

УДК 529.3.01

ОБ АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО УПРУГОГО
СЛОЯ, СОДЕРЖАЩЕГО НА ЛИНИИ СПАЯ СИСТЕМУ ЩЕЛЕЙ И
АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИХ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ
МАНУКЯН Э.А., МКРТЧЯН М.С.

Ключевые слова: напряжения, слой, трещина, включения, система сингулярных интегральных уравнений, коэффициенты интенсивностей напряжений, раскрытие трещины.

Keywords: stress, layer, crack, inclusion, system of singular integral equations, coefficients of stress intensity, crack opening displacement

Մանուկյան Է.Ա., Մկրտչյան Մ.Ս.

Միացման գծի վրա ճաքեր և բարակապատ բացարձակ կոշտ ներդրակների համակարգ
պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական շերտի հակահարթ խնորհի մասին

Աշխատանքում հետազոտվում է առաձգական կտոր առ կտոր համասեռ շերտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի վերաբերյալ խնորհի հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ, ընդ որում շերտի ազատ եզրերի վրա ազդում են կամայական բաշխված ուժեր, իսկ տարասեռ նյութերի միացման գծի վրա հորիզոնական ուղղությամբ դասավորված են ճաքեր և բացարձակ կոշտ ներդրակներ:

Manukyan E.A., Mkrtchyan M.S.

On Anti-Plane Problem of Piecewise Homogeneous Elastic Layer Containing the System of Crack on
Junction Line and Absolutely Rigid Thin Inclusions

In present work we consider the problem on the components' determination of strain stress state of piecewise homogeneous layer under anti-plane deformation. There are tangentially distributed loads on borders and there are cracks and absolutely rigid inclusions on horizontal line of junction of heterogeneous materials.

В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряженно-деформированного состояния кусочно-однородного слоя при антиплоской деформации, грани которого нагружены распределенными тангенциальными силами, а на горизонтальной линии спая разнородных материалов расположены трещины и абсолютно жесткие включения.

Задачи о трещинах и включениях тесно связаны с задачами определения напряженно-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, содержащих концентраторы напряжений. Ввиду их теоретической и практической важности в вопросах горной механики, механики композитов и прочности разнообразных инженерных конструкций они стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на работы [1-4].

1. Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxuz$ кусочно-однородный упругий слой состоит из верхнего слоя $\Omega_+ = \{-\infty < x, z < \infty, 0 \leq y \leq h_+\}$ с модулем сдвига G_+ и нижнего слоя $\Omega_- = \{-\infty < x, z < \infty, -h_- \leq y \leq 0\}$ с модулем сдвига G_- , и в плоскости $y = 0$ содержит систему сквозных взаимно не пересекающихся трещин и тонких абсолютно жестких включений, причем их следы в плоскости Oxu составляют систему интервалов L_1 и L_2 соответственно.

$$L_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1} [a_k, b_k]; \quad a_k < b_k \quad (k = 1, 2, \dots, N_1); \quad b_k < a_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_1 - 1})$$

$$L_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2} [c_k, d_k]; \quad c_k < d_k \quad (k = 1, 2, \dots, N_2); \quad d_k < c_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_2 - 1})$$

$$L = L_1 \cup L_2$$

Пусть, далее, грани верхнего и нижнего слоёв нагружены распределенными тангенциальными силами с интенсивностями $\tau_{yz} \Big|_{y=h_{\pm}} = f_{\pm}(x) \quad (-\infty < x < \infty)$, кроме того, берега трещин также нагружены силами с заданными интенсивностями $\tau_{yz} \Big|_{y=\pm 0} = -\tau_{\pm}^{(1)}(x) \quad (x \in L_1)$, а на систему включений L_2 действуют силы с равнодействующими P_k , направленными вдоль оси Oz , вызывающие продольный сдвиг упругого слоя в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy .

Требуется определить плотность дислокаций смещений на берегах трещин, раскрытие трещин, скачки напряжений на берегах включений, разрушающие напряжения и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородную упругую полосу вдоль оси Ox разрежем на две части, а затем, для действующих на их гранях $y = \pm 0$ напряжений введем следующие обозначения ($L' = R/L; R = (-\infty, \infty)$):

$$-\tau_{yz} \Big|_{y=+0} = T_+(x) = \begin{cases} \tau_+^{(1)}(x) & (x \in L_1); \\ \tau_+^{(2)}(x) & (x \in L_2); \\ \tau(x) & (x \in L'); \end{cases} \quad -\tau_{yz} \Big|_{y=-0} = T_-(x) = \begin{cases} \tau_-^{(1)}(x) & (x \in L_1) \\ \tau_-^{(2)}(x) & (x \in L_2) \\ \tau(x) & (x \in L') \end{cases} \quad (1)$$

