

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ СЛОЕМ
ГРИГОРЯН Э.Х., СИНАНЫАН С.С.

Ключевые слова: пьезоэлектрическое пространство, бесконечный металлический слой, полубесконечный слой, поверхностная волна, асимптотические формулы, дальняя зона, цилиндрическая волна.

Key words: Piezoelectric space, infinite metallic layer, semi-infinite layer, surface wave, asymptotic formulae, farther zone, cylindrical wave

Գրիգորյան Է.Խ., Սինանյան Ս.Ս.

Սահի՞ի հարթ էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա անվերջ մետաղական շերտով պլեզոէլեկտրական տարածությունում

Աշխատանքում դիտարկվում է սահի՞ի հարթ էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա անվերջ մետաղական շերտով պլեզոէլեկտրական տարածությունում: Խնդրի լուծումը Ֆուրյեի իրական ձևափոխության օգնությամբ հանգեցվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի խնդրի տիպի խնդրի լուծմանը: Գտնված են տեղափոխության ամպլիտուդի ասիմպտոտիկ բանաձևեր հեռավոր գոտում: Ցույց է տրված, որ կիսաանվերջ մետաղական շերտի առկայությունը բերում է մակերևութային և գլանային ալիքների առաջացմանը և այնպիսի ալիքների առաջացմանը, որոնք ճառագայթի ուղղությամբ տարածվում են ճառագայթի բացվածքի անկյունից կախված արագությամբ:

Grigoryan E.Kh., Sinanyan S.S.

Diffraction of the plane shift electroelastic wave on the semi-infinite metal layer in piezoelectric space with infinite metal layer

Diffraction of the plane shift electroelastic wave on the semi-infinite metal layer in piezoelectric space with infinite metal layer is discussed. Solution of the problem can be brought to the solution of Riemann problem in analytic functions theory, using real Fourier transformation. Asymptotic formulae of shift amplitude in further zone are found. It is shown that the existence of semi-infinite metal layer leads to appearance of surface and cylindrical waves and a wave which propagates in the direction of the beam, with a speed depending on the angle of beam spread.

В работе рассматривается дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. Решение задачи с помощью действительного преобразования Фурье приводится к решению задачи типа Римана в теории аналитической функции. Относительно амплитуд перемещений получены асимптотические формулы в дальней зоне. Показано, что наличие полубесконечного металлического слоя приводит к появлению поверхностных и цилиндрических волн и волны, распространяющейся по направлению луча со скоростью, зависящей от угла раствора луча.

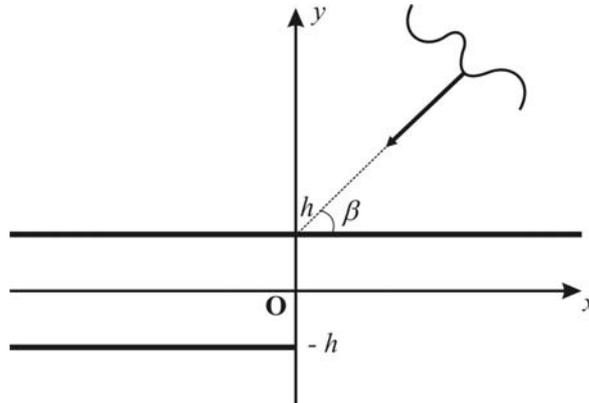
Рассматривается пьезоэлектрическое пространство класса bmm гексагональной симметрии с осью OZ , совпадающей с главной осью кристалла. В пьезоэлектрическом пространстве имеются включения в виде параллельных бесконечных и полубесконечных заземлённых тонких металлических слоев. Считается, что толщина металлических слоев настолько мала, что их жесткостью можно пренебречь, т.е. слои можно рассматривать как электроды, занимающие плоскость

$-\infty < x < \infty, y = h, -\infty < z < \infty$ и полуплоскость
 $-\infty < x \leq 0, y = -h, -\infty < z < \infty$.

Из бесконечности, под углом β к плоскостям электродов ($0 < \beta < \pi/2$), распространяется плоская волна сдвига со следующими значениями перемещения $w_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$ и электрического потенциала $\Phi_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$, где

$$w_\infty(x, y) = e^{-ikx \cos \beta - iky \sin \beta}$$

$$\Phi_\infty(x, y) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} e^{-ikx \cos \beta - iky \sin \beta} \quad (1)$$



Фиг. 1

тогда величины, характеризующие электроупругое поле, зависят от времени, пропорционально $e^{-i\omega t}$. В этом случае уравнения относительно амплитуд перемещения $w(x, y)$ и квазистатического электрического потенциала $\Phi(x, y)$ примут вид [1]:

$$\Delta w + k^2 w = 0, \quad \Delta \Phi + \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} k^2 w = 0 \quad (2)$$

