ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **63, №2, 2010** **Механика**

УДК 539.3

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТОТЕРМОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК*)

САРКИСЯН С. О.

Ключевые слова: магнитотермоупругость, тонкая оболочка, сдвиговые деформации, прикладная-двумерная общая теория.
Key words: magnetothermoelasticity, thin shell, shift deformations, general applied-two-dimensional theory.

Սարգսյան Ս. Հ.
Բարակ թաղանթների մագնիսաջերմաառաձգականության ընդհանուր տեսությունը

Աշխատանքում ձևակերպվում են ընդունելություններ (վարկածներ), որոնք ունեն ասիմպտոտիկ հիմնավորում, և նրանց հիման վրա կառուցված է էլեկտրա- և ջերմահաղորդիչ ոչ ֆերոմագնիսական բարակ թաղանթների ընդհանուր ճշգրտված կիրառական-երկչափ տեսությունը, որի շրջանակներում լիովին հաշվի են առնված թաղանթում սահքային դեֆորմացիաները:

Sargsyan S. H.
The General Theory of Magnetothermoelasticity of Thin Shells

The present paper provides asymptotically grounded hypotheses, on the basis of which the general specified applied-two-dimensional theory of magnetothermoelasticity of electro- and thermoconducting non-ferromagnetic thin shells is constructed. In case of this theory the shift deformations in the shell are completely taken into account.

В данной работе формулируются предположения (гипотезы), имеющие асимптотическое подтверждение, и на их основе построена общая уточненная прикладная-двумерная теория магнитотермоупругости электро- и теплопроводящих неферромагнитных тонких оболочек, при которой полностью учитываются сдвиговые деформации в оболочке.

Введение. В работах [1-3] на основе метода гипотез трехмерные уравнения магнитоупругости приведены к двумерной и изучены задачи колебания и устойчивости электропроводящих тонких пластин и оболочек, находящихся во внешних магнитных полях. В работах [4,5], включая внешнюю задачу электродинамики, построена асимптотически точная общая двумерная теория магнитоупругости и магнитотермоупругости электропроводящих неферромагнитных тонких оболочек и пластин. Построенные теории магнитоупругости и магнитотермоупругости тонких оболочек и пластин работ [4,5] соответствуют теории упругих оболочек на основе гипотез Кирхгоффа-Лява.

В данной работе рассматриваются трехмерные уравнения магнитотермоупругости в области тонкой оболочки, сформулируются обоснованные гипотезы (имеющие асимптотическую природу) и на этой основе построена общая уточненная прикладная-двумерная теория магнитотермоупругости тонких оболочек, при которой, в отличие от работ [4,5], полностью учитываются сдвиговые деформации на уровне уточненной теории упругих тонких оболочек Тимошенко-Рейсснера.

*) Работа доложена на 8^{th} International Congress on Thermal Stresses. June 1-4, 2009. University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, USA.

Уравнения и начально-граничные условия трехмерной магнитотермоупругости

Рассмотрим оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое электро- и теплопроводящее неферромагнитное изотропное тело и отнесем его к триортогональной неподвижной системе координат [4,6].

Пусть оболочка находится во внешнем магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{B}_0$.

Будем исходить из основных уравнений линеаризованной теории магнитотермоупругости для трехмерной среды, записанных в выбранной системе координат [7-9]:

– уравнения механики упругого деформируемого тела с учетом массовых сил электромагнитного происхождения и температурного воздействия (которые имеют место в области оболочки):

– уравнения движения:

$$\frac{\partial H_2\vec{\sigma}_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial H_1\vec{\sigma}_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial H_1H_2\vec{\sigma}_3}{\partial\alpha_3}+H_1H_2\left(-\rho\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}+\vec{F}\right)=0 \tag{1}$$

$$\vec{F}=\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}_0 \tag{2}$$

$\vec{F}$ – плотность массовых сил электромагнитного происхождения,

$$\vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\times\vec{B}_0\right) \tag{3}$$

$\vec{j}$ – вектор плотности возбужденного электрического тока проводимости в области оболочки;

– соотношения, выражающие связь компонентов деформации с перемещениями и соотношения обобщенного закона Гука с учетом температурного воздействия:

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{H_i}{H_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{U_i}{H_i}\right)+\frac{H_j}{H_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{U_j}{H_j}\right)\right)=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij}-\nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right]+\delta_{ij}\alpha_t\theta \tag{4}$$

– уравнения квазистационарной электродинамики, которые имеют место в области оболочки

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{h}=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, & \operatorname{rot}\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{h}}{\partial t}\\ \operatorname{div}\vec{E}=4\pi\rho_e, & \operatorname{div}\vec{h}=0\end{cases} \tag{5}$$

– уравнения квазистационарной электродинамики в окружающем оболочку воздушном пространстве, которое представляет собой всё трёхмерное пространство за исключением трёхмерной области занимаемой оболочкой (с большой точностью эти уравнения отождествляем с уравнениями квазистационарной электродинамики для вакуума):

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=0, & \operatorname{rot}\vec{E}^{(e)}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t}\\ \operatorname{div}\vec{E}^{(e)}=0, & \operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0\end{cases} \tag{6}$$

– уравнение температурного поля, которое имеет место в области оболочки (для простоты пренебрегаем термоэлектрическими эффектами и не учитываем термоупругое рассеяние энергии) [10-12]:

$$\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3}\right)\right]-\frac{1}{a}\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\frac{W_0}{\lambda} \quad (7)$$

Здесь $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$ – векторы упругих напряжений, соответственно, на площадках, нормали которых проходят вдоль координатных линий $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\vec{U}-$ вектор перемещения точек оболочки; $\theta-$ функция температуры; $\vec{h}, \vec{E}$ и $\vec{h}^{(e)}, \vec{E}^{(e)}$ – соответственно, векторы напряженности возбужденного магнитного и электрического полей в области оболочки и в окружающем пространстве; $E, \nu-$ модуль упругости и коэффициент Пуассона, α_t- коэффициент линейного температурного расширения, $a-$ коэффициент температуропроводимости, $\lambda-$ коэффициент теплопроводности, $\sigma-$ электропроводимость, $\rho-$ плотность материала оболочки, $W_0\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t\right)$ – плотность источников тепла.