На системе включений L_2 смещения постоянны:

$$u_z^+(x, y) \Big|_{y=+0} = u_z^-(x, y) \Big|_{y=-0} = g(x) = \tilde{\delta}_k = \text{const} \quad (2)$$

$$x \in (c_k, d_k) \quad (k = \overline{1, N_2})$$

Граничные условия при $y = \pm h_{\pm}$ имеют вид:

$$\tau_{yz}^+ \Big|_{y=h_+} = G_+ \frac{\partial u_z^+(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h_+} = f_+(x); \quad \tau_{yz}^- \Big|_{y=h_-} = G_- \frac{\partial u_z^-(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h_-} = f_-(x), \quad (x \in R) \quad (3)$$

где $u_z^{\pm}(x, y)$ – смещения точек в направлении оси Oz , соответственно, верхней и нижней полос, которые в этих областях удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta u_z^{\pm}(x, y) = \frac{\partial^2 u_z^{\pm}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^{\pm}(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

Далее введем в рассмотрение следующие функции:

$$\Omega(x) = T_+(x) + T_-(x); \quad h(x) = \frac{du_z^+(x, +0)}{dx} + \frac{du_z^-(x, -0)}{dx}$$

$$\chi(x) = T_+(x) - T_-(x) = \begin{cases} \Psi(x) & (x \in L_2) \\ \tau_+^{(1)}(x) - \tau_-^{(1)}(x) & (x \in L_1) \\ 0 & (x \in L') \end{cases} \quad (5)$$

а также плотность дислокаций смещений

$$w(x) = \frac{du_z^+(x, +0)}{dx} - \frac{du_z^-(x, -0)}{dx} = \begin{cases} \varphi(x) & (x \in L_1) \\ 0 & (x \in R/L_1) \end{cases} \quad (6)$$

С помощью прямого и обратного преобразования Фурье по переменной x , из уравнения (4) и граничных условий (1)-(3) в соответствии с обозначениями (5)-(6) придем к системе ключевых уравнений задачи относительно плотностей дислокаций на берегах трещин $w(x)$ и скачков касательных контактных напряжений $\chi(x)$ на берегах включений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{w(s)ds}{s-x} - \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(x-s)w(s)ds - \frac{G_+ - G_-}{2G_+G_-} \chi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{L_1} M(x-s)\chi(s)ds - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{L_2} M(x-s)\chi(s)ds = -\frac{G_+ + G_-}{2G_+G_-} \Omega(x) - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_+} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-s)f_+(s)ds - \\ & \quad - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_-} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-s)f_-(s)ds; \quad (x \in R) \\ & -\frac{G_+ - G_-}{2} w(x) - \frac{G_+G_-}{\pi} \int_{L_1} M(x-s)w(s)ds + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\chi(s)ds}{s-x} + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{\chi(s)ds}{s-x} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} Q(x-s)\chi(s)ds + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} Q(x-s)\chi(s)ds = \frac{G_+ + G_-}{2} h(x) + \\ & + \frac{G_+ + G_-}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x-s)f_+(s)ds - \frac{G_+ + G_-}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(x-s)f_-(s)ds; \quad (x \in R) \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^{\infty} \frac{G_+ \operatorname{th}(\lambda h_+) [\operatorname{th}(\lambda h_-) - 1] + G_- \operatorname{th}(\lambda h_-) [\operatorname{th}(\lambda h_+) - 1]}{G_+ \operatorname{th}(\lambda h_+) + G_- \operatorname{th}(\lambda h_-)} \sin(\lambda x) d\lambda \\ M(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\lambda h_+) - \operatorname{th}(\lambda h_-)}{G_+ \operatorname{th}(\lambda h_+) + G_- \operatorname{th}(\lambda h_-)} \cos(\lambda x) d\lambda \\ Q(x) &= \int_0^{\infty} \frac{G_+ [\operatorname{th}(\lambda h_+) - 1] + G_- [\operatorname{th}(\lambda h_-) - 1]}{G_+ \operatorname{th}(\lambda h_+) + G_- \operatorname{th}(\lambda h_-)} \sin(\lambda x) d\lambda \\ F_1(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\lambda h_-)}{\operatorname{ch}(\lambda h_+) [G_+ \operatorname{th}(\lambda h_+) + G_- \operatorname{th}(\lambda h_-)]} \cos(\lambda x) d\lambda \\ F_2(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\lambda h_+)}{\operatorname{ch}(\lambda h_-) [G_+ \operatorname{th}(\lambda h_+) + G_- \operatorname{th}(\lambda h_-)]} \cos(\lambda x) d\lambda \\ G_1(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda x) d\lambda}{\operatorname{ch}(\lambda h_+) [G_+ \operatorname{th}(\lambda h_+) + G_- \operatorname{th}(\lambda h_-)]} \end{aligned}$$

$$G_2(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda x) d\lambda}{\operatorname{ch}(\lambda h_-) [G_+ \operatorname{th}(\lambda h_+) + G_- \operatorname{th}(\lambda h_-)]}$$

