

УДК 539.3

**О НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ КОМПОЗИТА В ВИДЕ ПАКЕТА ИЗ
ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЧИСЛА УПРУГИХ СЛОЁВ ПРИ
АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

ГАСПАРЯН А. В., МХИТАРЯН С. М.

Ключевые слова: композит, теория упругости, конечно-разностные уравнения, модели тонкого слоя.

Keywords: composite, theory of elasticity, equations of finite differences, models of thin layers.

Գասպարյան Ա.Վ., Մխիթարյան Ս.Մ.

**Հակահարթ դեֆորմացիայի դեպքում կամայական վերջավոր թվով առաձգական շերտերից
բաղկացած փաթեթի տեսքով կոմպոզիտի լարվածային վիճակի մասին**

Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ դիտարկվում է հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ կոմպոզիտի լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդիրը: Կոմպոզիտը կտոր առ կտոր համասեռ մարմին է՝ փաթեթի տեսքով, բաղկացած տարբեր առաձգական և երկրաչափական բնութագրիչներ ունեցող կամայական վերջավոր թվով շերտերից:

Gasparyan A.V., Mkhitarian S.M.

**On Stressed State of a Composite in Form of a Package Composed of an Arbitrary Number of Elastic
Layers under Antiplane Deformation**

A problem on stressed state of a composite under antiplane deformation is considered with application of Fourier integral transform. The composite is a piecewise homogeneous body in form of a package composed of an arbitrary finite number of layers with different elastic and geometric characteristics.

При помощи интегрального преобразования Фурье рассматривается задача о напряженном состоянии композита при антиплоской деформации, представляющего собой кусочно-однородное тело в виде пакета из произвольного конечного числа слоев с различными упругими и геометрическими характеристиками.

Задачи о напряженном состоянии кусочно-однородных тел в виде пакетов, состоящих из произвольного конечного числа упругих слоев, ввиду их теоретической и практической важности стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на работу В.З. Власова [1] и на монографию [2], где для решения таких задач развит метод начальных функций. Укажем также на статью В. В. Власова [3], где этот метод применяется к решению задачи о равновесии толстых многослойных плит. Эта же задача с применением методов преобразования Фурье и матричного исчисления рассматривается в работе Буфлера [4]. С методом начальных функций тесно связан разработанный А.И. Лурье символический метод, который применяется в задаче о равновесии толстого упругого слоя [5]. Асимптотическими методами задачи о напряженном состоянии двух и трехслойных композитов исследованы в монографии Л.А. Агаловяна и Р.С. Геворкяна [6].

В настоящей работе при помощи интегрального преобразования Фурье рассматривается задача о напряженном состоянии композита, представляющего собой кусочно-однородное тело в виде пакета из произвольного конечного числа слоев с различными упругими и геометрическими характеристиками, когда на граничных плоскостях действуют касательные силы, вызывающие антиплоскую деформацию. Кратко обсуждается также соответствующая смешанная граничная задача. Из полученных результатов выведены уравнения деформирования тонкого упругого слоя, описывающие известные модели Мелана и Винклера. Рассмотрены частные случаи и приведены числовые результаты.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть композит, отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, представляет собой пакет из произвольного конечного числа n упругих слоев

$$\Omega_k = \{-\infty < x < \infty, \quad h_{k-1} \leq y \leq h_k\} \quad (k = \overline{1, n})$$

с модулями сдвига G_k . Пусть далее к нижней и верхней плоскостям $y = h_0$ и $y = h_n$ приложены касательные силы интенсивностей $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$, соответственно, т. е.

$$\tau_{yz} \Big|_{y=h_0} = \tau_0(x), \quad \tau_{yz} \Big|_{y=h_n} = \tau_n(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

обеспечивающие состояние антиплоской деформации с базовой плоскостью Oxy .