К системе уравнений (1)-(7) трехмерной магнитотермоупругости, определяющей поведение движущейся упругой, электро- и теплопроводящей оболочки в заданном магнитном поле, должны быть присоединены механические, электродинамические и температурные граничные и начальные условия:

механические граничные условия на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3=\pm h$ имеют вид

$$\sigma_{k3}\Big|_{\alpha_3=\pm h}=\pm q_k^{\pm} \qquad \left(k=1,2,3\right) \quad (8)$$

на поверхности края оболочки (Σ) могут иметь место граничные условия первого варианта граничных условий трехмерной теории упругости:

$$n_j\sigma_{ij}=q_i \qquad \left(i,j=1,2,3\right) \quad (9)$$

где $\vec{n}-$ вектор нормали к поверхности (Σ); могут быть заданы также условия жесткого защемления точек поверхности Σ или трехмерные граничные условия теории упругости, которые эквивалентны условиям шарнирного опирания;

начальные условия для механической части задачи выражаются так:

$$U_i\Big|_{t=0}=\overset{0}{U}_i, \qquad \frac{\partial U_i}{\partial t}\Big|_{t=0}=\overset{0}{V}_i \qquad \left(i=1,2,3\right) \quad (10)$$

электродинамические граничные условия по всей поверхности $\alpha_3=+h,\ \alpha_3=-h$ и Σ трехмерной области оболочки выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} &n_i\left[h_i\right]_-=0, \qquad \varepsilon_{ijk}n_j\left[h_k\right]_-=0 \\ &\varepsilon_{ijk}\left[E_k\right]_-=0, \qquad n_i\left[E_i\right]_-=4\pi\hat{\rho}_e \qquad \left(i,j,k=1,2,3\right) \end{aligned} \quad (11)$$

где при $\alpha_3=h$ $\vec{n}=\vec{n}^+$; при $\alpha_3=-h$ $\vec{n}=\vec{n}^-$ ($\vec{n}^{\pm}-$ нормальные векторы к лицевым поверхностям оболочки $\alpha_3=\pm h$), а на поверхности края оболочки Σ, вектор $\vec{n}$ является нормальным вектором к этой поверхности; $\varepsilon_{ijk}-$ компоненты тензора Леви-Чивиты; $[\cdot]_-$ означает скачок величины через поверхность области трехмерной оболочки, контактирующей с воздушным пространством; $\hat{\rho}_e$ – поверхностная плотность электрического заряда;

начальные условия возбужденного электромагнитного поля

$$h_i\big|_{t=0}=0 \quad \text{либо} \quad j_i\big|_{t=0}=0; \quad h_i^{(e)}\big|_{t=0}=0 \quad (i=1,2,3) \tag{12}$$

Так как окружающую оболочку область занимает все трехмерное пространство за исключением области трехмерной оболочки, векторы электромагнитного поля (6) должны подчиняться следующим условиям на бесконечности:

$$\left|E^{(e)}\right|=0\left(\frac{1}{r}\right), \quad \left|h^{(e)}\right|=0\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r\to\infty, \quad 0\le t<\infty \tag{13}$$

Для определенности допустим, что для температурного поля оболочки, на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3=\pm h$ заданы граничные условия теплообмена между оболочкой и окружающей средой (с воздушным пространством), а на боковой поверхности Σ задана температура [10-12]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\theta}{\partial n^+}+\mu^+\left(\theta-\theta_e^+\right)=0 \quad \text{при} \quad \alpha_3=h \\ &\frac{\partial\theta}{\partial n^-}+\mu^-\left(\theta-\theta_e^-\right)=0 \quad \text{при} \quad \alpha_3=-h \end{aligned} \tag{14}$$

$$\theta=\theta_e^{\Sigma} \text{ на поверхности края оболочки } \Sigma. \tag{15}$$

Здесь μ^+,μ^- – относительные коэффициенты теплообмена через поверхности $\alpha_3=\pm h$; θ_e^+,θ_e^- и θ_e^{Σ} – значения температуры среды, омывающей, соответственно, лицевые поверхности $\alpha_3=\pm h$ и поверхность края Σ оболочки. В нашем случае можем считать, что $\mu^+=\mu^-=\mu$.

Начальное условие для температурного поля оболочки имеет вид:

$$\theta\big|_{t=0}=\theta_0\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right). \tag{16}$$

Гипотезы магнитотермоупругости тонких оболочек

Основной предпосылкой для построения общей двумерной теории магнитотермоупругости упругих электро- и теплопроводящих тонких оболочек являются гипотезы магнитотермоупругости тонких тел. Эти гипотезы вытекают из асимптотической природы [4,5] интегрирования начально-граничной задачи магнитотермоупругости (1)-(16), когда трехмерная область оболочки тонкая. Наша цель – использовать качественные стороны асимптотического решения начально-граничной задачи магнитотермоупругости (1)-(16), в случае тонкой области оболочки, обобщать гипотезы магнитотермоупругости, сформулированные в работах [4,5], таким образом, чтобы в отличие от работ [4,5], полностью учесть сдвиговые деформации в оболочке и построить общую уточненную прикладную-двумерную теорию магнитотермоупругости тонких оболочек.