ϵ_{11} – диэлектрическая проницаемость, e_{15} – пьезомодуль, ω – частота колебаний, $k = \omega/c$ – волновое число, $c = \sqrt{c_{44}(1 + \alpha)}/\rho$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой волны, c_{44} – упругая постоянная, ρ – плотность среды,

$$\alpha = e_{15}^2 / c_{44} \epsilon_{11}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ – оператор Лапласа.}$$

Решение уравнения (2) должно удовлетворять контактными условиям:

$$w(x, \pm h + 0) = w(x, \pm h - 0)$$

$$\sigma_{yz}(x, \pm h + 0) = \sigma_{yz}(x, \pm h - 0), \quad \Phi(x, h) = 0$$

$$\Phi(x, -h) = \Phi^+(x), \quad D_y(x, -h + 0) - D_y(x, -h - 0) = -\epsilon_{11} \Psi^-(x) \quad (3)$$

где $\sigma_{yz}(x, y) = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ – амплитуда тангенциальных напряжений,

$D_y(x, y) = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ – амплитуда компоненты вектора электрической

индукции и $\Phi^+(x) = 0$ при $x < 0$, $\Psi^-(x) = 0$ при $x > 0$.

Введем функции

$$u(x, y) = w(x, y) - w_\infty(x, y), \quad \varphi(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_\infty(x, y) \quad (4)$$

Функции $u(x, y)$, $\varphi(x, y)$ удовлетворяют уравнениям (2), а их действительные преобразования Фурье по x удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d^2 \bar{u}(\sigma, y)}{dy^2} - \gamma^2 \bar{u}(\sigma, y) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}(\sigma, y)}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\varphi}(\sigma, y) + k^2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}(\sigma, y) = 0$$

и следующим контактными условиями:

$$\bar{u}(\sigma, \pm h + 0) = \bar{u}(\sigma, \pm h - 0), \quad \bar{\varphi}(\sigma, h) = -2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-ikh \sin \beta} \delta(\sigma - k \cos \beta)$$

$$\bar{\varphi}(\sigma, -h) = \bar{\varphi}^+(\sigma) - 2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{ikh \sin \beta} \delta(\sigma - k \cos \beta) \quad (6)$$

$$c_{44} \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=\pm h+0} + e_{15} \left. \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \right|_{y=\pm h+0} = c_{44} \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=\pm h-0} + e_{15} \left. \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \right|_{y=\pm h-0}$$

$$\left. \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \right|_{y=-h+0} - \left. \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \right|_{y=-h-0} = -\bar{\Psi}^-(\sigma)$$

где

$$\gamma^2 = \sigma^2 - k^2, \quad \bar{f}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad \delta(\sigma) - \text{функция Дирака.}$$

Следует отметить, что функции $\bar{u}(\sigma, y)$, $\bar{\varphi}(\sigma, y)$ еще должны удовлетворять условию уходящей волны.

Решение системы (5), представляющее уходящую волну, имеет вид:

$$\bar{u}(\sigma, y) = A_0(\sigma) e^{-\gamma y} \quad \text{при } y > h \quad (7)$$

$$\bar{\varphi}(\sigma, y) = B_0(\sigma) e^{-|\sigma|y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}$$

$$\bar{u}(\sigma, y) = A_1(\sigma) \text{ch} \gamma y + A_2(\sigma) \text{sh} \gamma y$$

$$\bar{\varphi}(\sigma, y) = B_1(\sigma) \text{ch} |\sigma| y + B_2(\sigma) \text{sh} |\sigma| y + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u} \quad \text{при } |y| < h \quad (8)$$

$$\bar{u}(\sigma, y) = A_3(\sigma) e^{\gamma y}$$

$$\bar{\varphi}(\sigma, y) = B_3(\sigma) e^{|\sigma|y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u} \quad \text{при } y < -h \quad (9)$$

Выше имелось в виду, что $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$, $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$ при $|\sigma| > k$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ обходит точку $\sigma = -k$ сверху, а точку $\sigma = k$ – снизу [2].

Удовлетворив условиям (6), приходим к следующей задаче типа Римана на действительной оси [4-13]:

$$2(1 + \varkappa)|\sigma| \bar{K}(\sigma) \bar{\Phi}^+(\sigma) + \bar{\Psi}^-(\sigma) = 2\pi i c_1 \delta(\sigma - k \cos \beta) \quad (10)$$

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{((1 + \varkappa) - \varkappa|\sigma|/\gamma)}{((1 + \varkappa)(1 + e^{-2|\sigma|h}) - \varkappa|\sigma|(1 + e^{-2\gamma h})/\gamma)((1 + \varkappa)(1 - e^{-2|\sigma|h}) - \varkappa|\sigma|(1 + e^{-2\gamma h})/\gamma)}$$

$$c_1 = \varkappa(1 + \varkappa) \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} 2\eta_1 \eta_2 \left(\frac{\cos(h\eta_2)}{K_1(\eta_1)} + \frac{i \sin(h\eta_2)}{K_2(\eta_1)} \right)$$

