы P возмущенное движение стержня устойчиво при всех δ.

Обращая знаменатель (1.8) в нуль

$$\mathrm{tg}\alpha = \alpha \cdot (1 + \alpha^2 \delta/l)^{-1} \tag{1.10}$$

находим критические значения силы P, приводящие к флаттерной неустойчивости.

В табл. 1 приведены некоторые критические значения P для соответствующих значений δ/l.

Таблица 1

δ / l	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
α	4.49	4.13	3.9	3.76	3.66	3.59	3.54	3.49	3.46	3.42	3.4
α^2	20.16	17.05	15.21	14.13	13.39	12.88	12.53	12.18	11.97	11.69	11.56

При $\delta \to 0$ уравнение (1.8) преобразуется к виду

$$\omega^2 = \frac{EJ}{ml^2} \frac{\alpha^2}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha},$$

совпадающему с выражением для частот собственных колебаний консоли, нагруженной следящей силой и при наличии сосредоточенной массы на свободном конце [1].

В случае $\delta \to \infty$ из (1.10) следует, что $\omega^2 \to 0$. Это означает, что имеем шарнирно закрепленный стержень. В этом случае $\left(\omega^2 = 0\right)$ имеет место дивергентная неустойчивость $\left(\omega^2 = 0\right)$. Критическая сила для балки с распределённой массой, найденная Бекком, равна $P_{\text{кр}} = 20.05 \times \frac{EJ}{l^2}$, которая получается при $\delta/l = 3{,}14$, поскольку

$$\frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{20.05} - \tan\sqrt{20.05}}{20.05\tan\sqrt{20.05}} = 3.1428$$

Из соотношения (1.10) следует, что при увеличении величины δ значение $P_{\text{кр}}$ уменьшается , т.е. при $\delta \gg 0$ понадобится все меньшее значение $P_{\text{кр}}$, при котором система выходит из равновесного состояния.

2. Теперь рассмотрим задачу устойчивости стержня с упругим закреплением на конце $x = 0$ в предположении, что на свободном конце $x = l$ наряду с приложенной следящей силой P имеется, также, сосредоточенный инерционный момент I. При этом, уравнение колебаний возмущенного движения стержня и граничные условия будут описываться следующими соотношениями [1-3]:

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{2.1}$$

$$w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} - \delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad x = 0 \tag{2.2}$$

$$EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2},\quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \qquad x = l \tag{2.3}$$

Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче (1.1)-(1.3), нетрудно показать, что и в этом случае упругое закрепление приводит к уменьшению значения критической силы $P_{\text{кр}}$.

В самом деле, приравнивая детерминант системы алгебраических уравнений нулю

$$\begin{vmatrix} k\gamma\omega^2\cos kl + k^2\sin kl & k^2\cos kl - \gamma\omega^2 k\sin kl & \gamma\omega^2 \\ -k^3\cos kl & k^3\sin kl & 0 \\ k & \delta k^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

получаем выражение для квадрата частот собственных колебаний стержня

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\gamma(l\sin\alpha + \delta\alpha\cos\alpha)} \tag{2.4}$$

где $\alpha = kl,\ \gamma = \dfrac{I}{EJ}$.

Легко показать, что предел квадрата частоты ω^2 при $\alpha \to 0$ равен

$$\omega^2 = \frac{EJ}{l(l+\delta)} \tag{2.5}$$

откуда очевидно, что при всех значениях δ возмущенное движение стержня устойчиво. Критические значения силы P определяются из решения уравнения

$$\mathrm{tg}\alpha = \alpha \cdot \delta/l \tag{2.6}$$

которые приведены в табл. 2 при соответствующих значениях δ/l.

Таблица 2

δ/l	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
α	3.14	2.86	2.65	2.5[illegible]	2.38	2.29	2.22	2.16	2.11	2.06	2.03
α^2	9.86	8.18	7.02	6.2[illegible]	5.66	5.24	4.93	4.67	4.45	4.24	4.12

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 337с.
2. Чжунь (K.R. Chun) Собственные колебания балки с упругим закреплением на одном конце и другим свободным концом. //Прикладная механика. (Тр.америк.общ. инженеров-механиков) 1972. Мир, № 4. С.298-299.
3. Ржаницын А.Р. Консольный стержень, нагруженный следящей силой. //Изв. НАН Армении. Механика. 1985. Т.38. №5. С.33-44.

Сведения об авторе:

Цатурян Ануш Ерджаниковна – мл. н. сотр. Института механики НАН Армении

E-mail: anntsaturyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 13.11.2008