Эти гипотезы (предположения) формулируются следующим образом:

а) нормальное к срединной поверхности оболочки перемещение U_3 не зависит от координаты α_3;

б) нормальным напряжением σ_{33} по сравнению с напряжениями σ_{11},σ_{22} в уравнениях обобщенного закона Гука можем пренебрегать;

в) везде ниже будем предполагать, что $h << R$, где R – характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки, т.е. величиной h / R будем пренебрегать относительно единицы;
г) температурное поле по толщине трехмерной оболочки меняется по линейному закону;
д) тангенциальные компоненты вектора напряженности возбужденного электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбужденного магнитного поля по толщине трехмерной оболочки остаются неизменными;
е) нормальной компонентой j_3 электрического тока проводимости в трехмерной тонкой области оболочки можем пренебрегать;
ж) сначала для определения тангенциальных перемещений U_1, U_2, напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}$ и электродинамических величин в области оболочки, примем, что касательные напряжения σ_{13}, σ_{23} не зависят от координаты α_3. После определения указанных величин напряжения σ_{13}, σ_{23} окончательно определим, прибавляя к принятым значениям слагаемые, получаемые, соответственно, из первого и второго скалярных уравнений движения из векторного уравнения (1) интегрированием по независимой переменной α_3, потребовав, чтобы усредненные по толщине оболочки величины были равны нулю;
з) для определения электромагнитного поля в окружающем оболочку пространстве, трехмерную область, занимаемую тонкой оболочкой, можем представлять как математический разрез по срединной поверхности оболочки, по которой будут течь поверхностные токи электропроводимости, представляющие собой усредненные токи по толщине оболочки.

Отметим, что предположение д) совместно с гипотезами Кирхгоффа-Лява (гипотезы магнитоупругости) впервые были сформулированы в работе [1]; предположение г) принято и использовано в работах [10-13]; предположение з) предложено в работах [14,15], канонические граничные условия для электродинамических величин на этой основе получены для идеально проводящих конечных оболочек в работе [15], а для конечно-проводящих оболочек – в работе [4] (см. далее формулы (63)).

Общая уточненная прикладная-двумерная теория магнитотермоупругости тонких оболочек

На основании предположения а), нормальное к срединной поверхности оболочки перемещение U_3 не зависит от координаты α_3, т.е.

$$U_3 = w(\alpha_1, \alpha_2, t) \tag{17}$$

где $w(\alpha_1, \alpha_2, t)$ – нормальное перемещение точек срединной поверхности оболочки.

Принимая во внимание предположение ж), сначала для напряжений σ_{13}, σ_{23} примем

$$\sigma_{13} = \overset{0}{\sigma}_{13}(\alpha_1, \alpha_2, t), \qquad \sigma_{23} = \overset{0}{\sigma}_{23}(\alpha_1, \alpha_2, t) \tag{18}$$

Рассмотрим из системы (4) уравнения относительно деформаций e_{13} и e_{23}. Учитывая формулы (17), (18) и предположения в), ж), находим

$$U_1 = u_1(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \psi_1(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad U_2 = u_2(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \psi_2(\alpha_1, \alpha_2, t) \tag{19}$$

где

$$\psi_1 = \frac{2(1+\nu)}{E}\overset{0}{\sigma}_{13} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}, \quad \psi_2 = \frac{2(1+\nu)}{E}\overset{0}{\sigma}_{23} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2} \tag{20}$$

Отметим, что u_1, u_2, w – компоненты вектора перемещения точек срединной поверхности оболочки:

$$U\Big|_{\alpha_3=0} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + w\vec{n} \tag{21}$$

Здесь, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – орты координатных линий α_1, α_2 при $\alpha_3 = 0$, $\vec{n}$ –нормальный вектор к срединной поверхности оболочки $\alpha_3 = 0$; ψ_1, ψ_2 – углы поворота первоначально прямолинейного нормального к срединной поверхности оболочки элемента вокруг ортов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ координатных линий α_1, α_2 при $\alpha_3 = 0$.

Таким образом, формулы (17),(19) представляют собой закон изменения перемещений по толщине оболочки, который соответствует кинематической гипотезе теории оболочек Тимошенко-Рейсснера [13,14]. Из формул (17),(19) следует, что прямолинейный перпендикулярный к срединной поверхности элемент после деформации не остаётся перпендикулярным к ней, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины.

Углы поворота ψ_1 и ψ_2 представим в виде

$$\gamma_{13} = \psi_1 - \theta_1, \quad \gamma_{23} = \psi_2 - \theta_2 \tag{22}$$

где
$$\theta_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2} \tag{23}$$

здесь γ_{13}, γ_{23} – углы поворота указанного прямолинейного элемента относительно нормали к срединной поверхности (углы поперечных сдвигов).

Для углов поперечного сдвига γ_{13} и γ_{23} из выражений (20) получим

$$\gamma_{13} = \frac{2(1+\nu)}{E}\overset{0}{\sigma}_{13}, \quad \gamma_{23} = \frac{2(1+\nu)}{E}\overset{0}{\sigma}_{23} \tag{24}$$

Подставляя значения перемещений (17),(19) в формулы (4), с учетом предположения в), для тангенциальных деформаций e_{11}, e_{22}, e_{12} находим

$$e_{11} = \varepsilon_{11} + \alpha_3\chi_{11}, \quad e_{22} = \varepsilon_{22} + \alpha_3\chi_{22}, \quad e_{12} = \omega + \alpha_3\tau \tag{25}$$

где

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_2 + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_1 + \frac{w}{R_2}$$

$$\omega = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_2 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1$$

$$\chi_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\psi_2, \quad \chi_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\psi_1$$

$$\tau = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\psi_2 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\psi_1 \tag{26}$$

Здесь $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \omega$–компоненты тензора тангенциальной деформации, а величины $\chi_{11}, \chi_{22}, \tau$ – компоненты тензора изгибной деформации и скручивания срединной поверхности оболочки.

Принимая предположения г), для функции температуры θ можем написать

$$\theta = \nu_1(\alpha_1, \alpha_2, t) + \frac{\alpha_3}{h}\nu_2(\alpha_1, \alpha_2, t) \tag{27}$$

где $\nu_1 = \frac{1}{2}\left(\theta^+ + \theta^-\right)$ – средняя температура нормального элемента оболочки, $\nu_2 = \frac{1}{2}\left(\theta^+ - \theta^-\right)$ – нормальный перепад температуры; $\theta^+(\alpha_1, \alpha_2, t)$ и $\theta^-(\alpha_1, \alpha_2, t)$ – температуры, соответственно, на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = h$ и $\alpha_3 = -h$.

