

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛАТТЕРА ВЯЗКОУПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ
ПЛАСТИН
ХУДАЯРОВ Б.А.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, численные методы и алгоритмы, пластина, флаттер, вязкоупругость.

Key words: integro-differential equations, numerical methods and algorithm, plates, flutter, viscoelastic.

Խուդայարով Բ. Ա.

Առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ սալերի ֆլատերի հետազոտումը

Հետազոտվում է առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ սալերի ֆլատերը գազի հոսանքով շրջհոսվելիս: Աշխատանքի հիմնական ուղղությունը կայանում է նյութի առաձգամածուցիկ հատկությունների հաշվառումը գերձայնային արագությունների դեպքում: Մշակված է ալգորիթմ ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման համար: Բերված են ֆլատերի կրիտիկական արագության հաշվարկի արդյունքները:

Khudayarov B. A.

The Investigation of Flutter of Viscoelastic of Orthotropic Plates

The flutter of viscoelastic of orthotropic plates streamlined by a gas current are investigated. The basic direction of the present work consists in taking into account of viscoelastic material properties at supersonic speeds. An algorithm of the numerical solution for the problem has been worked out on the basis of the method. The results of the flutter critical speed calculations have been given.

Исследуется задача о флаттере вязкоупругих ортотропных пластин, обтекаемых потоком газа. Основное направление работы состояло в учёте вязкоупругих свойств материала при сверхзвуковых скоростях. Разработан алгоритм численного решения интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Приведены результаты расчетов критической скорости флаттера.

Исследование задачи о колебаниях вязкоупругих пластин, цилиндрических панелей и оболочек, обладающих различными механическими свойствами по разным направлениям, привлекло к себе особое внимание в связи с применением в конструкциях композиционных материалов с непрерывными волокнами из стекла, бора, углерода, графита и т.д.

Задача нелинейного флаттера ортотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, была впервые рассмотрена в работе [1], где для аэродинамических сил использовалась приближенная формула «поршневой теории». В работе [2] задача решается в нелинейной постановке для трехслойной ортотропной пластинки. Позднее [3] эта задача рассматривалась для упругих ортотропных панелей, а динамический процесс рассмотрен без учета распространения упругих волн, однако в вязкоупругой постановке задача не исследована.

В данной работе рассматривается вязкоупругая ортотропная пластина в потоке газа. Определена критическая скорость флаттера пластины.

Рассмотрим прямоугольную вязкоупругую ортотропную пластинку со сторонами a и b , которая обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа со скоростью V . Будем предполагать, что оси ортотропии материала совпадают с направлениями осей x и y . Аэродинамическое давление учитываем по поршневой теории А.А. Ильюшина [4].

Нелинейные уравнения движения вязкоупругих ортотропных пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, записываются в виде:

$$B_{11}^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{12}^* \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) +$$

$$+ B^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$B_{22}^* \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{21}^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) +$$

$$+ B^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{h^2}{12} \left\{ B_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [8B^* + B_{12}^* + B_{21}^*] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \left[B_{11}^* \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12}^* \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial w}{\partial y} B^* \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} \left[B_{21}^* \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22}^* \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial w}{\partial x} B^* \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} + \quad (3)$$

$$+ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{B}{h} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{BV}{h} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{B_1 V^2}{h} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 0$$

где ρ – плотность материала; h – толщина оболочки; $B_{ij}^* = b_{ij}(1 - R_{ij}^*)$; $B^* = b(1 - R^*)$; $(i, j = 1, 2)$; R_{ij}^*, R^* – интегральные операторы:

$$R^* \varphi(t) = \int_0^t R(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad R_{ij}^* \varphi(t) = \int_0^t R_{ij}(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau; \quad R(t - \tau), \quad R_{ij}(t - \tau) -$$

ядра релаксации, определяемые при рассмотрении одноосной задачи.

Граничные условия будут иметь вид:

$$\text{при } x = 0, x = a \quad w = 0, \quad v = 0, \quad N_x = 0, \quad M_x = 0$$

$$\text{при } y = 0, y = b \quad w = 0, \quad u = 0, \quad N_y = 0, \quad M_y = 0$$

Этим условиям удовлетворим, представляя искомые функции $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$ в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

$$v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (4)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

Решение уравнения (1)–(3), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать в виде (4). Подставляя (4) в систему (1)–(3) и применяя метод Бубнова-Галеркина, получим систему ИДУ. Введя в ИДУ следующие безразмерные

величины: $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{u}{h}, \frac{v}{h}, \frac{w}{h}, \frac{V_\infty t}{a}$ и сохраняя при этом прежние