Неизвестные функции выражаются решением функционального уравнения

$$\begin{aligned} A_0(\sigma) &= \frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \bar{\Phi}^+(\sigma) \frac{(1 + \varkappa)\gamma e^{\gamma h} (e^{-2|\sigma|h} - e^{-2\gamma h})}{K_1(\sigma)K_2(\sigma)} + \\ &+ 4\pi \varkappa |\sigma| \left(\frac{\cos(h\eta_2)}{K_1(\sigma)} \operatorname{ch} \gamma h - \frac{i \sin(h\eta_2)}{K_2(\sigma)} \operatorname{sh} \gamma h \right) \delta(\sigma - \eta_1) \\ A_1(\sigma) &= -\frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \frac{\bar{\Phi}^+(\sigma) e^{-\gamma h}}{K_1(\sigma)} + \frac{4\pi \varkappa \cos(h\eta_2) \eta_1 e^{i h \eta_2}}{K_1(\eta_1)} \delta(\sigma - \eta_1) \\ A_2(\sigma) &= \frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \frac{\bar{\Phi}^+(\sigma) e^{-\gamma h}}{K_2(\sigma)} - \frac{4\pi i \varkappa \sin(h\eta_2) \eta_1 e^{i h \eta_2}}{K_2(\eta_1)} \delta(\sigma - \eta_1) \\ A_3(\sigma) &= -\frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \bar{\Phi}^+(\sigma) \frac{(1 + \varkappa)\gamma(1 - e^{-2h(|\sigma| + \gamma)}) - |\sigma| \varkappa(1 - e^{-4\gamma h})}{K_1(\sigma)K_2(\sigma)} + \\ &+ 4\pi \varkappa \eta_1 \left(\frac{\cos^2(h\eta_2)}{K_1(\eta_1)} - \frac{\sin^2(h\eta_2)}{K_2(\eta_1)} \right) \delta(\sigma - \eta_1) \end{aligned} \quad (11)$$

$$B_0(\sigma) e^{-|\sigma|h} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A_0(\sigma) e^{-\gamma h} + 2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-i h \eta_2} \delta(\sigma - \eta_1) = 0$$

$$B_3(\sigma) e^{-|\sigma|h} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A_3(\sigma) e^{-\gamma h} + 2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{i h \eta_2} \delta(\sigma - \eta_1) = \bar{\Phi}^+(\sigma) \quad (12)$$

$$2B_1(\sigma) \operatorname{ch} |\sigma|h + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} 2A_1(\sigma) \operatorname{ch} \gamma h + 4\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \cos(h\eta_2) \delta(\sigma - \eta_1) = \bar{\Phi}^+(\sigma) \quad (13)$$

$$2B_2(\sigma) \operatorname{sh} |\sigma|h + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} 2A_2(\sigma) \operatorname{sh} \gamma h - 4\pi i \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \sin(h\eta_2) \delta(\sigma - \eta_1) = -\bar{\Phi}^+(\sigma) \quad (14)$$

где

$$K_1(\sigma) = (1 + \varkappa)\gamma(1 + e^{-2|\sigma|h}) - |\sigma| \varkappa(1 + e^{-2\gamma h})$$

$$K_2(\sigma) = (1 + \varkappa)\gamma(1 - e^{-2|\sigma|h}) - |\sigma| \varkappa(1 - e^{-2\gamma h}), \quad k \cos \beta = \eta_1, \quad k \sin \beta = \eta_2$$

Перейдя к решению (10), заметим, что $\bar{K}(\sigma) \rightarrow 1$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, тогда, имея в виду представления [3],

$$2\pi i \delta(\sigma - \eta_1) = (\sigma - \eta_1 - i0)^{-1} - (\sigma - \eta_1 + i0)^{-1}$$

$$|\sigma| = (\sigma - i0)^{1/2} (\sigma + i0)^{1/2}, (\sigma - i0)^{-1} = \sigma^{-1} + \pi i \delta(\sigma)$$

решение уравнения получим в виде

$$\bar{\Phi}^+(\sigma) = -\frac{c_1}{2(1+\varkappa)(\sigma + i0)^{1/2} \bar{K}^+(\sigma) \bar{K}^-(\eta_1)(\eta_1)^{1/2} (\sigma - \eta_1 + i0)}$$

$$\bar{\Psi}^-(\sigma) = \frac{c_1(\sigma - i0)^{1/2} \bar{K}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\eta_1)(\eta_1)^{1/2} (\sigma - \eta_1 - i0)}$$