Величины $\nu_1(\alpha_1, \alpha_2, t)$ и $\nu_2(\alpha_1, \alpha_2, t)$ представляют собой усредненные (интегральные) характеристики температурного поля в оболочке:

$$\nu_1 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\theta d\alpha_3, \quad \nu_2 = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h}\theta\alpha_3 d\alpha_3 \tag{28}$$

Уравнения для определения ν_1 и ν_2 получим, усредняя по толщине трехмерной оболочки уравнение трехмерного температурного поля (7), которое можем записать в виде

$$\Delta\theta + \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_3^2} + 2\kappa\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3} = \frac{1}{a}\frac{\partial\theta}{\partial t} \tag{29}$$

Здесь $\kappa = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ – средняя кривизна срединной поверхности оболочки; $\Delta(\cdot)$ – двумерный оператор Лапласа:

$$\Delta(\cdot) = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial(\cdot)}{\partial\alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial(\cdot)}{\partial\alpha_2}\right)\right] \tag{30}$$

Если будем придерживаться предположения в), с учетом закона о распределении температуры по толщине оболочки (27), из уравнения трехмерного температурного поля (29) и граничных условий (14) приходим к следующей системе двумерных уравнений температурного поля относительно усредненных по толщине оболочки температурных функций $\nu_1(\alpha_1, \alpha_2, t)$ и $\nu_2(\alpha_1, \alpha_2, t)$ (в области срединной поверхности оболочки):

$$\begin{aligned} &h^2\Delta\nu_1 - \mu_1\nu_1 - \mu_2^*\nu_2 - \frac{h^2}{a}\frac{\partial\nu_1}{\partial t} = -(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) - \frac{1}{\lambda}W_1(\alpha_1, \alpha_2, t) \\ &h^2\Delta\nu_2 - 3(1+\mu_1)\nu_2 - 3\mu_2^*\nu_1 - \frac{h^2}{a}\frac{\partial\nu_2}{\partial t} = -3(\mu_1 t_2 + \mu_2 t_1) - \frac{1}{\lambda}W_2(\alpha_1, \alpha_2, t) \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$\mu_2^* = \mu_2 - \kappa h, \quad \mu_1 = h\left(\mu^+ + \mu^-\right)/2, \quad \mu_2 = h\left(\mu^+ - \mu^-\right)/2$$

$$t_1=\left(\theta_e^+ +\theta_e^-\right)/2,\quad t_2=\left(\theta_e^+ -\theta_e^-\right)/2,\quad W_1=\int_{-h}^{h}W_0 d\alpha_3,\quad W_2=\frac{3}{h}\int_{-h}^{h}W_0\alpha_3 d\alpha_3$$

В нашем случае (считая $\mu^+=\mu^-=\mu$) получим, что $\mu_2=0,\ \mu_1=h\mu,\ \mu_2^*=-\kappa h$.

На граничном контуре Г срединной поверхности оболочки Ω следует подставить (исходя из формулы (15)) следующие усредненные граничные условия:

$$\nu_1\big|_\Gamma=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\theta_\Sigma d\alpha_3,\quad \nu_2\big|_\Gamma=\frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h}\theta_\Sigma\alpha_3 d\alpha_3 \tag{32}$$

К этим граничным условиям необходимо присоединить также начальные условия (16) при $t=0$, которое после усреднения принимает вид:

$$\nu_1=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\theta_0 d\alpha_3,\quad \nu_2=\frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h}\theta_0\alpha_3 d\alpha_3 \quad \text{при}\ \ t=0 \tag{33}$$

Отметим, что система двумерных уравнений (31) температурного поля для усредненных характеристик (28) температурной функции, граничные условия (32) и начальные условия (33) получены в работах [10-12].

Теперь подставим значения тангенциальных деформаций e_{11},e_{22},e_{12} из (25),(26) в соответствующие формулы обобщенного закона Гука (4), с учетом предположения б) для напряжений $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12}$ получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}\right)+\alpha_3\left(\chi_{11}+\nu\chi_{22}\right)-\left(1+\nu\right)\alpha_t\theta\right]\\
\sigma_{22}&=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}\right)+\alpha_3\left(\chi_{22}+\nu\chi_{11}\right)-\left(1+\nu\right)\alpha_t\theta\right]\\
\sigma_{12}&=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\left[\omega+\alpha_3\tau\right]\qquad\left(-h\le\alpha_3\le h\right)
\end{aligned}\tag{34}$$

Введем вместо напряжений интегральные характеристики по толщине трехмерной оболочки – усилия и моменты, отнесённые к единице длины координатных линий и приложенные к срединной поверхности оболочки. Принимая предположение в), для усреднённых силовых и моментных характеристик будем иметь [17]:

$$\begin{aligned}
T_{11}&=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}d\alpha_3,\quad T_{22}=\int_{-h}^{h}\sigma_{22}d\alpha_3,\quad S=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}d\alpha_3\\
M_{11}&=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}\alpha_3 d\alpha_3,\quad M_{22}=\int_{-h}^{h}\sigma_{22}\alpha_3 d\alpha_3,\quad H=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}\alpha_3 d\alpha_3
\end{aligned}\tag{35}$$

$$Q_{13}=\int_{-h}^{h}\sigma_{13}d\alpha_3,\qquad Q_{23}=\int_{-h}^{h}\sigma_{23}d\alpha_3 \tag{36}$$

Здесь, T_{11},T_{22},S – тангенциальные усилия; M_{11},M_{22},H – изгибающие и крутящий моменты; Q_{13},Q_{23} – перерезывающие усилия.