обозначения, запишем:

$$\begin{aligned} & \ddot{u}_{kl} + (a_{10}C_{11}^* + a_{11}C^*)u_{kl} + (a_{12}C_{12}^* + a_{13}C^*)v_{kl} + \\ & + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \left[(a_{16}C_{11}^* + a_{17}C^*)\Delta_{1klmnr} - (a_{18}C_{12}^* + a_{19}C^*)\Delta_{2klmnr} \right] w_{nm} w_{ir} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{v}_{kl} + (a_{20}C_{22}^* + a_{21}C^*)v_{kl} + (a_{22}C_{21}^* + a_{23}C^*)u_{kl} + \\ & + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \left[(a_{26}C_{22}^* + a_{27}C^*)\Delta_{3klmnr} - (a_{28}C_{21}^* + a_{29}C^*)\Delta_{4klmnr} \right] w_{nm} w_{ir} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \dot{w}_{kl} + M\dot{w}_{kl} + (a_{30}C_{11}^* + a_{31}C_{12}^* + a_{32}C_{22}^* + a_{33}C^*)w_{kl} + \\ & + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M b_{2klmnr} C_{12}^* w_{nm} w_{ir} + \\ & + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M w_{nm} \left\{ (d_{1klmnr} C_{11}^* + d_{2klmnr} C_{21}^* + d_{3klmnr} C^*)u_{ir} + (d_{4klmnr} C_{12}^* + \right. \\ & + d_{5klmnr} C_{22}^* + d_{6klmnr} C^*)v_{ir} + (d_{7klmnr} C_{11}^* + d_{8klmnr} C_{12}^* + d_{9klmnr} C_{22}^*)w_{ir} \left. \right\} + \\ & + \mathfrak{N}\lambda M_p \left(2\lambda_1 M^* \sum_{n=1}^N \gamma_{nk} w_{nl} + \frac{\mathfrak{N}+1}{4} M^{*2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \Gamma_{klmnr} w_{nm} w_{ir} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= \pi^2 k^2 \Delta; \quad a_{11} = \pi^2 l^2 \lambda^2 g; \quad a_{12} = \pi^2 kl \lambda \Delta; \quad a_{13} = \pi^2 kl \lambda g \\ a_{16} &= \pi n i^2 \Delta / \lambda_1; \quad a_{17} = \pi n r^2 \lambda^2 g / \lambda_1; \quad a_{18} = \pi m i r \lambda^2 \Delta / \lambda_1 \\ a_{19} &= \pi m i r \lambda^2 g / \lambda_1; \quad a_{20} = \pi^2 \lambda^2 l^2 / \Delta; \quad a_{21} = \pi^2 k^2 g; \quad a_{22} = \pi^2 \lambda kl / \Delta \\ a_{23} &= \pi^2 kl \lambda g; \quad a_{26} = \pi \lambda^3 r^2 m / (\Delta \lambda_1); \quad a_{27} = \pi m i^2 \lambda g / \lambda_1 \\ a_{28} &= \pi \lambda n i r / (\Delta \lambda_1); \quad a_{29} = \pi n i r \lambda g / \lambda_1 \\ a_{30} &= \frac{\pi^4 k^4 \Delta}{12 \lambda_1^2}; \quad a_{31} = \frac{\lambda^4 \pi^4 \Delta}{6 \lambda_1^2}; \quad a_{33} = \frac{\lambda^4 \pi^4 g}{3 \lambda_1^2}; \quad a_{32} = \frac{1}{\Delta} \frac{\lambda^4 \pi^4 l^4}{12 \lambda_1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{1klmnr} &= \lambda_1 n i \Delta \pi (n \Delta_{7klmnr} + i \Delta_{5klmnr}); \quad d_{5klmnr} = \lambda^2 m i (r \Delta_{6klmnr} - \\ & - m \Delta_{7klmnr}) / (\Delta \lambda_1); \quad d_{2klmnr} = \beta_1 n \Delta k_x (i \Delta_{5klmnr} - n \Delta_{7klmnr}) \\ d_{3klmnr} &= r \lambda^2 \Delta \pi (i m \Delta_{6klmnr} + n r \Delta_{5klmnr} - 2 n r \Delta_{8klmnr}) / \lambda_1; \quad d_{8klmnr} = \lambda^2 m r \pi \times \\ & \times (\lambda r \Delta_{6klmnr} - m \Delta_{7klmnr}) / (\Delta \lambda_1); \quad d_{9klmnr} = m \lambda^2 (\lambda_1 r k_y \Delta_{6klmnr} - m \beta_1 k_x \Delta_{7klmnr}) / \Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{6klmnr} &= \left(-nmrg\pi\lambda\Delta_{8klmnr}(\lambda+1) + mir\pi g\lambda^2\Delta_{6klmnr} + nr^2\pi g\lambda^2\Delta_{5klmnr} \right) / \lambda_1 \\
d_{7klmnr} &= \left(-nmig\pi\lambda\Delta_{8klmnr}(\lambda+1) + mi^2\pi g\lambda\Delta_{6klmnr} + nir\pi g\lambda\Delta_{5klmnr} \right) / \lambda_1 \\
d_{4klmnr} &= n\beta_1 k_y \Delta(i\Delta_{5klmnr} - n\Delta_{7klmnr}) + m\lambda^2 k_x (r\beta_1\Delta_{6klmnr} - m\Delta_{7klmnr} / \lambda_1) / \Delta \\
C_{11}^* &= \frac{1-R_{11}^*}{1-\mu_1\mu_2}; \quad C_{12}^* = \frac{\mu_2(1-R_{12}^*)}{1-\mu_1\mu_2}; \quad C_{21}^* = \frac{\mu_1(1-R_{21}^*)}{1-\mu_1\mu_2} \\
C_{22}^* &= \frac{1-R_{12}^*}{1-\mu_1\mu_2}; \quad C^* = 1-R^*; \quad \Delta = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}; \quad g = \frac{G}{\sqrt{E_1 E_2}}
\end{aligned}$$