где $\bar{K}(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma) \bar{K}^-(\sigma)$, $\bar{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im } \alpha > 0$, а $\bar{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im } \alpha < 0$, $\alpha = \sigma + i\tau$. При этом, $\bar{K}^\pm(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в своих областях регулярности и [2]

$$\bar{K}^\pm(\sigma) = \exp(\bar{R}^\pm(\sigma)), \quad \bar{R}^+(\sigma) = \int_0^\infty R(x) e^{i(\sigma+i0)x} dx, \quad \bar{R}^-(\sigma) = \bar{R}^+(-\sigma)$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \ln[\bar{K}(\sigma)] e^{-i\sigma x} d\sigma$$

Заметим, что как показано в работе [5], на действительной оси ($\sigma \neq 0$) $K_2(\sigma)$ имеет нули только в точках $\sigma = \pm \sigma_{n2}$ при $kh > h_a$, где $\zeta = h_a$ – единственное решение уравнения $2\zeta \varkappa = (1 + \varkappa)(1 - e^{-2\zeta})$, а $K_1(\sigma)$ в точках $\sigma = \pm \sigma_{n1}$ при любых значениях kh ($\sigma = 0$ не является полюсом для $\bar{u}(\sigma, y)$).

Поэтому, чтобы выполнялись условия уходящей волны, действительная ось должна обходить точку $\sigma = -\sigma_{nj}$ сверху, а точку $\sigma = \sigma_{nj}$ – снизу ($j = 1, 2$) [2].

Применив обратное преобразование Фурье к (7), (8), (9), получим решение задачи.

В частном случае, когда в пьезоэлектрическом пространстве имеется включение в виде одного бесконечного электрода, занимающий плоскость $-\infty < x < \infty$, $y = h$, $-\infty < z < \infty$, решение примет вид [5]:

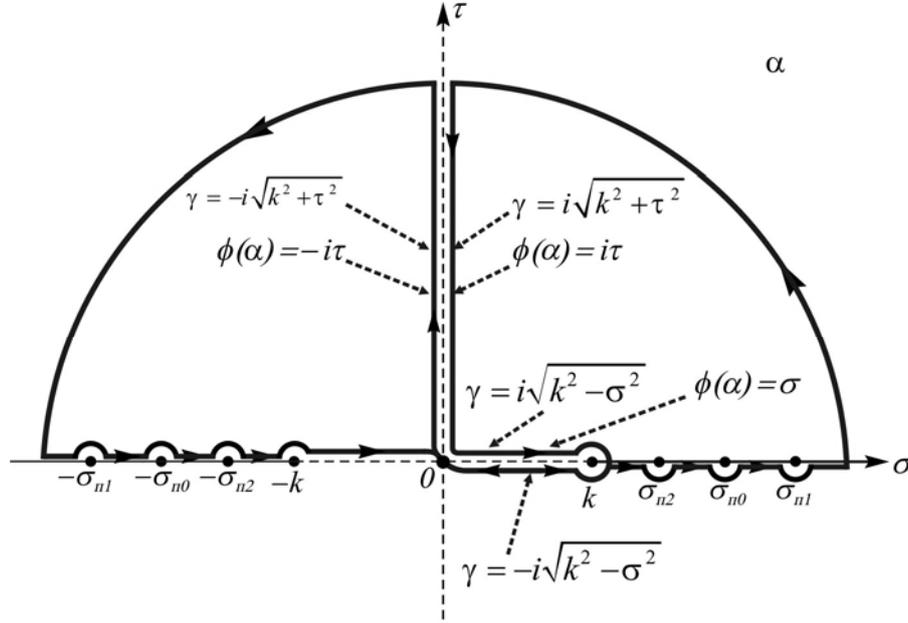
$$w(x, y) = w_\infty(x, y) - \frac{\varkappa \cos \beta e^{-2ikh \sin \beta}}{\varkappa \cos \beta + i(1 + \varkappa) \sin \beta} e^{iky \sin \beta - ikx \cos \beta} \quad \text{при } y > h \quad (15)$$

$$\varphi(x, y) = \varphi_\infty(x, y) - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (1 + A) e^{-k(y-h) \cos \beta - ikx \cos \beta}$$

$$w(x, y) = -\frac{\varkappa \cos \beta}{\varkappa \cos \beta + i(1 + \varkappa) \sin \beta} e^{-ik(y-h) \sin \beta - ikx \cos \beta} \quad \text{при } y < h \quad (16)$$

$$\varphi(x, y) = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (1 + A) e^{-k(y-h) \cos \beta - ikx \cos \beta}$$

$$A = -\frac{\alpha \cos \beta e^{-ikh \sin \beta}}{\alpha \cos \beta + i(1 + \alpha) \sin \beta}$$