Используя для напряжений $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12}$ формулы (34) и формулу (27) для функций температуры, для усилий T_{11},T_{22},S и моментов M_{11},M_{22},H получим:

$$T_{11} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}\right) - \frac{2Eh}{1-\nu}\alpha_t \nu_1, \quad T_{22} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}\right) - \frac{2Eh}{1-\nu}\alpha_t \nu_1$$

$$S = \frac{2Eh}{2(1+\nu)}\omega, \quad M_{11} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\chi_{11} + \nu\chi_{22}\right) - \frac{2Eh^2}{3(1-\nu)}\alpha_t \nu_2 \tag{37}$$

$$M_{22} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\chi_{22} + \nu\chi_{11}\right) - \frac{2Eh^2}{3(1-\nu)}\alpha_t \nu_2, \quad H = \frac{2Eh^3}{2(1+\nu)}\tau$$

Используя выражения (37) для усилий и моментов, для напряжений (34) получим следующие формулы:

$$\sigma_{11} = \frac{T_{11}}{2h} + \alpha_3 \frac{3M_{11}}{2h^3}, \quad \sigma_{22} = \frac{T_{22}}{2h} + \alpha_3 \frac{3M_{22}}{2h^3}, \quad \sigma_{12} = \frac{S}{2h} + \alpha_3 \frac{3H}{2h^3} \tag{38}$$

Обратимся теперь к уравнениям электродинамики (5) в области трехмерной оболочки.

На основе предположений д) и е) можем написать:

$$E_1 = E_{10}\left(\alpha_1, \alpha_2, t\right), \quad E_2 = E_{20}\left(\alpha_1, \alpha_2, t\right), \quad h_3 = h_{30}\left(\alpha_1, \alpha_2, t\right), \quad j_3 = 0 \tag{39}$$

Далее с учетом формул (3),(17),(19),(39), для тангенциальных компонент вектора плотности возбужденного электрического тока j_1, j_2 и нормального компонента E_3 возбужденного в трехмерной оболочке электрического поля, получим

$$j_1 = j_{10} + \alpha_3 \sigma \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_2}{\partial t} B_{03}, \quad j_2 = j_{20} - \alpha_3 \sigma \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} B_{03} \tag{40}$$

$$E_3 = \frac{1}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t} B_{01} - \frac{1}{c}\frac{\partial u_1}{\partial t} B_{02} + \alpha_3 \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \psi_2}{\partial t} B_{01} - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} B_{02}\right) \tag{41}$$

где

$$j_{10} = \sigma\left[E_{10} + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t} B_{03} - \frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t} B_{02}\right)\right], \; j_{20} = \sigma\left[E_{20} + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t} B_{01} - \frac{1}{c}\frac{\partial u_1}{\partial t} B_{03}\right)\right] \tag{42}$$

Если рассматривать векторное уравнение $\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$ из системы уравнений электродинамики (5) в области трехмерной оболочки, то из первых двух скалярных уравнений, с учетом (39),(40) и предположения в), для тангенциальных компонент вектора возбужденного в оболочке магнитного поля после пренебрежения величинами $\frac{1}{A_1}\frac{\partial h_{30}}{\partial \alpha_1}$ и $\frac{1}{A_2}\frac{\partial h_{30}}{\partial \alpha_2}$, как асимптотически малыми членами, получим:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{10}\left(\alpha_1, \alpha_2, t\right) + \alpha_3 \frac{4\pi}{c} j_{20} - \frac{1}{2}\alpha_3^2 \sigma \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} B_{03} \\ h_2 &= h_{20}\left(\alpha_1, \alpha_2, t\right) - \alpha_3 \frac{4\pi}{c} j_{10} - \frac{1}{2}\alpha_3^2 \sigma \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_2}{\partial t} B_{03} \end{aligned} \tag{43}$$

где h_{10} и h_{20}–значения h_1 и h_2 на срединной поверхности оболочки $\left(\alpha_3 = 0\right)$; для простоты здесь принято, что компоненты B_{0i} заданного вектора $\vec{B}_0$ не зависят от поперечной координаты α_3 (в некоторых частных случаях это означает, что начальное магнитное поле однородно, т.е. B_{0i} –постоянные).

Уравнение $4\pi\rho_e = \mathrm{div}\vec{E}$ из системы уравнений электродинамики (5) в области оболочки, с учетом (39),(41) и предположения в), служит для определения объемной плотности электрического заряда ρ_e в области оболочки. Третье скалярное уравнение из векторного уравнения $\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}$, с учетом формул (39) и предположения в) (входящие в это скалярное уравнение величины не зависят от координаты α_3), как убедимся ниже, будет идентичным с соответствующим уравнением $\mathrm{rot}\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t}$ во внешней задаче электродинамики на разрезе по срединной поверхности оболочки $(\alpha_3 = 0)$.

Определим напряжение σ_{33}. Для этого рассмотрим третье скалярное уравнение из векторного уравнения движения (1), руководствуясь предположениями в) и ж). Интегрируя это уравнение относительно α_3, окончательно будем иметь:

$$\sigma_{33} = \overset{0}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t) - \alpha_3\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{\sigma}_{13}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{\sigma}_{23}}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{\sigma}_{13} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{\sigma}_{23} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2h}\left(\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2}\right) - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{c}j_{10}B_{02} - \frac{1}{c}j_{20}B_{01}\right] + \tag{44}$$
$$+\frac{\alpha_3^2}{2}\left[\frac{3}{2h^3}\left(\frac{M_{11}}{R_1} + \frac{M_{22}}{R_2}\right) - \frac{\sigma}{c}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}B_{03} - \frac{\sigma}{c}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}B_{03}\right]$$

где $\overset{0}{\sigma}_{33}$ – значение σ_{33} при $\alpha_3 = 0$.