Рассматривая теперь первое уравнение системы (7) на L_1 , а второе уравнение на L_2 , придём к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ) задачи:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi(s) ds}{s-x} - \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K(x-s) \varphi(s) ds - \frac{1}{\pi} \int_{L_2} M(x-s) \psi(s) ds = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{L_1} M(x-s) [\tau_+^{(1)}(s) - \tau_-^{(1)}(s)] ds - \left[\frac{\tau_+^{(1)}(x)}{G_+} + \frac{\tau_-^{(1)}(x)}{G_-} \right] - \\ & - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_+} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-s) f_+(s) ds - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_-} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-s) f_-(s) ds; \quad (x \in L_1) \\ & - \frac{G_+ G_-}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} M(x-s) \varphi(s) ds + \frac{1}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_2} \frac{\psi(s) ds}{s-x} + \\ & + \frac{1}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_2} Q(x-s) \psi(s) ds = - \frac{1}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} \frac{[\tau_+^{(1)}(s) - \tau_-^{(1)}(s)] ds}{s-x} + \\ & + \frac{1}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} Q(x-s) [\tau_+^{(1)}(s) - \tau_-^{(1)}(s)] ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x-s) f_+(s) ds - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(x-s) f_-(s) ds; \quad (x \in L_2) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Система (8) должна рассматриваться при условиях:

$$\int_{a_k}^{b_k} \varphi(x) dx = 0 \quad (k = \overline{1, N_1}) \quad (9)$$

$$\int_{c_k}^{d_k} \psi(x) dx = P_k \quad (k = \overline{1, N_2}) \quad (10)$$

Первое из них эквивалентно условиям непрерывности смещений в конечных точках разреза, а второе представляет собой условия равновесия k -того включения.

Рассматривая же первое уравнение системы (7) вне разрезов и включений, будем иметь:

$$\begin{aligned} \tau(x) = & - \frac{G_+ G_-}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} \frac{\varphi(s) ds}{s-x} + \frac{G_+ G_-}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} K(x-s) \varphi(s) ds + \\ & + \frac{G_+ G_-}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_2} M(x-s) \psi(s) ds + \frac{G_+ G_-}{\pi(G_+ + G_-)} \int_{L_1} M(x-s) [\tau_+^{(1)}(s) - \tau_-^{(1)}(s)] ds - \\ & - \frac{G_-}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-s) f_+(s) ds - \frac{G_+}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-s) f_-(s) ds; \quad (x \in L') \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, поставленная задача о напряжённом состоянии упругой полосы с трещинами и абсолютно жёсткими включениями сводится к решению системы (8) при условиях (9)-(10). После решения (8)-(10) разрушающее напряжение определяется формулой (11).

2. Для решения определяющей СИУ (8)–(10) сначала введем безразмерные координаты и величины:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{|a_1|}, \quad \eta = \frac{s}{|a_1|}; \quad h_1 = \frac{h_+}{|a_1|}; \quad h_2 = \frac{h_-}{|a_1|}; \quad \alpha_k = \frac{a_k}{|a_1|}, \quad \beta_k = \frac{b_k}{|a_1|}; \quad (k = \overline{1, N_1}) \\ \gamma_k &= \frac{c_k}{|a_1|}, \quad \delta_k = \frac{c_k}{|a_1|}; \quad (k = \overline{1, N_2}), \quad \mu = G_+/G_-; \quad L_{01} = \bigcup_{k=1}^{N_1} (\alpha_k; \beta_k); \quad L_{02} = \bigcup_{k=1}^{N_2} (\gamma_k; \delta_k) \quad (12) \\ \varphi_0(\xi) &= \varphi(|a_1|\xi); \quad \psi_0(\xi) = \frac{\psi(|a_1|\xi)}{G_+ + G_-}; \quad \tau_{\pm}^{(0)}(\xi) = \frac{\tau_{\pm}^{(1)}(|a_1|\xi)}{G_+ + G_-}; \quad f_{\pm}^{(0)}(\xi) = \frac{f_{\pm}(|a_1|\xi)}{G_+ + G_-} \end{aligned}$$