Фиг. 2

Подробно остановимся на исследовании $w(x, y)$ в случае $x < 0$ и $y > h$. Имеем

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_\infty(x, y) + w_{\text{отр}}(x, y).$$

$$w_1(x, y) = A^* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma |\sigma| (e^{-2|\sigma|h} - e^{-2\gamma h})}{\bar{K}^+(\sigma)(\sigma + i0)^{1/2}(\sigma - \eta_1 + i0)K_1(\sigma)K_2(\sigma)} e^{-i\sigma x} e^{-\gamma(y-h)} d\sigma \quad (17)$$

$$w_{\text{отр}}(x, y) = 2\alpha \eta_1 \left(\frac{\cos^2(h\eta_2)}{K_1(\eta_1)} - \frac{\sin^2(h\eta_2)}{K_2(\eta_1)} \right) e^{iky \sin \beta - ikx \cos \beta}$$

где

$$A^* = -\frac{1}{4\pi} \frac{\alpha^2 (1 + \alpha) k^2 \sin 2\beta}{\bar{K}^-(\eta_1)(\eta_1)^{1/2}} \left(\frac{\cos(h\eta_2)}{K_1(\eta_1)} + \frac{i \sin(h\eta_2)}{K_2(\eta_1)} \right)$$

Вычисляя интеграл (17) при $x < 0$, с помощью метода контурного интеграла в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ с разрезами, указанными на фиг. 2, получим

$$w_1(x, y) = w_{11}(x, y) + w_{\text{пз}}(x, y) + w_{\text{нов}}(x, y) \quad (18)$$

$$w_{\text{нов}}(x, y) = w_{\text{нов}}^{(1)} e^{i\sigma_{n1}|x|} e^{-i\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k^2}(y-h)} + w_{\text{нов}}^{(2)} e^{i\sigma_{n2}|x|} e^{-i\sqrt{\sigma_{n2}^2 - k^2}(y-h)}$$

$$w_{\text{нов}}^{(1)} = -2\pi \frac{\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k^2} \sqrt{\sigma_{n1}} (e^{-2\sigma_{n1}h} - e^{-2i\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k^2}h})}{\bar{K}^+(\sigma_{n1})(\sigma_{n1} - \eta_1)K_1'(\sigma_{n1})K_2(\sigma_{n1})}$$

$$w_{\text{нов}}^{(2)} = \begin{cases} -\frac{2\pi \sqrt{\sigma_{n2}^2 - k^2} \sqrt{\sigma_{n2}} (e^{-2\sigma_{n2}h} - e^{-2i\sqrt{\sigma_{n2}^2 - k^2}h})}{\bar{K}^+(\sigma_{n2})(\sigma_{n2} - \eta_1)K_1(\sigma_{n2})K_2'(\sigma_{n2})}, & kh > h_a \\ 0, & kh \leq h_a \end{cases}$$

$$w_{n_3}(x, y) = -\int_0^{\infty} \frac{N_{15}(\tau) + M_{15}(\tau)}{\bar{K}^+(i\tau)(i\tau)^{1/2}(i\tau - \eta_1)} e^{-\tau|x|} e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(y-h)} d\tau$$

$$w_{11}(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{M_{12}(\tau)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}(y-h)} + M_{15}(\tau)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(y-h)}}{\bar{K}^+(i\tau)(i\tau)^{1/2}(i\tau - \eta_1)} e^{-\tau|x|} d\tau -$$

$$-\int_0^k \frac{M_{13}(\sigma)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y-h)} + M_{14}(\sigma)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y-h)}}{\bar{K}^+(\sigma)(\sigma+i0)^{1/2}(\sigma - \eta_1 + i0)} e^{i\sigma|x|} d\sigma$$

Итак, получили представления $w_{11}(x, y), w_{n_3}(x, y)$ в виде регулярных интегралов, которые удобны для вычисления при малых значениях x, y .

$$M_{12}(\tau) = \frac{M_0(i\tau, -1)}{M_{12}^{(1)}(\tau)}, \quad M_{15}(\tau) = \frac{M_0(i\tau, 1)}{M_{15}^{(1)}(\tau)}, \quad M_{13}(\sigma) = \frac{iM_0(\sigma, -1)}{M_{13}^{(1)}(\sigma)}$$

$$M_{14}(\sigma) = \frac{iM_0(\sigma, 1)}{M_{14}^{(1)}(\sigma)}, \quad N_{15}(\tau) = -\frac{M_0(-i\tau, 1)}{N_{15}^{(1)}(\tau)}$$

где

$$M_0(\sigma, \eta) = \sigma\sqrt{k^2 - \sigma^2} (e^{-2\sigma h} - e^{2\text{sgn}(\eta)i\sqrt{k^2 - \sigma^2}h})$$

$$M_{12}^{(1)}(\tau) = ((1 + \mathfrak{A})\sqrt{\tau^2 + k^2} (1 + e^{-2i\tau h}) - \mathfrak{A}\tau(1 + e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})) \times$$

$$\times ((1 + \mathfrak{A})\sqrt{\tau^2 + k^2} (1 - e^{-2i\tau h}) - \mathfrak{A}\tau(1 - e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))$$

$$M_{15}^{(1)}(\tau) = ((1 + \mathfrak{A})\sqrt{\tau^2 + k^2} (1 + e^{-2i\tau h}) + \mathfrak{A}\tau(1 + e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})) \times$$