Требуется найти критическую скорость флаттера $V_{кр}$ [5, 6] из решения системы ИДУ (5)-(7), удовлетворяющего начальным условиям:

$$\begin{aligned}
u_{nm}(0) &= u_{0nm}, \quad \dot{u}_{nm}(0) = \dot{u}_{0nm}, \quad v_{nm}(0) = v_{0nm}, \quad \dot{v}_{nm}(0) = \dot{v}_{0nm}, \\
w_{nm}(0) &= w_{0nm}, \quad \dot{w}_{nm}(0) = \dot{w}_{0nm}
\end{aligned}$$

Для решения задачи нелинейного флаттера вязкоупругих ортотропных пластинок, описываемой системой ИДУ (5)-(7), используем численный метод, основанный на применении квадратурных формул [7].

Интегрируя систему (5)-(7) два раза по t , запишем её в интегральной форме и с помощью рационального преобразования исключим слабо-сингулярные особенности интегрального оператора R^* . Затем, полагая $t = t_i$, $t_i = i\Delta t$, $i = 1, 2, \dots$ ($\Delta t = \text{const}$) и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления $u_{ikl} = u_{kl}(t_i)$, $v_{ikl} = v_{kl}(t_i)$ и $w_{ikl} = w_{kl}(t_i)$, получим следующие рекуррентные формулы для ядра Колтунова – Ржаницына:

$$\begin{aligned}
u_{pkl} &= u_{0kl} + \dot{u}_{0kl} t_p - \sum_{j=0}^{p-1} A_j(t_p - t_j) \left\{ a_{10} \left(u_{jkl} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^j B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) u_{j-skl} \right) + \right. \\
&+ \frac{a_{11}}{\mu_{12}} \left(u_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-skl} \right) + \frac{a_{13}}{\mu_{12}} \left(v_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl} \right) + \\
&+ a_{12} \mu_2 \left(v_{jkl} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^j B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) v_{j-skl} \right) + \\
&+ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \left[\Delta_{1klmnr} a_{16} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^j B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) + \right. \\
&+ \Delta_{1klmnr} \frac{a_{17}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
&- \Delta_{2klmnr} a_{18} \mu_2 \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^j B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
&\left. \left. - \Delta_{2klmnr} \frac{a_{19}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) \right] \right\} \mu_{12} = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{pkl} = & v_{0kl} + \dot{v}_{okl} t_p - \sum_{j=0}^{p-1} A_j (t_p - t_j) \left\{ a_{20} \left(v_{jkl} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^j B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) v_{j-skl} \right) + \right. \\
& + \frac{a_{21}}{\mu_{12}} a_{21} \left(v_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl} \right) + \\
& + \frac{a_{23}}{\mu_{12}} \left(u_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-skl} \right) + \\
& + a_{22} \mu_1 \left(u_{jkl} - \frac{A_{21}}{\alpha_{21}} \sum_{s=0}^j B_s^{(21)} \exp(-\beta_{21} t_s) u_{j-skl} \right) + \\
& + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \left[\Delta_{3klmnr} a_{26} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^j B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) + \right. \\
& + \Delta_{3klmnr} \frac{a_{27}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
& - \Delta_{4klmnr} a_{28} \mu_1 \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{21}}{\alpha_{21}} \sum_{s=0}^j B_s^{(21)} \exp(-\beta_{21} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
& \left. - \Delta_{4klmnr} \frac{a_{29}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) \right] \} \mu_{12} = 0 \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{pkl} = & \frac{\mu_{12}}{1 + A_p M_\lambda} \left\{ w_{0kl} + \left(\dot{w}_{0kl} + M_\lambda w_{0kl} \right) t_p - \sum_{j=0}^{p-1} A_j \left(M_p w_{jkl} - \right. \right. \\
& - (t_p - t_j) \left[\frac{\aleph \lambda M_p}{\mu_{12}} \left(2\lambda_1 M^* \sum_{n=1}^N \gamma_{kn} w_{jnl} + \frac{\aleph + 1}{4} M^{*2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \Gamma_{klnmir} w_{jnm} w_{jir} \right) + \right. \\
& + a_{30} \left(w_{jkl} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^j B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) w_{j-skl} \right) + \\
& + a_{31} \mu_2 \left(w_{jkl} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^j B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) w_{j-skl} \right) + \\
& + a_{32} \left(w_{jkl} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^j B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) w_{j-skl} \right) + \\
& + \frac{a_{33}}{\mu_{12}} \left(w_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-skl} \right) + \\
& \left. + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \mu_2 b_{2klmnr} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^j B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M w_{jnm} \left\langle d_{1klmnr} \left(u_{jir} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^j B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) u_{j-sir} \right) + \right. \\
& + \mu_1 d_{2klmnr} \left(u_{jir} - \frac{A_{21}}{\alpha_{21}} \sum_{s=0}^j B_s^{(21)} \exp(-\beta_{21} t_s) u_{j-sir} \right) + \frac{d_{3klmnr}}{\mu_{12}} \left(u_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \times \right. \\
& \times \exp(-\beta t_s) u_{j-sir} \left. \right) + \mu_2 d_{4klmnr} \left(v_{jir} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^j B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) v_{j-sir} \right) + \\
& + d_{5klmnr} \left(v_{jir} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^j B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) v_{j-sir} \right) + \\
& + \frac{d_{6klmnr}}{\mu_{12}} \left(v_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-sir} \right) + \\
& + \mu_2 d_{8klmnr} \left(w_{jir} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^j B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) w_{j-sir} \right) + \\
& + d_{7rlmnr} \left(w_{jir} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^j B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) w_{j-sir} \right) + \\
& + d_{9klmnr} \left(w_{jir} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^j B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) w_{j-sir} \right) \left. \right\} \\
& p = 1, 2, \dots; \quad k = \overline{1, N}; \quad l = \overline{1, M}
\end{aligned} \tag{10}$$

На основе этого алгоритма создан пакет прикладных компьютерных программ.

Результаты вычислений представлены в табл. 1 и отражаются графиками, приведенными на фиг. 1–6.

Проведены расчеты для вязкоупругих ортотропных пластин применительно к пяти маркам стеклопластика: $\Delta = 5,0129$; $g = 1,1088$; $\mu_1 = 0,3$; $\mu_2 = 0,012$ (марка 1),

($\Delta = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$; $g = \frac{G}{\sqrt{E_1 E_2}}$; E_1, E_2 – линейные модули упругости; G – модуль сдвига;

μ_1, μ_2 – коэффициенты Пуассона); $\Delta = 4,8482$; $g = 0,0226$; $\mu_1 = 0,26$; $\mu_2 = 0,017$ (марка 2); $\Delta = 3,0976$; $g = 0,1549$; $\mu_1 = 0,02$; $\mu_2 = 0,32$ (марка 3); $\Delta = 2,2761$; $g = 0,1398$; $\mu_1 = 0,15$; $\mu_2 = 0,01963$ (марка 4); $\Delta = 2,1467$; $g = 0,1356$; $\mu_1 = 0,13$; $\mu_2 = 0,023$ (марка 5). Результаты расчета для этих марок стеклопластика представлены в первых пяти строках таблицы. Видно, что критическая скорость (при постоянных λ и λ_1) сильно зависит от свойств материала.

Изучено влияние вязкоупругих свойств пластинки для марки 4. Критическая скорость для упругой пластинки составляет 625 м/с, а для вязкоупругой пластинки – 463 м/с. Разница между ними –25,9%.

Зависимость критической скорости флаттера от физико-механических и геометрических параметров пластинки