после чего (8) преобразуется в следующее СИУ:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} \frac{\varphi_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - \frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} K_0(\xi - \eta) \varphi_0(\eta) d\eta - \\ &\quad - \frac{\mu + 1}{\pi} \int_{L_{02}} M_0(\xi - \eta) \psi_0(\eta) d\eta = l_1(\xi); \quad (\xi \in L_{01}) \\ &-\frac{\mu}{\pi(\mu + 1)} \int_{L_{01}} M_0(\xi - \eta) \varphi_0(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{L_{02}} \frac{\psi_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{L_{02}} Q_0(\xi - \eta) \psi_0(\eta) d\eta = l_2(\xi), \quad (\xi \in L_{02}) \end{aligned} \right. \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} K_0(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) [\operatorname{th}(\lambda h_2) - 1] + \operatorname{th}(\lambda h_2) [\operatorname{th}(\lambda h_1) - 1]}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \sin(\lambda x) d\lambda \\ M_0(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\lambda h_1) - \operatorname{th}(\lambda h_2)}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \cos(\lambda x) d\lambda \\ Q_0(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\mu [\operatorname{th}(\lambda h_1) - 1] + [\operatorname{th}(\lambda h_2) - 1]}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \sin(\lambda x) d\lambda \\ F_{10}(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\lambda h_2)}{\operatorname{ch}(\lambda h_1) [\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)]} \cos(\lambda x) d\lambda \\ F_{20}(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\lambda h_1)}{\operatorname{ch}(\lambda h_2) [\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)]} \cos(\lambda x) d\lambda \\ G_{10}(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda x) d\lambda}{\operatorname{ch}(\lambda h_1) [\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)]} \\ G_{20}(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda x) d\lambda}{\operatorname{ch}(\lambda h_2) [\mu \operatorname{th}(\lambda h_+) + \operatorname{th}(\lambda h_-)]} \end{aligned}$$

$$l_1(\xi) = \frac{\mu+1}{\pi} \int_{L_{01}} M_0(\xi-\eta)[\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)]d\eta - \frac{\mu+1}{\mu} \tau_+^{(0)}(\xi) - (\mu+1)\tau_-^{(0)}(\xi) - \\ - \frac{(\mu+1)^2}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} F_{10}(\xi-\eta)f_+^{(0)}(\eta)d\eta - \frac{(\mu+1)^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{20}(\xi-\eta)f_-^{(0)}(\eta)d\eta; \quad (\xi \in L_{01})$$

$$l_2(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} \frac{[\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)]d\eta}{\eta - \xi} + \frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} Q_0(\xi-\eta)[\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)]d\eta + \\ + \frac{\mu+1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{10}(\xi-\eta)f_+^{(0)}(\eta)d\eta - \frac{\mu+1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{20}(\xi-\eta)f_-^{(0)}(\eta)d\eta; \quad (\xi \in L_{02})$$

Теперь каждый интервал $(\alpha_k, \beta_k), (\gamma_k, \delta_k)$ системы L_{01} и L_{02} преобразуем в интервал $(-1, 1)$, полагая

$$\xi = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2}, \quad \eta = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} u + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \quad (k = \overline{1, N_1}), \quad (-1 < t, u < 1)$$

$$\xi = \frac{\delta_k - \gamma_k}{2} t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2}, \quad \eta = \frac{\delta_k - \gamma_k}{2} u + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} \quad (k = \overline{1, N_2}), \quad (-1 < t, u < 1)$$

в результате СИУ (13) преобразуется в систему интегральных уравнений относительно функций:

$$\Phi_k(t) = \Phi_0 \left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{2} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \right) \quad (-1 < t < 1; \quad k = \overline{1, N_1})$$

$$\Psi_k(t) = \Psi_0 \left(\frac{\delta_k - \gamma_k}{2} t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} \right) \quad (-1 < t < 1; \quad k = \overline{1, N_2})$$

на интервале $(-1, 1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_k(u)du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_1} \int_{-1}^1 K_{km}^{(1)}(t, u) \Phi_m(u)du - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_1} \int_{-1}^1 K_{km}(t, u) \Phi_m(u)du - \\ - \frac{\mu+1}{\pi} \sum_{m=1}^{N_2} \int_{-1}^1 M_{km}^{(2)}(t, u) \Psi_m(u)du = l_{1k}(t); \quad (-1 < t < 1; \quad k = \overline{1, N_1}) \\ - \frac{\mu}{\pi(\mu+1)} \sum_{m=1}^{N_1} \int_{-1}^1 M_{km}^{(1)}(t, u) \Phi_m(u)du + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi_k(u)du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_2} \int_{-1}^1 K_{km}^{(2)}(t, u) \Psi_m(u)du + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{N_2} \int_{-1}^1 Q_{km}(t, u) \Psi_m(u)du = l_{2k}(t), \quad (-1 < t < 1; \quad k = \overline{1, N_2}) \end{array} \right. \quad (14)$$