$$\times ((1 + \mathfrak{A})\sqrt{\tau^2 + k^2} (1 - e^{-2i\tau h}) + \mathfrak{A}\tau(1 - e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))$$

$$M_{13}^{(1)}(\sigma) = ((1 + \mathfrak{A})i\sqrt{k^2 - \sigma^2} (1 + e^{-2\sigma h}) - \mathfrak{A}\sigma(1 + e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h})) \times$$

$$\times ((1 + \mathfrak{A})i\sqrt{k^2 - \sigma^2} (1 - e^{-2\sigma h}) - \mathfrak{A}\sigma(1 - e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))$$

$$M_{14}^{(1)}(\sigma) = ((1 + \mathfrak{A})i\sqrt{k^2 - \sigma^2} (1 + e^{-2\sigma h}) + \mathfrak{A}\sigma(1 + e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h})) \times$$

$$\times ((1 + \mathfrak{A})i\sqrt{k^2 - \sigma^2} (1 - e^{-2\sigma h}) + \mathfrak{A}\sigma(1 - e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))$$

$$N_{15}^{(1)}(\tau) = ((1 + \mathfrak{A})\sqrt{\tau^2 + k^2} (1 + e^{2i\tau h}) - \mathfrak{A}\tau(1 + e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})) \times$$

$$\times ((1 + \mathfrak{A})\sqrt{\tau^2 + k^2} (1 - e^{2i\tau h}) - \mathfrak{A}\tau(1 - e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))$$

$$(\sigma_{n_1}^2 - k^2)K_1'(\sigma_{n_1}) = (\sigma_{n_1}^2 - k^2) \frac{dK_1(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_{n_1}} = (1 + e^{-2h\sqrt{\sigma_{n_1}^2 - k^2}})k^2\mathfrak{A} +$$

$$+ 2e^{-2h\sqrt{\sigma_{n_1}^2 - k^2}} h\mathfrak{A}\sigma_{n_1}^2 \sqrt{\sigma_{n_1}^2 - k^2} - 2h(1 + \mathfrak{A})e^{-2h\sigma_{n_1}} (\sigma_{n_1}^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$(\sigma_{n_2}^2 - k^2)K_2'(\sigma_{n_2}) = (\sigma_{n_2}^2 - k^2) \frac{dK_2(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_{n_2}} = (1 - e^{-2h\sqrt{\sigma_{n_2}^2 - k^2}})k^2\mathfrak{A} -$$

$$- 2e^{-2h\sqrt{\sigma_{n_2}^2 - k^2}} h\mathfrak{A}\sigma_{n_2}^2 \sqrt{\sigma_{n_2}^2 - k^2} + 2h(1 + \mathfrak{A})e^{-2h\sigma_{n_2}} (\sigma_{n_2}^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}$$

При получении представления $w_1(x, y)$ имелось в виду, что аналитическое продолжение функции $\phi(\sigma) = |\sigma|$ в комплексной плоскости α – это $\phi(\alpha) = \alpha$ при $\text{Re}(\alpha) > 0$ и $\phi(\alpha) = -\alpha$ при $\text{Re}(\alpha) < 0$. С такими разрезами в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ функции $K_j(\alpha) (j=1, 2)$ не могут иметь чисто комплексных нулей, поскольку, если $\alpha = \alpha_j (j=1, 2)$ будут чисто комплексными нулями $K_j(\alpha) (j=1, 2)$, находящиеся в первой четверти, то, следовательно, $\alpha = \bar{\alpha}_j (j=1, 2)$ также будут нулями $K_j(\alpha) (j=1, 2)$ $\left(\sqrt{\alpha_j^2 - k^2} = \sqrt{\bar{\alpha}_j^2 - k^2} \right)$.

Это означает, что $u(x, y)$ будет иметь составляющие в виде приходящей волны из $x \rightarrow +\infty$, что противоречит поставленной задаче. Нетрудно показать, что $\bar{u}(\alpha, y)$ на мнимой оси не имеет полюсов.

Чтобы выявить влияние полубесконечного электрода на характер волнового поля в пьезоэлектрике с бесконечным электродом, следует определить асимптотические формулы $w(x, y)$ в далёких точках. Для получения асимптотической формулы, когда $y > h$ при $kr \rightarrow \infty$, перейдем к полярным координатам $(y - h) = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$, сделаем замену переменных

$\lambda_1(\sigma) = \sigma |\cos \theta| - \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta$, $\lambda_2(\sigma) = \sigma |\cos \theta| + \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta$ и следуя работам [5-7], получим:

при $\pi - \beta < \theta < \pi$

$$w(x, y) = A^* w_{\text{пов}}(x, y) + w_{\text{отр}}(x, y) + A^* D_1^* b_{11} \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(kr)^{1/2}} + A^* D_1^* b_{12} \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{(kr)^{3/2}} + A^* D_1^* D_2^* \frac{e^{ikr \sin \theta}}{(kr)^2 \cos^2 \theta} + O\left(\frac{\ln^3 kr}{(kr)^3}\right), \quad kr \rightarrow \infty \quad (19)$$

при $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$

$$w(x, y) = A^* w_{\text{пов}}(x, y) + w_{\text{отр}}^{(1)}(x, y) + A^* D_1^* b_{21} e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(kr)^{1/2}} + A^* D_1^* e^{-\frac{\pi i}{4}} b_{22} \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(kr)^{3/2}} + A^* D_1^* e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{e^{ikr \sin \theta}}{(kr)^2 \cos^2 \theta} + O\left(\frac{\ln^3 kr}{(kr)^3}\right), \quad kr \rightarrow \infty \quad (20)$$

$$w_{\text{отр}}^{(1)}(x, y) = -\frac{e^{-2ikh \sin \beta} \alpha \cos \beta}{i(1 + \alpha) \sin \beta + \alpha \cos \beta} e^{-ikx \cos \beta + iky \sin \beta}$$

при $\theta = \pi - \beta$

$$w(x, y) = A^* w_{\text{пов}}(x, y) + w_{\text{отр}}(x, y) + A^{***} e^{ikr} + O\left(\frac{1}{\sqrt{kr}}\right), \quad kr \rightarrow \infty \quad (21)$$

$$A^{***} = -\frac{1}{2} \frac{(e^{-2k \cos \beta h} - e^{2k \sin \beta h}) \alpha (1 + \alpha) \cos \beta}{(i(1 + \alpha) \sin \beta + \alpha \cos \beta)} \left(\frac{\cos(h\eta_2)}{K_1(\eta_1)} + \frac{i \sin(h\eta_2)}{K_2(\eta_1)} \right)$$

$$D_1^* = (4h(1+\mathfrak{a})\left(1 + \frac{(1-e^{-2ikh})}{2ikh} \frac{\mathfrak{a}}{1+\mathfrak{a}}\right))^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

$$D_2^* = \frac{k(i(1-e^{2ikh})(-2ikh(1+\mathfrak{a}) + (1+e^{2ikh})\mathfrak{a}) - 4kh(1+\mathfrak{a}))}{4(1+\mathfrak{a})^2((1-e^{2ikh})\mathfrak{a} + 2ikh(1+\mathfrak{a}))^2} \times$$

$$\times ((1-e^{2ikh})\mathfrak{a} + 2ikh(1+\mathfrak{a})) - 4ih^2k^2(1-e^{2ikh})(1+\mathfrak{a})^2$$

Для $|y| < h$ и $kh \neq h_a$ получим, что при $|kx| \rightarrow \infty$

$$w(x, y) = A^* D_1^* w^{(1)} e^{i\sigma_{n1}|x|} + A^* D_1^* w^{(1)} e^{i\sigma_{n2}|x|} + A^* D_1^* A_4^* \frac{e^{ikx}}{(k|x|)^{3/2}} +$$

$$+ A^* D_1^* A_5^* \frac{1}{(kx)^2} + O\left(\frac{\ln^3 |kx|}{|kx|^3}\right)$$

$$A_4^* = \frac{-8k^2 h(y-h)\mathfrak{a} + 4i(1+\mathfrak{a})e^{-ikh}k(y \operatorname{ch} kh + h \operatorname{sh} kh)}{\bar{K}^+(k)\sqrt{2k\mathfrak{a}}(2kh\mathfrak{a} - (1+\mathfrak{a})(1-e^{-2kh}))(1-\cos\beta)}$$

$$A_5^* = \frac{ie^{ikh} \sin ky}{(-1+e^{2ikh})\mathfrak{a} - 2ikh(1+\mathfrak{a})} \left(\frac{2kh^2(1+\mathfrak{a})}{(-1+e^{2ikh})\mathfrak{a} - 2ikh(1+\mathfrak{a})} - \right.$$

$$\left. \frac{(1+e^{2ikh})\mathfrak{a} - 2ikh(1+\mathfrak{a})}{2k(1+\mathfrak{a})} - \frac{(1+\mathfrak{a})khe^{iky} + e^{ikh}\mathfrak{a} \sin k(-h+y)}{k(1+\mathfrak{a}) \sin ky} \right)$$