Здесь τ_{yz} – компонента касательных напряжений. Требуется определить компоненты напряжений и смещений в композите, когда функции напряжения крайних граней композита $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$ наперед заданы. Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи обозначим через $w_k = w_k(x, y)$ единственную отличную от нуля компоненту смещений в направлении оси Oz , а неизвестные касательные контактные напряжения на гранях $y = h_{k-1}$ и $y = h_k$ ($k = \overline{1, n}$) слоя Ω_k – $\tau_{k-1}(x)$ и $\tau_k(x)$, соответственно. Тогда, воспользовавшись законом Гука для слоя Ω_k , придем к следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = 0 & (-\infty < x < \infty, \quad h_{k-1} < y < h_k) \\ G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_{k-1}} = \tau_{k-1}(x), \quad G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_k} = \tau_k(x) & (-\infty < x < \infty, \quad k = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (1.1)$$

Для решения граничной задачи (1.1) введем в рассмотрение трансформанты Фурье

$$\{\bar{\tau}_k(\lambda); \bar{w}_k(\lambda, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\tau_k(x); w_k(x, y)\} e^{i\lambda x} dx,$$

где λ – спектральный параметр Фурье. Тогда (1.1) перейдет в следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{w}_k}{dy^2} - \lambda^2 \bar{w}_k = 0 & (h_{k-1} < y < h_k, \quad k = \overline{1, n}) \\ G_k \frac{d \bar{w}_k}{dy} \Big|_{y=h_{k-1}} = \bar{\tau}_{k-1}(\lambda), \quad G_k \frac{d \bar{w}_k}{dy} \Big|_{y=h_k} = \bar{\tau}_k(\lambda) \end{cases} \quad (1.2)$$

Решение задачи (1.2) имеет вид

$$\bar{w}_k = \bar{w}_k(\lambda, y) = A_k \operatorname{ch} \lambda y + B_k \operatorname{sh} \lambda y \quad (h_{k-1} \leq y \leq h_k) \quad (1.3)$$

где коэффициенты A_k и B_k определяются из граничных условий краевой задачи (1.1) при помощи матричного равенства

$$\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda G_k \operatorname{sh} \lambda (h_{k-1} - h_k)} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \lambda h_k & -\operatorname{ch} \lambda h_{k-1} \\ -\operatorname{sh} \lambda h_k & \operatorname{sh} \lambda h_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{k-1} \\ \bar{\tau}_k \end{pmatrix} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (1.4)$$

Далее запишем условия непрерывности смещений на линии контакта $y = h_k$ слоев Ω_k и Ω_{k+1} , которые при помощи (1.3) запишутся в виде

$$A_k \operatorname{ch} \lambda h_k + B_k \operatorname{sh} \lambda h_k = A_{k+1} \operatorname{ch} \lambda h_k + B_{k+1} \operatorname{sh} \lambda h_k \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

или в эквивалентной матричной форме

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \lambda h_k & \operatorname{sh} \lambda h_k \\ \operatorname{sh} \lambda h_k & \operatorname{ch} \lambda h_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \lambda h_k & \operatorname{sh} \lambda h_k \\ \operatorname{sh} \lambda h_k & \operatorname{ch} \lambda h_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{pmatrix} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.5)$$

Теперь, приняв во внимание (1.4), из (1.5) после простых преобразований относительно трансформантов Фурье неизвестных касательных напряжений $\bar{\tau}_k(\lambda)$ получим следующую систему конечно-разностных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} &= 0 \quad (k = \overline{1, n-1}) \\ a_k &= \frac{1}{G_k \operatorname{sh}(\lambda d_k)}, \quad b_k = \frac{\operatorname{cth}(\lambda d_k)}{G_k}, \quad d_k = h_k - h_{k-1} \quad (k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь d_k ($k = \overline{1, n}$) – высота k -ого слоя Ω_k .

Для сведения (1.6) к конечно-разностным уравнениям первого порядка положим

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - b_k \bar{\tau}_k = \omega_k \quad (1.7)$$

$$a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} - b_{k+1} \bar{\tau}_k = \chi_{k+1} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.8)$$

Тогда система уравнений (1.6) перейдет в систему

$$\omega_k + \chi_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.9)$$

Таким образом, решение поставленной здесь задачи сводится к решению конечно-разностных уравнений первого порядка (1.7), (1.8) и (1.9).

После того, как построены решения этих уравнений, по формуле (1.4) определяются коэффициенты A_k и B_k , а затем по формуле (1.3) – функции $\bar{w}_k(\lambda, y)$. Наконец, при помощи обратного интегрального преобразования Фурье определяются функции $w_k(x, y)$ ($k = \overline{1, n}$), а при помощи последних – напряжения в любой точке композита.

2. Решение определяющих конечно-разностных уравнений первого порядка.