Обратимся теперь к полному определению напряжений σ_{13} и σ_{23}. Для этого принимаем во внимание предположение ж). Рассмотрим первые два скалярных уравнения движения из векторного уравнения (1). С учетом предположения в) и е), формул (17),(19),(40), из этих уравнений интегрированием по α_3 будем иметь:

$$\bar{\sigma}_{13} = \overset{0}{\sigma}{}'_{13}(\alpha_1,\alpha_2,t) - \frac{\alpha_3}{2h}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial S}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}2S + \right.$$
$$\left. + \frac{2h\overset{0}{\sigma}_{13}(\alpha_1,\alpha_2,t)}{R_1} - 2h\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{1}{c}2hj_{20}B_{03}\right] - \frac{3}{2h^3}\frac{\alpha_3^2}{2}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{11}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial H}{\partial\alpha_2} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}2H - \rho\frac{2h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} - \frac{2h^3}{3}\sigma\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}B_{03}\right]$$

$$\bar{\sigma}_{23} = \overset{0}{\sigma}{}'_{23}(\alpha_1,\alpha_2,t) - \frac{\alpha_3}{2h}\left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22}}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial S}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(T_{22} - T_{11}) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}2S + \right.$$

$$+\frac{2h\overset{0}{\sigma}_{23}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)}{R_2}-2h\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-\frac{1}{c}2hj_{10}B_{03}\Bigg]-\frac{3}{2h^3}\frac{\alpha_3^2}{2}\left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial H}{\partial\alpha_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(M_{22}-M_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}2H-\rho\frac{2h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}-\frac{2h^3}{3}\sigma\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}B_{03}\right] \tag{45}$$

По идее предположения ж), от величин (45) потребуем следующие условия:

$$\int_{-h}^{h}\bar{\sigma}_{13}d\alpha_3=0,\quad \int_{-h}^{h}\bar{\sigma}_{23}d\alpha_3=0 \tag{46}$$

При подчинении (45) условиям (46) определим величины $\overset{0}{\sigma'}_{13}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)$ и $\overset{0}{\sigma'}_{23}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)$. После определения этих величин подставляем их снова в формулы (45), в результате, окончательно будут известны величины $\bar{\sigma}_{13}$ и $\bar{\sigma}_{23}$. Касательные напряжения σ_{13} и σ_{23} по предположению ж) полностью определим как соответствующие суммы (18) и (45). Таким образом, получим

$$\sigma_{13}=\overset{0}{\sigma}_{13}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)-\frac{\alpha_3}{2h}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(T_{11}-T_{22}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}2S+\right.$$

$$\left.+\frac{2h\overset{0}{\sigma}_{13}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)}{R_1}-2h\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\frac{1}{c}2hj_{20}B_{03}\right]+\frac{1}{4h}\left(1-\frac{3\alpha_3^2}{h^2}\right)\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial H}{\partial\alpha_2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(M_{11}-M_{22}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}2H-\rho\frac{2h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}-\frac{2h^3}{3}\sigma\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}B_{03}\right]$$

$$\sigma_{23}=\overset{0}{\sigma}_{23}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)-\frac{\alpha_3}{2h}\left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(T_{22}-T_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}2S+\right.$$

$$\left.+\frac{2h\overset{0}{\sigma}_{32}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)}{R_2}-2h\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-\frac{1}{c}2hj_{10}B_{03}\right]+\frac{1}{4h}\left(1-\frac{3\alpha_3^2}{h^2}\right)\left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial H}{\partial\alpha_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(M_{22}-M_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}2H-\rho\frac{2h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}-\frac{2h^3}{3}\sigma\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}B_{03}\right] \tag{47}$$

На основе выражений (47) и (36), для поперечных сил Q_{13} и Q_{23} получим:

$$Q_{13}=2h\overset{0}{\sigma}_{13}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right),\quad Q_{23}=2h\overset{0}{\sigma}_{23}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right) \tag{48}$$

Теперь при помощи формул (24) получим следующие физические связи между поперечными силами и углами деформаций сдвигов:

$$Q_{13}=2h\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{13},\quad Q_{23}=2h\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{23} \tag{49}$$

Далее на основании (47) и (44) можем удовлетворять силовым граничным условиям (8) на лицевых поверхностях $\alpha_3=\pm h$. В результате, приходим к следующим двумерным уравнениям движения оболочки с учетом сил электромагнитного происхождения:

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(T_{11}-T_{22}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}2S+\frac{Q_{13}}{R_1}-2\rho h\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}+$$
$$+\frac{1}{c}\tilde{j}_{20}B_{03}=-\left(q_1^+ + q_1^-\right)$$
$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(T_{22}-T_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}2S+\frac{Q_{23}}{R_2}-2\rho h\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}-$$
$$-\frac{1}{c}\tilde{j}_{10}B_{03}=-\left(q_2^+ + q_2^-\right)$$
$$Q_{13}-\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial H}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(M_{11}-M_{22}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}2H\right]+$$
$$+\rho\frac{2h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}+\frac{2h^3}{3}\sigma\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}B_{03}=h\left(q_1^+ - q_1^-\right) \qquad (50)$$
$$Q_{23}-\left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial H}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(M_{22}-M_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}2H\right]+$$
$$+\rho\frac{2h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}+\frac{2h^3}{3}\sigma\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}B_{03}=h\left(q_2^+ - q_2^-\right)$$
$$-\left(\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}\right)+\frac{1}{A_1}\frac{\partial Q_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial Q_{23}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}Q_{13}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}Q_{23}-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+$$
$$+\frac{1}{c}\tilde{j}_{10}B_{02}-\frac{1}{c}\tilde{j}_{20}B_{01}=-\left(q_3^+ + q_3^-\right).$$

Здесь

$$\tilde{j}_{10}=2hj_{10}=\int_{-h}^{h}j_1d\alpha_3,\quad \tilde{j}_{20}=2hj_{20}=\int_{-h}^{h}j_2d\alpha_3$$

т.е. $\tilde{j}_{10}$ и $\tilde{j}_{20}$ – тангенциальные компоненты усредненного (поверхностного) тока электропроводимости по срединной поверхности оболочки. Используя формулы (40), (42), для усредненных токов получим следующие формулы:

$$\tilde{j}_{10}=2\sigma h\left[E_{10}+\left(\frac{1}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t}B_{03}-\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}B_{02}\right)\right]$$
$$\tilde{j}_{20}=2\sigma h\left[E_{20}+\left(\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}B_{01}-\frac{1}{c}\frac{\partial u_1}{\partial t}B_{03}\right)\right] \qquad (51)$$

Таким образом, механическая часть двумерной теории магнитотермоупругости тонкой оболочки построена, она представляет собой систему уравнений движения (50), соотношения упругости (37), (49), геометрические соотношения (26), (22), (23).