Таблица 1

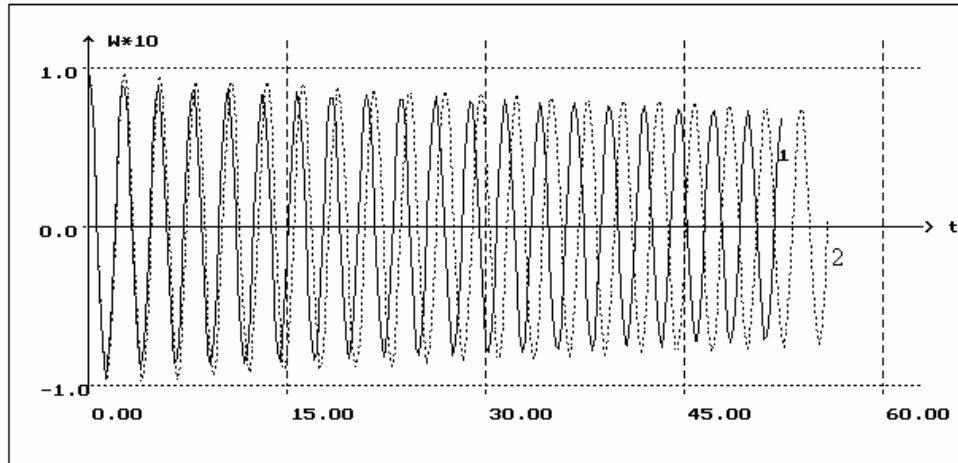
Δ	g	μ_1	μ_2	λ	λ_1	материал панели	$V_{кр}$
5,0129	1,1088	0,3	0,012	2,5	50	вязкоупругий	980
4,8482	0,0226	0,26	0,017				892
3,0976	0,1549	0,02	0,32				615
2,2761	0,1398	0,15	0,01963				463
2,1467	0,1356	0,13	0,023				440
5,0129	1,1088	0,3	0,012	2,1	50	вязкоупругий	532
				2,3			734
				2,6			1124
				2,8			1433
5,0129	1,1088	0,3	0,012	2,5	40	вязкоупругий	1022
					45		725
					50		532
5,0129	1,1088	0,3	0,012	2,5	50	вязкоупругий	985
							1062
							1341
2,2761	0,1398	0,15	0,01963	2,5	50	упругий	625
						вязкоупругий	463

Исследовалось влияние параметра λ (отношение длины стороны a к b) на критическую скорость флаттера вязкоупругих ортотропных пластин, материал которых относится к стеклопластикам марки 1. С ростом параметра λ увеличивается протяженность пластины в направлении течения и происходит сближение удлиненных краев пластины. Последнее способствует повышению относительной жесткости и росту критической скорости, которое можно проследить по табл. 1. При $\lambda = 2,1$ эта скорость равна 532м/с. С увеличением параметра λ до 2,8, критическая скорость возрастает в 2,69 раза.

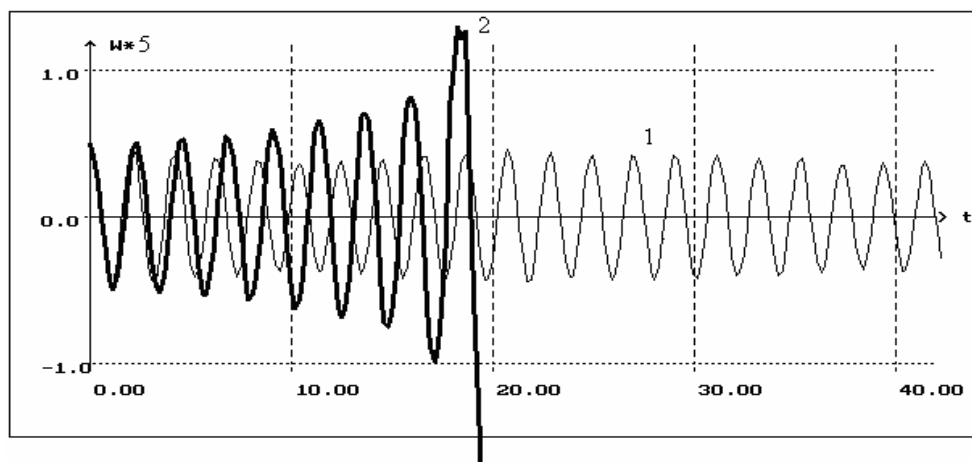
Далее исследовано влияние параметра относительной толщины λ_1 (отношение стороны a к толщине h пластинки) на критическую скорость флаттера. Для $\lambda_1 = 40, 45$ и 50 значения $V_{кр}$ соответственно равны 1022, 725 и 532, то есть с уменьшением толщины стенок пластинки (с увеличением параметра λ_1) критическая скорость флаттера уменьшается.

На фиг. 1 изучено влияние на прогиб свойств материала вязкоупругой ортотропной пластины при числе Маха $M^*=2,1$. При расчете использованы следующие данные: $\Delta = 2,1467$; $g = 0,1356$; $\mu_1 = 0,13$; $\mu_2 = 0,023$ (кривая 1); $\Delta = 1,2389$; $g = 0,1272$; $\mu_1 = 0,142$; $\mu_2 = 0,0925$ (кривая 2); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$; $A_{11} = 0,12$; $\alpha_{11} = 0,2$; $\beta_{11} = 0,08$; $A_{12} = 0,001$; $A_{21} = 0,001$; $\alpha_{12} = 0,02$; $\alpha_{21} = 0,02$; $\beta_{12} = 0,005$; $\beta_{21} = 0,005$; $A_{22} = 0,15$; $\alpha_{22} = 0,32$; $\beta_{22} = 0,5$; $\lambda_1 = 25$, $\lambda = 1,9$. Из этих кривых видно, что характеристики материала пластины сильно влияют на частоту колебаний.