Решения определяющих конечно-разностных уравнений (1.7) и (1.8) построим известным методом [7]. Сначала уравнение (1.7) представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_k &= [1 - P(k)] \bar{\tau}_{k-1} + Q(k), \\ P(k) &= \frac{b_k - a_k}{b_k}, \quad Q(k) = -\frac{\omega_k}{b_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

и рассмотрим однородное уравнение

$$\bar{\tau}_k = [1 - P(k)] \bar{\tau}_{k-1} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.2)$$

Отсюда можем записать

$$\bar{\tau}_1 = [1 - P(1)]\bar{\tau}_0$$

$$\bar{\tau}_2 = [1 - P(2)]\bar{\tau}_1$$

.....

$$\bar{\tau}_k = [1 - P(k)]\bar{\tau}_{k-1}$$

Перемножая почленно эти равенства, получим решение однородного уравнения (2.2) в виде

$$\bar{\tau}_k = \bar{\tau}_0 \prod_{j=1}^k [1 - P(j)] \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.3)$$

Далее исходя из (2.3), методом вариации находим решение неоднородного уравнения (2.1):

$$\bar{\tau}_k = -\sum_{i=1}^k A_i \frac{C_i}{C_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_0}{C_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.4)$$

$$A_i = G_i \text{th}(\lambda d_i), \quad C_i = \prod_{r=1}^i \text{ch}(\lambda d_r) \quad (i = \overline{1, n})$$

Таким же образом решение уравнения (1.8) с учетом (1.9) представляется формулой

$$\bar{\tau}_k = \sum_{i=k}^{n-1} B_i \frac{D_{i+1}}{D_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.5)$$

$$B_i = G_{i+1} \text{sh}(\lambda d_{i+1}), \quad D_i = \prod_{r=i}^{n-1} \text{ch}(\lambda d_{r+1})$$

Теперь приравнявая выражения (2.4) и (2.5) относительно неизвестных ω_i ($i = \overline{1, n-1}$), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$-\sum_{i=1}^k A_i \frac{C_i}{C_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_0}{C_k} = \sum_{i=k}^{n-1} B_i \frac{D_{i+1}}{D_k} \omega_i + \frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.6)$$

Преобразуем систему (2.6) к системе с левой треугольной матрицей. С этой целью представим ее в виде

$$A_k \omega_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_i C_i}{C_k} \omega_i + \sum_{i=k}^{n-1} \frac{B_i D_{i+1}}{D_k} \omega_i = \frac{\bar{\tau}_0}{C_k} - \frac{\bar{\tau}_n}{D_k} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.7)$$

и положим

$$K_n = \prod_{r=1}^n \text{ch}(\lambda d_r) \quad (2.8)$$

Тогда легко видеть, что

$$D_{i+1} = \prod_{r=i+1}^{n-1} \text{ch}(\lambda d_{r+1}) = \frac{K_n}{\text{ch}(\lambda d_{i+1}) C_i}$$

$$D_k = \prod_{r=k}^{n-1} \text{ch}(\lambda d_{r+1}) = \frac{K_n}{C_k} = \prod_{r=k+1}^n \text{ch}(\lambda d_r) \quad (i = \overline{k, n-1}; \quad k = \overline{1, n-1})$$

В результате, система (2.7) перейдет в систему

$$\sum_{i=1}^k A_i C_i \omega_i + C_k^2 \sum_{i=k}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i = \bar{\tau}_0 - \frac{C_k^2}{K_n} \bar{\tau}_n \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.9)$$

Далее положив

$$X_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i \quad (2.10)$$

обнаружим, что

$$\sum_{i=k}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i = X_n - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i$$

С учётом последнего система уравнений (2.9) окончательно преобразуется в следующую систему линейных уравнений с левой треугольной матрицей:

$$\sum_{i=1}^k L_{ki} \omega_i = g_k \quad (k = \overline{1, n-1})$$

$$L_{ki} = \begin{cases} A_i C_i - \frac{C_k^2}{C_i} A_{i+1} & (i = \overline{1, k-1}) \\ A_k C_k & (i = k) \end{cases} \quad (2.11)$$

$$g_k = \bar{\tau}_0 - C_k^2 \left(X_n + \frac{\bar{\tau}_n}{K_n} \right)$$

Чтобы определить X_n из (2.10), решение системы (2.10) при правой части $g_k^{(1)}$ – вектора-столбца из k строк, состоящего только из единиц, обозначим через $\omega_i^{(1)}$ ($i = \overline{1, n-1}$), а при правой части $g_k^{(2)} = C_k^2$ – через $\omega_i^{(2)}$ ($i = \overline{1, n-1}$). Тогда решение системы (2.11) выразится формулой

$$\omega_i = \bar{\tau}_0 \omega_i^{(1)} - \left(X_n + \frac{\bar{\tau}_n}{K_n} \right) \omega_i^{(2)} \quad (i = \overline{1, n-1})$$