а для $kh = h_a$ при $|kx| \rightarrow \infty$ будем иметь:

$$w(x, y) = A^* D_1^* w^{(1)} e^{i\sigma_{n1}|x|} + A^* D_1^* w^{(1)} e^{i\sigma_{n2}|x|} + A^* D_1^* A_3^* \frac{e^{i(k|x|-\pi/4)}}{\sqrt{|kx|}} +$$

$$+ A^* D_1^* A_4^* \frac{e^{i(k|x|-\pi/4)}}{(k|x|)^{3/2}} + A^* D_1^* A_5^* \frac{1}{(kx)^2} + O\left(\frac{\ln^3 |kx|}{|kx|^3}\right)$$

$$A_3^* = \frac{-\sqrt{2k}k(y-h)\mathfrak{a} + i\sqrt{2k}e^{-kh}(1+\mathfrak{a}) \operatorname{sh} kh}{\bar{K}^+(k)4h^2k^3\mathfrak{a}^2(1-\cos\beta)}$$

$$w^{(1)} = -\frac{f(\sigma_{n1})}{\bar{K}^+(\sigma_{n1})(\sigma_{n1}-\eta_1)K_1'(\sigma_{n1})K_2(\sigma_{n1})}$$

$$w^{(2)} = \begin{cases} -\frac{f(\sigma_{n2})}{\bar{K}^+(\sigma_{n2})(\sigma_{n2}-\eta_1)K_1(\sigma_{n2})K_2'(\sigma_{n2})}, & kh > h_a \\ 0, & kh \leq h_a \end{cases}$$

$$f(\sigma) = 2(1+\mathfrak{a})\sqrt{\sigma^2-k^2}e^{-(\sigma+\sqrt{\sigma^2-k^2})h} \operatorname{sh}(\sigma h - \sqrt{\sigma^2-k^2}y) -$$

$$-2\mathfrak{a}\sigma e^{-2\sqrt{\sigma^2-k^2}h} \operatorname{sh}(\sqrt{\sigma^2-k^2}(y-h))$$

$b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, A_4$ вычисляются так, как и в работах [5-7], здесь не приводятся значения этих коэффициентов из-за громоздкости формул.

Из формул (23), (24), следует, что наличие полубесконечного электрода приводит к появлению двух волн с волновыми числами σ_{n1}, σ_{n2} при $kh > h_a$, а при $kh \leq h_a$ распространяется волна с волновым числом σ_{n1} , а также к появлению цилиндрической волны и последнего члена в асимптотике (23), (24), имеющий неволновой характер по x при $|kx| \rightarrow \infty$.

Из формул (19), (20) следует, что наличие полубесконечного электрода приводит при $kh > h_a$ к появлению двух поверхностных волн с волновыми числами σ_{n1}, σ_{n2} , а при $kh \leq h_a$ появляется только поверхностная волна с волновым числом σ_{n1} , а также к появлению цилиндрической волны и волны, распространяющейся по направлению луча с углом раствора θ со скоростью $c/\sin \theta$ (или распространяющейся по направлению y со скоростью c).

В заключение приведём асимптотическую формулу электрической индукции около конца полубесконечного электрода. Из (11-13):

$$\text{при } -\pi \leq \theta \leq 0 \text{ и } r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2} \rightarrow 0 \quad D_\theta(r, \theta) = D_0 \frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}} + O(1),$$

$$\text{а при } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ и } r \rightarrow 0 \quad D_{\theta 1}(r, \theta) = D_{10} \frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}} + O(1),$$

$$\text{где } D_0 = c_1 e^{i\pi/4} (\varepsilon - 1) / 4\sqrt{\pi} (1 + \varepsilon) \bar{K}^- (k \cos \beta) (k \cos \beta)^{1/2},$$

$$D_{10} = c_1 e^{i\pi/4} / 4\sqrt{\pi} \bar{K}^- (k \cos \beta) (k \cos \beta)^{1/2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Б.Нобл-Метод Виннера-Хопфа. М.: ИИЛ, 1962. 279с.
3. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 544с.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ. 1979. №3. С.29-34.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Излучение плоской сдвиговой волны упругого волновода в составное упругое пространство. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23-37.
6. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №1. С.40-51.
7. Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с двумя параллельными бесконечными металлическими слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.70-79.
8. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краях параллельных полубесконечных металлических слоев. //Изв. НАН Армении. 2005. Т.58. №3. С.16-28.
9. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. 63. №1. С.50-69.

10. Восканян А.Р., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с кусочно-однородным бесконечным упругим включением. // Изв. НАН Армении. 2007. Т.60. №2. С.3-20.
11. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. // Изв. НАН Армении. 2005. Т.58. №1. С.38-50.
12. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.
13. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом пространстве с двумя параллельными полубесконечными трещинами. //В кн.: «Проблемы взаимодействия деформированных сред». V-ая Межд. конф. Горис, 2005г. С. 163-168.

Сведения об авторах:

Григорян Эдуард Хосровович

Доктор физ.-мат.наук, профессор ЕГУ, факультет механики
Адрес: Ереван, ул.Алека Манукяна 1, ЕГУ, факультет механики
Тел: (+37410) 23-03-89

Синанян Самвел Суменович – аспирант

Института механики НАН Армении

E-mail: ssinanyan@mail.ru;

Тел.: (+37410) 65-21-06

Поступила в редакцию 08.12.2009