где

$$K_{km}^{(1)}(t, u) = \left(u - \frac{\beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m} t + \frac{\beta_m + \alpha_m}{\beta_m - \alpha_m} - \frac{\beta_k + \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m} \right)^{-1}; \quad (m, k = \overline{1, N_1})$$

$$K_{km}^{(2)}(t, u) = \left(u - \frac{\delta_k - \gamma_k}{\delta_m - \gamma_m} t + \frac{\delta_m + \gamma_m}{\delta_m - \gamma_m} - \frac{\delta_k + \gamma_k}{\delta_m - \gamma_m} \right)^{-1}; \quad (m, k = \overline{1, N_2})$$

$$K_{km}(t, u) = \lambda_m^{(1)} K_0 \left(\lambda_k^{(1)} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} - \lambda_m^{(1)} u - \frac{\beta_m + \alpha_m}{2} \right); \quad (m, k = \overline{1, N_1})$$

$$M_{km}^{(1)}(t, u) = \lambda_m^{(1)} M_0 \left(\lambda_k^{(2)} t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} - \lambda_m^{(1)} u - \frac{\beta_m + \alpha_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_1}; k = \overline{1, N_2})$$

$$M_{km}^{(2)}(t, u) = \lambda_m^{(2)} M_0 \left(\lambda_k^{(1)} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} - \lambda_m^{(2)} u - \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_2}; k = \overline{1, N_1})$$

$$Q_{km}(t, u) = \lambda_m^{(2)} Q_0 \left(\lambda_k^{(2)} t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} - \lambda_m^{(2)} u - \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m, k = \overline{1, N_2})$$

$$l_{1k}(t) = l_1 \left(\lambda_k^{(1)} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \right); \quad (k = \overline{1, N_1}; t \in (-1, 1))$$

$$l_{2m}(t) = l_2 \left(\lambda_m^{(2)} t + \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_2}; t \in (-1, 1))$$

$$\lambda_m^{(1)} = (\beta_m - \alpha_m)/2, \quad (m = \overline{1, N_1}); \quad \lambda_k^{(2)} = (\delta_k - \gamma_k)/2, \quad (k = \overline{1, N_2})$$

а условие (9), (10) – в следующие условия:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_k(u) du &= 0; \quad (k = \overline{1, N_1}) \\ \int_{-1}^1 \psi_k(u) du &= \hat{P}_k; \quad \left(\hat{P}_k = \frac{2P_k}{(\delta_k - \gamma_k)|a_1|(G_+ + G_-)} \right); \quad (k = \overline{1, N_2}) \end{aligned} \quad (15)$$

К системе СИУ (14) при условиях (15) применим изложенный в [5, 6, 7] метод решения СИУ. С этой целью сначала положим

$$\varphi_k(t) = \frac{x_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < t < 1, k = \overline{1, N_1}); \quad \psi_k(t) = \frac{y_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < t < 1, k = \overline{1, N_2})$$

где $x_k(t)$ и $y_k(t)$ – функции, принадлежащие гильдеровскому классу функции на отрезке $[-1, 1]$, а затем выберем произвольное натуральное число M . Далее, следуя известной процедуре [5], систему (14) при условиях (15) сведем к следующей системе линейных алгебраических уравнений (ЛАУ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{x_k(u_n)}{u_n - t_r} + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq k}}^M K_{km}^{(1)}(t_r, u_n) x_m(u_n) - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^M K_{km}(t_r, u_n) x_m(u_n) - \\ - \frac{\mu + 1}{M} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^M M_{km}^{(2)}(t_r, u_n) y_m(u_n) = l_{1k}(t_r); \quad (k = \overline{1, N_1}; \quad r = \overline{1, M-1}) \\ \sum_{n=1}^M x_k(u_n) = 0; \quad (k = \overline{1, N_1}) \\ - \frac{\mu}{M(\mu + 1)} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^M M_{km}^{(1)}(t_r, u_n) x_m(u_n) + \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{y_k(u_n)}{u_n - t_r} + \\ + \frac{1}{M} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_2} \sum_{n=1}^M K_{km}^{(2)}(t_r, u_n) y_m(u_n) + \\ + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^M Q_{km}(t_r, u_n) y_m(u_n) = l_{2k}(t_r); \quad (k = \overline{1, N_2}; \quad r = \overline{1, M-1}) \\ \frac{\pi}{M} \sum_{n=1}^M y_k(u_n) = \hat{P}_k; \quad (k = \overline{1, N_2}) \end{array} \right.$$

откуда определяются неизвестные $\{x_k(u_n)\} (k = \overline{1, N_1}; n = \overline{1, M})$ и $\{y_k(u_n)\} (k = \overline{1, N_2}; n = \overline{1, M})$.

Здесь

$$u_n = \cos\left(\frac{2n-1}{2M}\pi\right), \quad (n = \overline{1, M}); \quad t_r = \cos\left(\frac{\pi r}{M}\right), \quad (r = \overline{1, M-1}) \quad (16)$$

Чебышевские узлы – т.е. корни, соответственно, уравнений $T_M(u) = 0$, $U_{M-1}(t) = 0$, где $T_M(u)$ и $U_{M-1}(t)$ – многочлены Чебышева первого и второго родов, соответственно.