Подставляя это выражение ω_i в (2.10), находим

$$X_n = \frac{\bar{\tau}_0 K_n S_n^{(1)} - \bar{\tau}_n S_n^{(2)}}{K_n [1 + S_n^{(2)}]}, \quad S_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} \omega_i^{(j)} \quad (j = 1, 2)$$

Система уравнений (2.11) легко решается. Известным способом можно построить также ее аналитическое решение. А именно, введем в рассмотрение левую треугольную матрицу

$$L = (L_{ki}) \quad (i = \overline{1, k}; \quad k = \overline{1, n-1})$$

Тогда элементы обратной матрицы $M = (M_{ki}) = L^{-1}$, которая также левотреугольная, определяются формулами

$$M_{ii} = \frac{1}{L_{ii}}, \quad M_{ki} = 0 \quad (k < i)$$

$$M_{ki} = -\sum_{j=i}^{k-1} \frac{L_{kj} M_{ji}}{L_{kk}} \quad (k > i)$$

Из последних равенств элементы M_{ki} обратной матрицы L^{-1} последовательно определяются.

3. Смешанная граничная задача для композита. Вкратце остановимся также на смешанной граничной задаче для композита, когда на его нижней граничной плоскости опять заданы касательные силы, а на верхней граничной плоскости – смещения, т. е.

$$\tau_{yz} \Big|_{y=h_0} = G_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=h_0} = \tau_0(x), \quad w_n(x, y) \Big|_{y=h_n} = w_n(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $w_n(x)$ – наперёд заданная функция. В этом случае все предыдущие результаты остаются в силе кроме результатов для последнего слоя Ω_n , для которого имеют место смешанные граничные условия:

$$G_n \frac{\partial w_n}{\partial y} \Big|_{y=h_{n-1}} = \tau_{n-1}(x), \quad w_n(x, y) \Big|_{y=h_n} = w_n(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

В трансформантах Фурье для слоя Ω_n получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{w}_n}{dy^2} - \lambda^2 \bar{w}_n = 0 & (h_{n-1} < y < h_n) \\ G_n \frac{d \bar{w}_n}{dy} \Big|_{y=h_{n-1}} = \bar{\tau}_{n-1}, \quad \bar{w}_n(\lambda, y) \Big|_{y=h_n} = \bar{w}_n \end{cases}$$

Решение этой граничной задачи выражается формулой ($h_{n-1} \leq y \leq h_n$)

$$\bar{w}_n(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda G_n \operatorname{ch}(\lambda d_n)} \left[\lambda G_n \bar{w}_n \operatorname{ch} \lambda (y - h_{n-1}) - \bar{\tau}_{n-1} \operatorname{sh} \lambda (h_n - y) \right] \quad (3.1)$$

где $\bar{w}_n = \bar{w}_n(\lambda)$ – трансформанта Фурье функции $w_n(x)$. С другой стороны, при помощи (1.3) и (1.4) при $k = n-1$ и $y = h_{n-1}$ после элементарных выкладок получим

$$\bar{w}_{n-1}(\lambda, h_{n-1}) = \frac{\bar{\tau}_{n-1} \operatorname{ch}(\lambda d_{n-1}) - \bar{\tau}_{n-2}}{\lambda G_{n-1} \operatorname{sh}(\lambda d_{n-1})} \quad (3.2)$$

Теперь условие непрерывности смещений в образах Фурье

$$\bar{w}_n(\lambda, h_{n-1}) = \bar{w}_{n-1}(\lambda, h_{n-1})$$

при помощи (3.1) и (3.2) приводит к соотношению

$$\bar{\tau}_{n-2} = G_{n-1} \operatorname{sh}(\lambda d_{n-1}) \left\{ \left[\frac{\operatorname{cth}(\lambda d_{n-1})}{G_{n-1}} + \frac{\operatorname{th}(\lambda d_n)}{G_n} \right] \bar{\tau}_{n-1} - \frac{\lambda \bar{w}_n}{\operatorname{ch}(\lambda d_n)} \right\} \quad (3.3)$$