Присоединим к системе уравнений механической части задачи магнитотермоупругости тонких оболочек соответствующие двумерные граничные и начальные условия:

если край Г срединной поверхности оболочки определяется уравнением $\alpha_1 = \alpha_{10}$, то граничными условиями будут:

для загруженного края

$$T_{11} = T_{11}^*, \quad S = S^*, \quad M_{11} = M_{11}^*, \quad H = H^*, \quad Q_{13} = Q_{13}^* \tag{52}$$

для жестко защемленного края

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad w = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0 \tag{53}$$

для шарнирно-закрепленного края

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad \psi_2 = 0 \tag{54}$$

начальные условия (при $t = 0$):

$$\begin{gathered} u_1 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{0}{u_1}\, d\alpha_3, \quad u_2 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{0}{u_2}\, d\alpha_3, \quad w = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{0}{u_3}\, d\alpha_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{0}{V_1}\, d\alpha_3, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{0}{V_2}\, d\alpha_3, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{0}{V_3}\, d\alpha_3 \end{gathered} \tag{55}$$

Система уравнений (50),(37),(49),(26),(22),(23), граничные условия (52) (либо (53), либо (54)) и начальные условия (55) представляют двумерную модель механической части задачи магнитотермоупругости тонких оболочек по уточненной теории упругих оболочек Тимошенко-Рейсснера.

Двумерную модель теплопроводности тонкой оболочки представляет система уравнений (31), граничные условия (32) и начальные условия (33). Следует отметить, что задача теплопроводности тонкой оболочки (как и ее трехмерный вариант) в данном случае, это отдельная начально-граничная задача.

Сейчас обратим внимание на тот факт, что в уравнения (50) механической части задачи магнитотермоупругости тонких оболочек входят усредненные поверхностные токи электропроводимости $\left(\tilde{j}_{10}, \tilde{j}_{20}\right)$, которые нам неизвестны. Чтобы замкнуть уравнения (50),(37),(49),(26),(22),(23), следует рассмотреть уравнения и гранично-начальные условия электродинамической части задачи.

Рассмотрим уравнения квазистационарного электромагнитного поля (6), которые имеют место во всем трехмерном пространстве R^3 за исключением трехмерной тонкой области оболочки. Будем руководствоваться предположением з), при помощи которого существенно упрощается область, где имеют место уравнения (6). Предположение з) дает возможность при определении квазистационарного электромагнитного поля в окружающем оболочку воздушном пространстве, область трехмерной тонкой оболочки рассматривать в R^3 как математический разрез по срединной поверхности оболочки. Это означает, что разности $h_1^+ - h_1^-$ и $h_2^+ - h_2^-$ для величин h_1 и h_2 можем рассматривать как скачки через этот разрез. На этой основе систему уравнений (6) можем представить так:

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\vec{h}^{(e)} = \frac{4\pi}{c}\delta(\alpha_3)\chi(\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega)\vec{I}, \quad \operatorname{rot}\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{E}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)} = 0 \end{gathered} \tag{56}$$

Здесь $\delta(\alpha_3)$ – дельта-функция Дирака; $\chi(\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega)$ – функция Хевисайда; $\vec{I} = \left\{\tilde{j}_{10}, \tilde{j}_{20}, 0\right\}$. Отметим, что вектор $\vec{I}$ представляет собой вектор плотности поверхностного (усредненного) тока электропроводимости по срединной поверхности оболочки Ω .

На основании формул (43) для h_1 и h_2 легко заметить, что

$$h_1^+ - h_1^- = \tilde{j}_{10}, \quad h_2^+ - h_2^- = -\tilde{j}_{20} \tag{57}$$

Если взять оператор ротации от второго векторного уравнения из системы (56), с учетом третьего уравнения из этой системы, приходим к следующему уравнению:

$$\Delta_1 \vec{E}^{(e)} = \frac{4\pi}{c}\delta(\alpha_3)\chi(\alpha_1,\alpha_2 \in \Omega)\frac{\partial \vec{I}}{\partial t} \tag{58}$$

Здесь $\Delta_1(\cdot)$ –трехмерный оператор Лапласа.

Имея в виду соответствующие граничные условия из (11) и формулы (39), можем утверждать, что нормальная компонента вектора возбужденного магнитного поля $h_3^{(e)}$ и тангенциальные компоненты вектора возбужденного электрического поля $E_1^{(e)}, E_2^{(e)}$ будут непрерывными функциями на разрезе $\alpha_3 = 0$. Следовательно, можем утверждать, что на разрезе $\alpha_3 = 0$ имеем

$$h_3^{(e)}\Big|_{\alpha_3=0} = h_{30}(\alpha_1,\alpha_2,t), \; E_1^{(e)}\Big|_{\alpha_3=0} = E_{10}(\alpha_1,\alpha_2,t), \; E_2^{(e)}\Big|_{\alpha_3=0} = E_{20}(\alpha_1,\alpha_2,t) \tag{59}$$

Фундаментальное решение (функция Грина) [18] для уравнения $\Delta_1 \vec{E}^{(e)} = 0$ в бесконечном пространстве R^3, если в одной точке на срединной поверхности оболочки $Q \in \Omega$ (при $\alpha_3 = 0$) приложена особенность типа дельта-функции, а в бесконечности даны условия (13), имеет вид $-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{PQ}}$, где R_{PQ} – трехмерное расстояние от точки $Q \in \Omega$ до точки наблюдения $P \in R^3$ в трехмерном пространстве.