Исследовано влияние вязкоупругих свойств материала на колебательный процесс пластины (фиг.2). С учетом вязкости амплитуда колебаний быстро возрастает, т.е. скорость потока является критической.



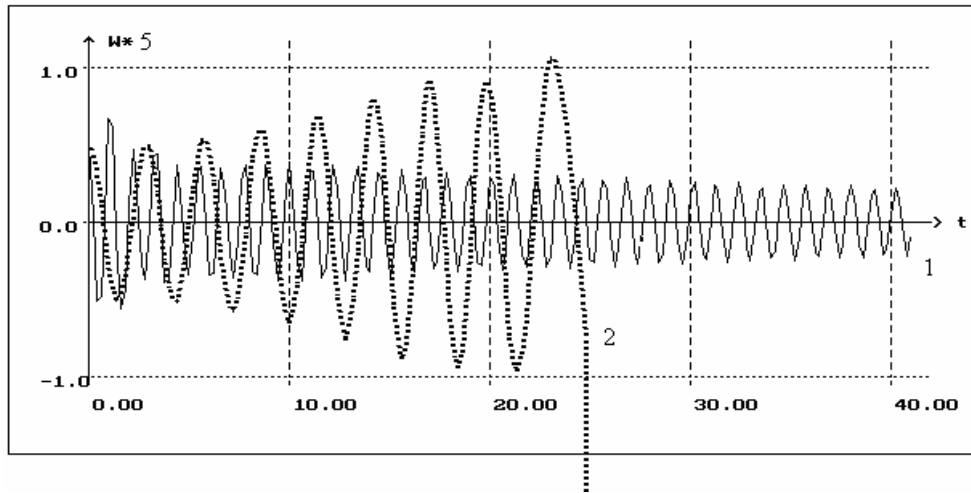
Фиг. 1. $\Delta = 2,1467$; $g = 0,1356$; $\mu_1 = 0,13$; $\mu_2 = 0,023$ (1); $\Delta = 1,2389$; $g = 0,1272$; $\mu_1 = 0,142$; $\mu_2 = 0,0925$ (2); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$; $A_{11} = 0,12$; $\alpha_{11} = 0,2$; $\beta_{11} = 0,08$; $A_{12} = A_{21} = 0,001$; $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,02$; $\beta_{12} = \beta_{21} = 0,005$; $A_{22} = 0,15$; $\alpha_{22} = 0,32$; $\beta_{22} = 0,5$; $\lambda_1 = 25$, $\lambda = 1,9$; $V = 717$ м/с.



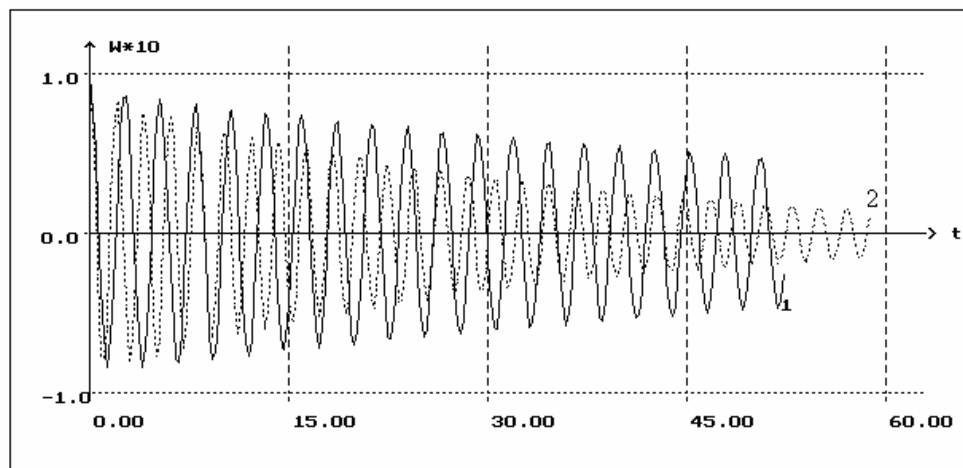
Фиг. 2. Упругий (1); вязкоупругий (2) $\lambda = 2,5$; $V = 528$ м/с; $\lambda_1 = 25$;
 $\Delta = 2,1$; $g = 0,01$; $\mu_1 = 0,32$; $\mu_2 = 0,02$.