В данном случае смешанной краевой задачи сначала необходимо построить решение разностных уравнений (1.6) или (1.7) – (1.9) при $k = \overline{1, n-2}$. Затем решение $\bar{\tau}_{n-2}$, которое выражается через $\bar{\tau}_0$ и $\bar{\tau}_{n-1}$, следует подставить в (3.3), откуда определится $\bar{\tau}_{n-1}$. Далее необходимо найти $\bar{\tau}_n$:

$$\bar{\tau}_n = G_n \frac{d\bar{w}_n}{dy} \Big|_{y=h_n} = \lambda G_n \bar{w}_n \text{th}(\lambda d_n) + \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\text{ch}(\lambda d_n)} \quad (3.4)$$

В частности, когда грань $y = h_n$ жестко закреплена, то $w_n(x) \equiv 0$ и следовательно, $\bar{w}_n = 0$. Тогда формулы (3.3) и (3.4) примут, соответственно, вид

$$\bar{\tau}_{n-2} = G_{n-1} \text{sh}(\lambda d_{n-1}) \left[\frac{\text{cth}(\lambda d_{n-1})}{G_{n-1}} + \frac{\text{th}(\lambda d_n)}{G_n} \right] \bar{\tau}_{n-1}; \quad \bar{\tau}_n = \frac{\bar{\tau}_{n-1}}{\text{ch}(\lambda d_n)}$$

4. Частные случаи и числовые результаты. Рассмотрим частный случай двухслойного композита, когда $n = 2$. В данном случае из (2.9) или (2.11) сразу определится $\bar{\omega}_1$, а затем из (2.4) или (2.5) определится $\bar{\tau}_1$ через $\bar{\tau}_0$ и $\bar{\tau}_2$. При этом образы Фурье смещений $\bar{w}_1(\lambda, y)$ и $\bar{w}_2(\lambda, y)$ определяются по (1.3) и (1.4). Выражение $\bar{\tau}_1$ можно получить также из (1.6) при $n = 2$. В результате

$$\bar{w}_1(\lambda, y) = -\frac{1}{\lambda G_1 \text{sh}(\lambda d_1)} \left[\text{ch}\lambda(h_1 - y)\bar{\tau}_0 - \text{ch}\lambda(y - h_0)\bar{\tau}_1 \right] \quad (h_0 \leq y \leq h_1) \quad (4.1)$$

$$\bar{w}_2(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda G_2 \text{sh}(\lambda d_2)} \left[\text{ch}\lambda(y - h_1)\bar{\tau}_2 - \text{ch}\lambda(h_2 - y)\bar{\tau}_1 \right] \quad (h_1 \leq y \leq h_2) \quad (4.2)$$

$$\bar{\tau}_1 = \frac{G_2 \text{sh}(\lambda d_2)\bar{\tau}_0 + G_1 \text{sh}(\lambda d_1)\bar{\tau}_2}{G_2 \text{sh}(\lambda d_2)\text{ch}(\lambda d_1) + G_1 \text{sh}(\lambda d_1)\text{ch}(\lambda d_2)} \quad (-\infty < \lambda < \infty) \quad (4.3)$$

Теперь, исходя из (4.1) или (4.2), выведем дифференциальное уравнение деформирования материального волокна с ординатой y , причем $(h_{k-1} \leq y \leq h_k)$ ($k = 1, 2$). С этой целью (4.1) запишем в виде

$$\lambda G_1 \text{sh}(\lambda d_1) \bar{w}_1(\lambda, y) = \text{ch}\lambda(y - h_0)\bar{\tau}_1 - \text{ch}\lambda(h_1 - y)\bar{\tau}_0 \quad (h_0 \leq y \leq h_1)$$

и в этом равенстве целые функции $\lambda \text{sh}(\lambda d_1)$, $\text{ch}\lambda(y - h_0)$ и $\text{ch}\lambda(h_1 - y)$ разложим в ряды, ограничиваясь в них членами порядка λ^2 . В результате, будем иметь $(-\infty < \lambda < \infty)$

$$d_1 G_1 \lambda^2 \bar{w}_1(\lambda, y) = \bar{\tau}_1(\lambda) - \bar{\tau}_0(\lambda) + \frac{(y - h_0)^2}{2} \lambda^2 \bar{\tau}_1(\lambda) - \frac{(h_1 - y)^2}{2} \lambda^2 \bar{\tau}_0(\lambda).$$