Имея это в виду, решение уравнения (58) во всем трехмерном пространстве R^3 можем представить в виде

$$\vec{E}^{(e)}(P,t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{1}{R_{PQ}}\vec{I}(Q,t)\,d\Omega, \qquad Q \in \Omega, \quad P \in R^3 \tag{60}$$

Из векторного равенства (60) рассмотрим значения тангенциальных составляющих $E_1^{(e)}$ и $E_2^{(e)}$, кроме того, точку наблюдения P берем в области Ω срединной поверхности оболочки, учитывая формулы (59), будем иметь:

$$\begin{aligned} E_{10}(P,t) &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{\tilde{j}_{10}(Q,t)\vec{e}_1(P)\vec{e}_1(Q) + \tilde{j}_{20}(Q,t)\vec{e}_2(Q)\vec{e}_1(P)}{R_{PQ}}d\Omega \\ E_{20}(P,t) &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{\tilde{j}_{10}(Q,t)\vec{e}_1(Q)\vec{e}_2(P) + \tilde{j}_{20}(Q,t)\vec{e}_2(Q)\vec{e}_2(P)}{R_{PQ}}d\Omega, \; P \in \Omega \end{aligned} \tag{61}$$

Отметим, что третье скалярное уравнение из векторного уравнения (60) служит для определения $E_3^{(e)+}$ и $E_3^{(e)-}$. Далее, с учетом формулы (41) и последней из граничных условий из (11) можем определить поверхностные электрические заряды $\hat{\rho}_e$ на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$.

Используя формулы (51) для усреднённых токов, уравнения системы (61) можем представлять через поверхностные усредненные токи $\tilde{j}_{10}$ и $\tilde{j}_{20}$, а именно:

$$\tilde{j}_{10}(P,t) = -\frac{2\sigma h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{\tilde{j}_{10}(Q,t)\vec{e}_1(P)\vec{e}_1(Q) + \tilde{j}_{20}(Q,t)\vec{e}_2(Q)\vec{e}_1(P)}{R_{PQ}}d\Omega +$$
$$+\frac{2\sigma h}{c}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}B_{03} - \frac{\partial w}{\partial t}B_{02}\right)$$
$$\tilde{j}_{20}(P,t) = -\frac{2\sigma h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{\tilde{j}_{10}(Q,t)\vec{e}_1(Q)\vec{e}_2(P) + \tilde{j}_{20}(Q,t)\vec{e}_2(Q)\vec{e}_2(P)}{R_{PQ}}d\Omega + \tag{62}$$
$$+\frac{2\sigma h}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t}B_{01} - \frac{\partial u_1}{\partial t}B_{03}\right) \qquad P \in \Omega$$

К двумерной системе интегродифференциальных уравнений (62) электродинамической части задачи, которая имеет место в области срединной поверхности оболочки Ω, следует присоединить соответствующие граничные и начальные условия.

Граничные условия на контуре Γ ($\alpha_1 = \alpha_{10}$) срединной поверхности оболочки имеют вид [4]:

$$\tilde{j}_{10} = 0, \quad \tilde{j}_{20} = 0 \tag{63}$$

Начальные условия при $t = 0$ будут выражаться так:

$$\tilde{j}_{10}\big|_{t=0} = 0, \quad \tilde{j}_{20}\big|_{t=0} = 0 \tag{64}$$

Система двумерных уравнений, граничных и начальных условий (50),(37),(49),(26),(22), (23),(52)-(55),(31)-(33),(62)-(64), определяют двумерную математическую модель магнитотермоупругости электро- и теплопроводящих тонких оболочек в уточненной постановке (с учетом поперечных сдвигов).

Если в указанной системе уравнений значения главных кривизн срединной поверхности оболочки подставим ноль, получим основные уравнения, граничные и начальные условия уточненной теории магнитотермоупругости тонких пластин (отдельно при изгибе и обобщенного плоского напряженного состояния).

Если в построенной модели не будем учитывать температурное воздействие, получим уточненную теорию магнитоупругости тонких оболочек и пластин на базе уточненной теории оболочек и пластин Тимошенко-Рейсснера.

Если в построенной модели будем считать, что начальное магнитное поле нулевое $\left(\vec{B}_0 = 0\right)$, получим уточнённую теорию термоупругости тонких оболочек и пластин на базе теории оболочек и пластин Тимошенко-Рейсснера [16,19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматлит, 1996. 288с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 143с.
4. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд. НАН Армении, 1992. 235с.
5. Sargsyan S. H. Magnetothermoelasticity of Electric conductive Anisotropic Thin Shells//Proc. of the 5th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics. TS 2003. 8-11 June 2003. Blacksburg, VA. USA. WA-4-5-1-WA-4-5-4.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.
7. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф. Магнитоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1981. 293 с.
8. Maugin G. A. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. 1988.
9. Eringen C. A. Microcontinuum Field Theoris. I Foundations and Solids. Springer. New York, ets. 1998. 325p.
10. Болотин В.В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С.361-363.
11. Подстригач Л.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка, 1978. 344 с.
12. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд. АН СССР. 1962. 364с.
13. Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Об устойчивости цилиндрической оболочки в электромагнитном поле //Докл. АН Арм.ССР. 1967. Т. 61. №2. С.49-55.
14. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Об уравнениях магнитоупругих тонких пластин// ПММ. 1975. Т.39. Вып.5. С.955-959.
15. Багдасарян Г.Е. Уравнения магнитоупругих колебаний тонких идеально проводящих пластин// ПМ. 1983. Т. XIX. №12. С.87-91.
16. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Изд. Наукова думка, 1973. 248с.
17. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: Судостроение, 1987. 316с.
18. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. М.: Высшая школа, 1980. 335с.
19. Швец Р.Н., Лунь Е.И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига //ПМ. 1971. Т.7. № 10. С.121-125.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович –
доктор физ-мат.наук, профессор, Чл-корр. НАН Армении
Гюмрийский государственный педагогический институт им. М.Налбандяна

Поступила в редакцию 04.09.2009