Перейдем к определению коэффициентов интенсивностей разрушающих касательных напряжений (КИН) в антиплоской задаче теории упругости в концевых точках a_k, b_k трещин $(a_k; b_k) (k = \overline{1, N_1})$. Если в известных формулах для КИН однородного тела в случае антиплоской деформации [8] модуль сдвига заменить приведенным модулем сдвига, то для КИН кусочно-однородного тела получим следующие формулы [9]:

$$K_{III}(a_k) = \frac{G_+}{1 + \mu} \lim_{x \rightarrow a_k + 0} \sqrt{2\pi(x - a_k)} \varphi(x) \quad (17)$$

$$K_{III}(b_k) = -\frac{G_+}{1 + \mu} \lim_{x \rightarrow b_k - 0} \sqrt{2\pi(b_k - x)} \varphi(x). \quad (\mu = G_+/G_-)$$

После преобразования формулы (17), в соответствии с (12) и после перехода к переменной t , будем иметь:

$$K_{III}^0(a_k) = \frac{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}}{1 + \mu} x_k(-1); \quad K_{III}^0(b_k) = -\frac{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}}{1 + \mu} x_k(1); \quad (k = \overline{1, N_1}) \quad (18)$$

где введены безразмерные КИН:

$$K_{III}^0(a_k) = \frac{K_{III}(a_k)}{\sqrt{\pi|a_1|G_+}}; \quad K_{III}^0(b_k) = \frac{K_{III}(b_k)}{\sqrt{\pi|a_1|G_+}}; \quad (k=1, N_1) \quad (19)$$

Входящие в (18) значения $x_k(\pm 1)$ функции $x_k(t)$ определяются при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа по чебышевским узлам (16) и выражаются формулами [5]:

$$x_k(1) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (-1)^{n+1} x_k(u_n) \operatorname{ctg} \left(\frac{2n-1}{4M} \pi \right) \quad (20)$$

$$x_k(-1) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (-1)^{M+n} x_k(u_n) \operatorname{tg} \left(\frac{2n-1}{4M} \pi \right); \quad (k=1, N_1)$$

Для безразмерных раскрытий трещин $w_k(t)$ с учетом (12) можем записать [5]:

$$w_k(t) = \int_{-1}^t \frac{x_k(\eta) d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{\pi}{M} \sum_{u_n \leq t} x_k(u_n); \quad (-1 \leq t \leq 1) \quad (21)$$

$$w_k(t) = \frac{2}{b_k - a_k} \hat{w}_k \left(\frac{b_k - a_k}{2} t + \frac{b_k + a_k}{2} \right); \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

где $\hat{w}_k(x)$ – раскрытие k -той трещины.

Далее рассмотрим частный случай, когда на линии соединения разнородных полос содержатся симметрично расположенные трещины и абсолютно жесткое тонкое включение, $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 = (-b, -a)$, $L_2 = (a, b)$, $(0 \leq a < b)$. Предположим, что на свободных гранях полос нагрузки отсутствуют $f_+(x) = f_-(x) = 0$, а на берегах щелей действуют равные между собой напряжения произвольных интенсивностей $\tau_+^{(1)}(x) = \tau_-^{(1)}(x) = \tau(x)$ ($x \in L_1$). При этом частном случае система (14) запишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\varphi}(u) du}{u-t} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{K}(t-u) \tilde{\varphi}(u) du - \\ - \frac{\mu+1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{M}_1(t-u) \tilde{\psi}(u) du = - \frac{(\mu+1)^2}{\mu} \tau_0(t); \quad (t \in (-1, 1)) \\ - \frac{\mu}{\pi(\mu+1)} \int_{-1}^1 \tilde{M}_2(t-u) \tilde{\varphi}(u) du + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\psi}(u) du}{u-t} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{Q}(t-u) \tilde{\psi}(u) du = 0. \quad (t \in (-1, 1)) \end{array} \right. \quad (22)$$

где

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi \left(\frac{b-a}{2} t - \frac{b+a}{2} \right); \quad (-1 < t < 1)$$