Отсюда при помощи формулы обратного преобразования Фурье получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее в рамках принятой точности механическое поведение деформирования материальной линии с ординатой y первого слоя композита $(-\infty < x < \infty, h_0 \leq y \leq h_1)$:

$$d_1 G_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \tau_0(x) - \tau_1(x) + \frac{(y - h_0)^2}{2} \tau_1''(x) - \frac{(h_1 - y)^2}{2} \tau_0''(x) \quad (4.4)$$

Теперь из (4.4) при $y = h_0$ или $y = h_1$ находим, соответственно,

$$d_1 G_1 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \tau_0 - \tau_1 - \frac{d_1^2}{2} \tau_0'' \quad (4.5)$$

$$d_1 G_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \tau_0 - \tau_1 + \frac{d_1^2}{2} \tau_1'' \quad (-\infty < x < \infty) \quad (4.6)$$

Далее в (4.5) – (4.6) совершим предельные переходы $d_1 \rightarrow 0$ и $G_1 \rightarrow \infty$ таким образом, чтобы жесткость материального волокна $D = d_1 G_1$ осталась постоянной [8]. В результате,

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = \tau_0 - \tau_1 \quad (D = d_1 G_1)$$

Этим уравнением описывается известная модель Мелана для тонкого слоя-стрингера.

Если же в (4.5) – (4.6) положить $\tau = \tau_0 = \tau_1$ и пренебречь жестким смещением волокна, то после интегрирования придём к известной модели Винера

$$Dw = \pm \frac{d_1^2}{2} \tau \quad (D = d_1 G_1)$$

с коэффициентом постели $d_1^2/2D$.

Вполне аналогичные уравнения можно получить для второго слоя композита.

Обращаясь к контактным напряжениям, действующими между слоями, из (4.3) при помощи обратного преобразования Фурье получим

$$\tau_1(x) = \frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(|x-s|) \tau_0(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(|x-s|) \tau_2(s) ds \quad (k = G_2/G_1)$$

$$K(x) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(\lambda d_2) \cos(\lambda x) d\lambda}{k \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} \quad (4.7)$$

$$L(x) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(\lambda d_1) \cos(\lambda x) d\lambda}{k \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} \quad (-\infty < x < \infty)$$

Для упрощения этих формул рассмотрим частный случай нагружения двухслойного композита, когда

$$\tau_0(x) = \tau_1(x) = T\delta(x), \quad (-\infty < x < \infty)$$

где $\delta(x)$ – известная дельта-функция Дирака. Тогда после введения безразмерных величин

$$\alpha = \lambda d_1; \quad \xi = x/d_1; \quad \delta = d_2/d_1; \quad \tilde{\tau}_1(\xi) = d_1 \tau_1(d_1 \xi)/T$$

формулы (4.7) примут вид

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{\pi} \left[k K_0(|\xi|) + L_0(|\xi|) \right] \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

$$K_0(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(\alpha \delta) \cos(\alpha \xi) d\alpha}{k \text{sh}(\alpha \delta) \text{ch} \alpha + \text{sh} \alpha \text{ch}(\alpha \delta)} \quad (4.8)$$

$$L_0(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sh} \alpha \cos(\alpha \xi) d\alpha}{k \text{sh}(\alpha \delta) \text{ch} \alpha + \text{sh} \alpha \text{ch}(\alpha \delta)}$$

Рассмотрим частные случаи формул (4.8):

1) Пусть $k = 1$, т. е. $G_1 = G_2$ и, следовательно, имеем однородные слои. Тогда, после вычисления интегралов $K_0(\xi)$ и $L_0(\xi)$ ([9], формула 3.981.5, стр. 518), получим $(-\infty < \xi < \infty)$

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{2(\delta+1)} \left\{ \frac{\sin[\pi\delta/(\delta+1)]}{\operatorname{ch}[\pi\xi/(\delta+1)] + \cos[\pi\delta/(\delta+1)]} + \frac{\sin[\pi/(\delta+1)]}{\operatorname{ch}[\pi\xi/(\delta+1)] + \cos[\pi/(\delta+1)]} \right\} \quad (4.9)$$

Если считать $d_1 = \text{const}$, а $d_2 \rightarrow 0$, то $\delta \rightarrow 0$ и тогда (4.9) даст

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \delta(\xi)$$

т. е. сосредоточенная сила из верхнего слоя непосредственно передаётся к нижнему слою.