Аналогично, на фиг. 3 представлены результаты влияния вязкоупругих свойств пластины. Обе кривые построены в вязкоупругой постановке. Однако, значение вязкости для первой кривой меньше, чем для второй. Поэтому амплитуда колебаний для второй кривой быстрее увеличивается по сравнению с первой. Для второй кривой скорость потока является критической.

На фиг. 4 представлено изменение прогиба w в зависимости от времени t для вязкоупругой пластины в различных числах параметра удлинения λ (сплошная линия для $\lambda = 1,1$ (1); штриховая линия для $\lambda = 1,8$ (2)).

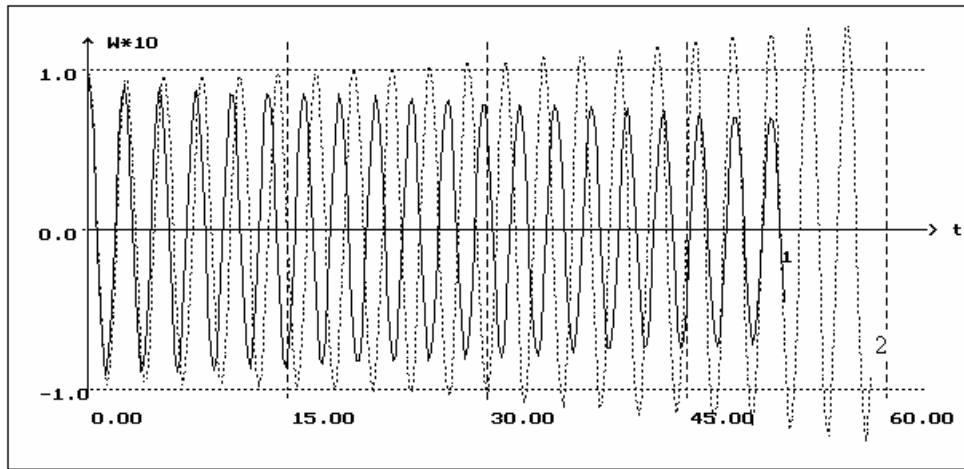


Фиг.3. $A_{11}=0,02$; $A_{12}=A_{21}=0,0001$; $A_{22}=0,01$; $A=0,021$ (1); $A_{11}=0,2$; $A_{12}=A_{21}=0,001$; $A_{22}=0,1$; $A=0,21$ (2); $\alpha_{11}=0,2$; $\beta_{11}=0,08$; $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0,02$; $\beta_{12}=\beta_{21}=0,005$; $\alpha_{22}=0,32$; $\beta_{22}=0,5$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $\lambda=1,5$; $\Delta=2,1467$; $g=0,1356$; $\mu_1=0,13$; $\mu_2=0,023$.

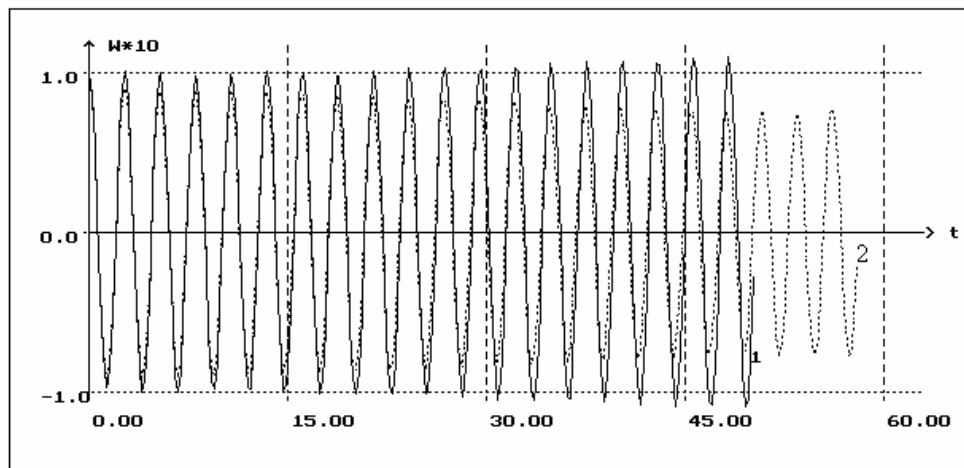


Фиг. 4. $\lambda=1,1$ (1); $\lambda=1,8$ (2); $A=0,1$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$; $A_{11}=0,12$; $\alpha_{11}=0,2$; $\beta_{11}=0,08$; $A_{12}=A_{21}=0,12$; $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0,02$; $\beta_{12}=\beta_{21}=0,005$; $A_{22}=0,15$; $\alpha_{22}=0,32$; $\beta_{22}=0,5$; $\Delta=2,1467$; $g=0,1356$; $\mu_1=0,13$; $\mu_2=0,023$; $V=547$ м/с.