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{1}{G_+ + G_-} \psi \left(\frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2} \right); \quad (-1 < t < 1)$$

$$\tau_0(t) = \frac{1}{G_+ + G_-} \tau \left(\frac{b-a}{2} t - \frac{b+a}{2} \right); \quad (-1 < t < 1)$$

$$\tilde{K}(t-u) = \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) [\operatorname{th}(\lambda h_2) - 1] + \operatorname{th}(\lambda h_2) [\operatorname{th}(\lambda h_1) - 1]}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \sin \lambda(t-u) d\lambda;$$

$$\tilde{M}_1(t-u) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\lambda h_1) - \operatorname{th}(\lambda h_2)}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \cos \lambda \left((t-u) - \frac{2(1+\rho)}{1-\rho} \right) d\lambda;$$

$$\tilde{M}_2(t-u) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\lambda h_1) - \operatorname{th}(\lambda h_2)}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \cos \lambda \left((t-u) + \frac{2(1+\rho)}{1-\rho} \right) d\lambda;$$

$$\tilde{Q}(t-u) = \int_0^\infty \frac{\mu [\operatorname{th}(\lambda h_1) - 1] + [\operatorname{th}(\lambda h_2) - 1]}{\mu \operatorname{th}(\lambda h_1) + \operatorname{th}(\lambda h_2)} \sin \lambda(t-u) d\lambda; \quad (-1 < t, u < 1)$$

$$\text{а } \mu = \frac{G_+}{G_-}; \quad h = \frac{h_+}{b}; \quad H = \frac{h_-}{b}; \quad h_1 = \frac{2h}{1-\rho}; \quad h_2 = \frac{2H}{1-\rho}; \quad \rho = \frac{a}{b}$$

Далее, по известной численно-аналитической методике, как и в общем случае, из системы (22) и условий на щели $(-b, -a)$ и включения (a, b) , из (9) и (10) будем иметь следующую систему ЛАУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{K}(t_r - u_m) \right] x(u_m) - \frac{\mu+1}{M} \times \\ \quad \times \sum_{m=1}^M \tilde{M}_1(t_r - u_m) y(u_m) = -\frac{(\mu+1)^2}{\mu} \tau_0(t_r); \quad (r = \overline{1, M-1}) \\ \sum_{m=1}^M x(u_m) = 0; \\ -\frac{\mu}{M(\mu+1)} \sum_{m=1}^M \tilde{M}_2(t_r - u_m) x(u_m) + \frac{1}{M} \times \\ \quad \times \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{Q}(t_r - u_m) \right] y(u_m) = 0; \quad (r = \overline{1, M-1}) \\ \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M y(u_m) = \tilde{P}, \end{array} \right. \quad (23)$$

где $\tilde{P} = \frac{2P_1}{\Delta(G_+ + G_-)}$; $\Delta = b - a$, а u_m и t_r – соответствующие чебышевские узлы

из (16). В этом случае соответствующие формулы (18) – (19) для безразмерных КИН в точках $-b$ и $-a$ заменяются формулами:

$$K_{III}^{(0)}(-b) = \frac{1}{\mu+1} x(-1); \quad K_{III}^{(0)}(-a) = -\frac{1}{\mu+1} x(1) \quad (24)$$

$$K_{III}^0(-b) = \frac{2K_{III}(-b)}{\sqrt{2\pi\Delta G_+}}; \quad K_{III}^0(-a) = \frac{K_{III}(-a)}{\sqrt{2\pi\Delta G_+}}$$

Далее, для простоты примем $\tau_0(t) = 0.01$ и $\tilde{P} = 0.01$. Тогда после решения системы (23) при разных значениях параметров μ, h, H, ρ находим

соответствующие значения КИН в концевых точках трещины по формулам (24) и соответствующее раскрытие трещины по формуле (21).

Вычисленные по формулам (24) значения КИН $K_{III}^0(-b)$ и $K_{III}^0(-a)$ в зависимости от изменения параметра ρ (при изменении этого параметра полагается, что длина симметрично расположенных трещин и включения постоянны) и при фиксированных значениях других параметров μ, h, H приведены в табл. 1, которые характерны для этих КИН и при других значениях параметров. Здесь дополнительно отметим, что под $K_{III}^0(-a)$ при $a = 0 (\rho = 0)$ надо понимать как предельное значение КИН трещины при $-a \rightarrow -0$.

Значения КИН $K_{III}^0(-b), K_{III}^0(-a)$ ($\mu = 2, h = 1, H = 100$)

Таблица 1

ρ	0	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
$K_{III}^0(-b)$	0.0158	0.01574	0.01568	0.01557	0.01547	0.01538
$K_{III}^0(-a)$	0.01588	0.01582	0.01575	0.01563	0.01552	0.01541

ρ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
$K_{III}^0(-b)$	0.01529	0.01521	0.01515	0.01509	0.01504	0.01502
$K_{III}^0(-a)$	0.01531	0.01523	0.01515	0.01509	0.01504	0.01502

Значение КИН $K_{III}^0(-b), K_{III}^0(-a)$ имеют максимальное значение при $\rho = 0$, т.е. когда трещина и включение соединяются, притом значение КИН $K_{III}^0(-a)$ всегда больше, чем $K_{III}^0(-b)$, а при возрастании параметра ρ до единицы оба значения уменьшаются и приближаются друг к другу.

Вычисленные значения КИН $K_{III}^0(-b)$ и $K_{III}^0(-a)$ в зависимости от изменения параметра h при фиксированных значениях других параметров μ, ρ, H приведены в табл.2, которые характерны для этих КИН и при других значениях параметров.