2) Пусть $k \ll 1$, т. е. $G_1 \ll G_2$. Тогда

$$\text{а) } \frac{k\operatorname{sh}(\alpha\delta)}{k\operatorname{sh}(\alpha\delta)\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}(\alpha\delta)} = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha} \left[1 - \frac{\operatorname{th}\alpha}{\operatorname{th}\alpha + k\operatorname{th}(\alpha\delta)} \right]$$

$$\text{б) } \frac{\operatorname{sh}\alpha}{k\operatorname{sh}(\alpha\delta)\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}(\alpha\delta)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha\delta)} \frac{\operatorname{th}\alpha}{\operatorname{th}\alpha + k\operatorname{th}(\alpha\delta)}$$

Далее разложим функцию

$$g(k) = \frac{\operatorname{th}\alpha}{\operatorname{th}\alpha + k\operatorname{th}(\alpha\delta)}$$

в ряд Маклорена по параметру k и пренебрежём членами порядка k^j , $j \geq 2$, т. е. ограничимся только линейными относительно k членами. В этом приближении из (4.8) получим $(-\infty < \xi < \infty)$

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{k}{\pi} \left[\int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\alpha\delta)}{\operatorname{sh}\alpha} \cos(\alpha\xi) d\alpha - \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\alpha\delta)}{\operatorname{th}\alpha \operatorname{ch}(\alpha\delta)} \cos(\alpha\xi) d\alpha \right] + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha\xi)}{\operatorname{ch}(\alpha\delta)} d\alpha. \quad (4.10)$$

Если теперь в (4.10) положить $k \approx 0$ и воспользоваться выражениями известного интеграла [9] (формула 3.981.3, стр. 517), то

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{2\delta \operatorname{ch}(\pi\xi/2\delta)} \quad (-\infty < \xi < \infty).$$

3) Пусть теперь $k \gg 1$, т. е. $G_1 \gg G_2$. Тогда поступив совершенно аналогично случаю 2) и пренебрегая членами порядка k^{-j} , $j \geq 2$, из (4.8) находим $(-\infty < \xi < \infty)$

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{2\text{ch}(\pi\xi/2)} + \frac{1}{\pi k} \left[\int_0^\infty \frac{\text{th}\alpha}{\text{sh}(\alpha\delta)} \cos(\alpha\xi) d\alpha - \int_0^\infty \frac{\text{th}\alpha}{\text{ch}\alpha \text{th}(\alpha\delta)} \cos(\alpha\xi) d\alpha \right] \quad (4.11)$$

Отсюда при предельном переходе $k \rightarrow \infty$ будем иметь

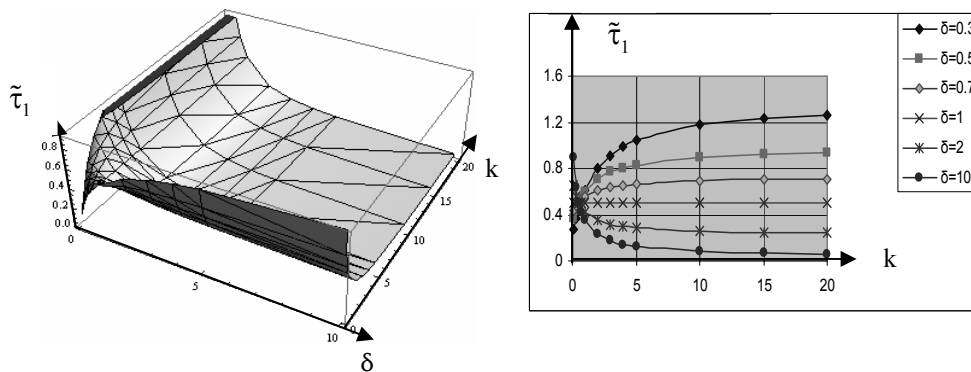
$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{2\text{ch}(\pi\xi/2)} \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