Как видно из фиг.4, расхождение в результатах, полученных по различным числам параметра удлинения λ , как и ожидалось, наблюдается с начального времени. При расчетах использованы следующие реологические параметры: $A_{11}=0,12$; $\alpha_{11}=0,2$; $\beta_{11}=0,08$; $A_{12}=0,12$; $A_{21}=0,12$; $\alpha_{12}=0,02$; $\alpha_{21}=0,02$; $\beta_{12}=0,005$; $\beta_{21}=0,005$; $A_{22}=0,15$; $\alpha_{22}=0,32$; $\beta_{22}=0,5$ и материалы со следующими свойствами: ; $\Delta=2,1467$; $g=0,1356$; $\mu_1=0,13$; $\mu_2=0,023$.



Фиг.5. $\lambda_1 = 20$ (1); $\lambda_1 = 70$ (2); $A = 0,1$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$; $A_{11} = 0,12$; $\alpha_{11} = 0,2$; $\beta_{11} = 0,08$; $A_{12} = A_{21} = 0,012$; $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,02$; $\beta_{12} = \beta_{21} = 0,005$; $A_{22} = 0,15$; $\alpha_{22} = 0,32$; $\beta_{22} = 0,5$; $\Delta = 2,1467$; $g = 0,1356$; $\mu_1 = 0,13$; $\mu_2 = 0,023$.



Фиг. 6. $A = 0,01$; $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,05$ (1); $A_{11} = 0,12$; $\alpha_{11} = 0,2$; $\beta_{11} = 0,01$; $A_{12} = A_{21} = 0,001$; $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,02$; $\beta_{12} = \beta_{21} = 0,03$; $A_{22} = 0,2$; $\alpha_{22} = 0,4$; $\beta_{22} = 0,08$; $A = 0,01$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$ (2); $\lambda = 1,8$; $\Delta = 2,1$; $g = 0,001$; $\mu_1 = 0,32$; $\mu_2 = 0,01$; $\lambda_1 = 25$; $V = 638 \text{ м/с}$.

Изучено влияние относительной толщины λ_1 на колебания пластины (фиг.5). С уменьшением толщины пластины (с ростом параметра λ_1) амплитуда колебаний быстро возрастает и движение будет флаттерным. Уменьшение параметра λ_1 дает возможность значительно повысить устойчивость пластины.

На фиг. 6 исследовано влияние свойства материала пластины. Пластины имеют следующие геометрические параметры: $\lambda = 1,8$; $\lambda_1 = 25$ и выполнены из материала со следующими свойствами: $\Delta = 1$; $\mu = 0,32$; $A = 0,01$; $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,05$ (кривая 1);

$A_{11}=0,12$; $\alpha_{11}=0,2$; $\beta_{11}=0,01$; $A_{12}=0,001$; $A_{21}=0,001$; $\alpha_{12}=0,02$;
 $\alpha_{21}=0,02$; $\beta_{12}=0,03$; $\beta_{21}=0,03$; $A_{22}=0,2$; $\alpha_{22}=0,4$; $\beta_{22}=0,08$; $A=0,01$;
 $\alpha=0,25$; $\beta=0,05$ (кривая 2). Из графика видно, что для вязкоупругой изотропной пластины амплитуда колебаний медленно возрастает, а для ортотропных – со временем затухает. Это означает, что значение критической скорости флаттера для вязкоупругой изотропной пластины относительно меньше, чем для соответствующей ортотропной (при одинаковых геометрических размерах).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №4. С.91-96.
2. Багдасарян Ж.Е. Об устойчивости трехслойной ортотропной пластинки в сверхзвуковом потоке газа // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1961. Т. XVI. №5. С.21-30.
3. Jehad F.A., Ibrahim R.A., Ronald F.G. Nonlinear Flutter of Orthotropic Composite panel Under Aerodynamic Heating // J. AIAA. 1993. Vol.31. №8. P. 1256–1268.
4. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикладная математика и механика. 1956. Т. XX. Вып. 6. С. 733–755.
5. Худаяров Б.А. Численное решение задачи о флаттере вязкоупругих трехслойных пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №1. С. 59-62.
6. Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А. Исследование влияния вязкоупругого свойства материала конструкций летательного аппарата на критическое время и критические скорости флаттера // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. №1. С. 75–82.
7. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. №5. С. 867-871.
8. Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces. // Intern. J. Solids Structures. 1969, V.5, №9, p.965-989.

Сведения об авторе:

Худаяров Бахтияр Алимович – к.ф.-м.н., доцент каф. «Высшей математики»

Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства

E-mail: bakht-flpo@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.04.2009