Значения КИН $K_{III}^0(-b), K_{III}^0(-a)$ ($\mu = 2, \rho = 0.5, H = 100$)

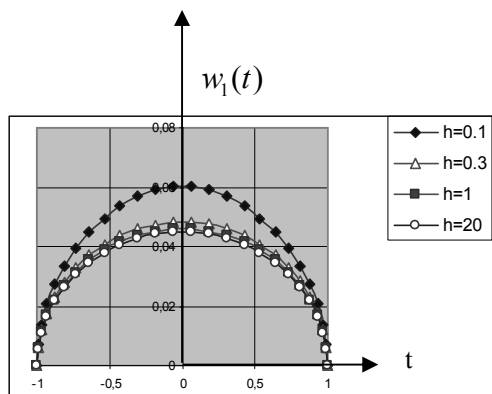
Таблица 2

h	0.1	0.2	0.3	0.5	0.6	0.8
$K_{III}^0(-b)$	0.01847	0.01656	0.01595	0.01553	0.01545	0.01535
$K_{III}^0(-a)$	0.01851	0.01661	0.01601	0.01558	0.01549	0.01538

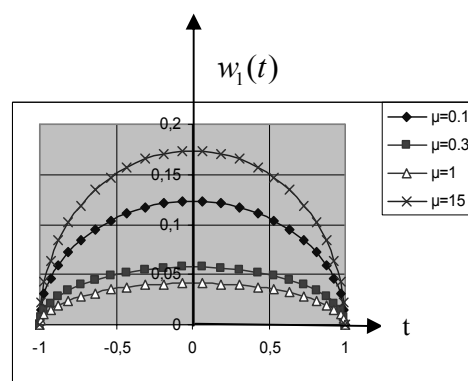
h	0.9	1	8	30	50	100
$K_{III}^0(-b)$	0.01532	0.01529	0.01504	0.01501	0.015	0.015
$K_{III}^0(-a)$	0.01534	0.01531	0.01504	0.01501	0.015	0.015

Очевидно, что значения КИН $K_{III}^0(-b), K_{III}^0(-a)$ с возрастанием параметра h уменьшаются, приближаясь к своему предельному значению, которое одинаково для обоих концов трещины.

Вычисленные по формуле (21) безразмерные раскрытия трещины $w_1(t)$ для различных значений параметра h и при фиксированных значениях $\rho = 0.5, \mu = 2, H = 100$ графически изображены на фиг. 1. По мере возрастания h эти графики спускаются вниз, приближаясь к предельной кривой при $h = \infty$. А на фиг.2 тоже изображены безразмерные раскрытия трещины $w_1(t)$ для различных значений параметра μ при фиксированном значении $\rho = 0.5, h = 1, H = 100$. В этом случае получается, что раскрытие трещины минимальное, когда полоса однородная.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для некоторых значений характерных параметров, при которых нагрузки не превышают теоретическую прочность материалов, раскрытия трещины могут быть большими по сравнению с приведенными здесь их величинами. Эти величины регулируются деформационными критериями распространения трещины. Например, по известному критерию Леонова-Панасюка [10], когда в окрестностях вершин трещины раскрытие достигает критического значения $\delta_{кр}$, трещина распространяется. Тогда, заведомо, прежде чем раскрытие достигнет расчетных больших величин, трещина уже распространена.

В заключение авторы благодарят В.Н. Акопяна за полезное обсуждение результатов работы и за сделанные замечания.

Основные результаты работы доложены на Международной конференции по проблемам динамики взаимодействия деформируемых сред (сентябрь 21-26, 2008, Горис-Степанакерт).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344с.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М: Наука, 1974. 456с.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М: Наука, 1983. 488с.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
6. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
7. Theocaris P.S., Iokamidis N.I. Numerical Integration Methods for the solution of singular Integral Equations. Quart. Appl. Math., vol XXXV, No1, pp. 173-185, 1977.
8. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. //Механика разрушения и прочность материалов. Спр. пособие под общей редакцией В.В. Панасюка, т. 2. Киев: Наукова думка, 1988. 619с.
9. Мкртчян М.С. Напряженное состояние упругого кусочно-однородного пространства с трещинами или абсолютно жесткими включениями при антиплоской и плоской деформациях. /Кандидатская диссертация. Ереван, Институт механики НАН РА, 2001.
10. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974.

Сведения об авторах:

Манукян Эмиль Абетович – канд. физ-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: Ереван, 0019, пр. Маршала Баграмяна 24^Б

Мкртчян Мушег Серёжаевич – канд. физ-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении

Тел.: (37410)43-16-52

E-mail: muscheg@meching.sci.am

Поступила в редакцию 21.04.2009