В общем случае для вычисления безразмерных касательных контактных напряжений имеем формулы (4.8). Положив в них, в частности, $\xi = 0$ и в интегралах перейдя к новой переменной t по формуле $x = -\ln t$ ($0 < t < 1$), придем к формулам

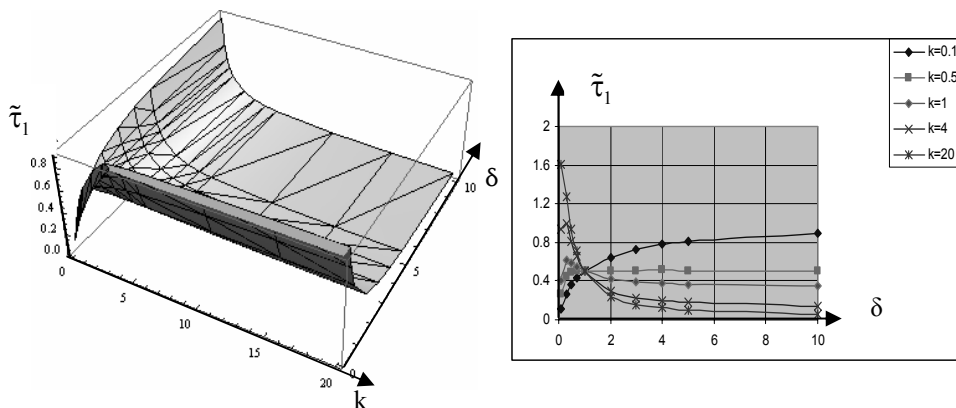
$$\tilde{\tau}_1(0) = \frac{2}{\pi} [kK(0) + L(0)], \quad K(0) = \int_0^1 \frac{(1-t^{2\delta})dt}{k(1+t^2)(1-t^{2\delta}) + (1-t^2)(1+t^{2\delta})}$$

$$L(0) = \int_0^1 \frac{(1-t^2)t^{\delta-1}dt}{k(1+t^2)(1-t^{2\delta}) + (1-t^2)(1+t^{2\delta})} \quad (4.12)$$

На фиг. 1 построена поверхность $\tilde{\tau}_1(0)$ в зависимости от параметров k и δ и приведены графики $\tilde{\tau}_1(0)$ в зависимости от параметра δ при различных фиксированных значениях k . На фиг.2 для более наглядного представления опять построена поверхность $\tilde{\tau}_1(0)$ в зависимости от параметров k и δ , поменяв при этом местами оси этих параметров, а также приведены графики $\tilde{\tau}_1(0)$ как функции от k при различных фиксированных значениях δ . На этих фигурах наглядно показан ход изменений $\tilde{\tau}_1(0)$ в зависимости от характерных параметров k и δ . При этом, легко видеть, что по (4.12), когда $\delta = 1$, имеем $K(0) = L(0) = \pi/2(k+1)$ и, следовательно, $\tilde{\tau}_1(0)$ не зависит от отношения модулей сдвига k . Это свойство $\tilde{\tau}_1(0)$ хорошо видно на приведенных графиках, особенно на фиг.1.



Фиг.1



Фиг.2

Авторы благодарят А.В.Саакяна за замечания по улучшению изложения текста статьи в части комментариев к приведённым фигурам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Метод начальных функций в задачах теории упругости.// Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 7. С.49–69.
2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании М.: Физматгиз, 1960. 491с.
3. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах равновесия толстых многослойных плит // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 7. С.40–48.
4. Búfler H. Theory of Elasticity of a Multilayered Medium.// Journal of Elasticity, vol. 1, No. 2, 1971, pp.125–143.
5. Лурье А. Н. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491с.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн, Изд. НАН РА, 2005. 608с.
7. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М: Наука, 1967. 375 с.
8. Búfler H. Zur Krafterleitung in Scheiben über geschweißte oder geklebte Verbindungen. Österr. Ing. Arch, 1964, Bd 18, N 3-4, S. 284-292.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Сведения об авторах:

Гаспарян Ануш Варазатовна

Младший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24Б

Тел. (+37410) 52-48-90, E-mail: anush@mechins.sci.am

Мхитарян Сурен Манукович

Доктор физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник,

Институт механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24Б

Тел. (+37410) 52-48-90, E-mail: mechins@sci.am

Поступила в редакцию 18.08.2009