ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №1, 2010 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ

СИНАНЯН С.С.

Ключевые слова: пьезоэлектрическое пространство, бесконечный металлический слой, линейный источник, поверхностная волна, асимптотические формулы, дальняя зона.
Key words: Piezoelectric space, infinite metallic layer, linear source, surface wave, asymptotic formulae, farther zone

Ս.Ս. Սինանյան
Երկու զուգահեռ անվերջ մետաղական շերտերով պյեզոէլեկտրական տարածությունում սահքային տատանումների գծային աղբյուրի խնդիրը

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու զուգահեռ անվերջ մետաղական շերտերով պյեզոէլեկտրական տարածությունում հաստատված սահքային տատանումների գծային աղբյուրի խնդիրը: Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի իրական ձևափոխության օգնությամբ: Գտնված են տեղափոխության ամպլիտուդի ասիմպտոտիկ բանաձևերը հեռավոր գոտում: Ցույց է տրված, որ անվերջ մետաղական շերտերի առկայությունը բերում է մակերևութային ալիքների առաջացման և այնպիսի ալիքների առաջացմանը, որոնք ճառագայթի ուղղությամբ տարածվում են ճառագայթի բացվածքի անկյունից կախված արագությամբ:

S.S. Sinanyan
Linear Source of Shift Oscillations Problem in Piezoelectric Space with Infinite Metallic Layer

Linear source of established shift oscillations problem is discussed in piezoelectric space with infinite metallic layer. The problem is solved using Fourier real transformation. Shift amplitude asymptotic formulae in farther zone are found. It is shown that existence of infinite metallic layer yields to appearance of surface wave and another wave spreading with a speed depending on the opening angle of direction.

В работе рассматривается задача линейного источника установившихся колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с двумя бесконечными металлическими экранами. Задача решается с помощью действительного преобразования Фурье. Относительно амплитуд перемещений получены асимптотические формулы в дальней зоне. Показано, что наличие бесконечных металлических слоев приводит к появлению поверхностных волн и волны, распространяющейся по направлению луча со скоростью, зависящей от угла раствора луча.

Рассматривается пьезоэлектрическое пространство класса 6mm гексагональной симметрии с осью Oz, совпадающей с главной осью кристалла. В пьезоэлектрическом пространстве имеется включение в виде двух параллельных бесконечных заземлённых тонких металлических слоев. Считается, что толщина металлических слоев настолько мала, что их жесткостью можно пренебречь, т.е. слои можно рассматривать как электроды, занимающие плоскости $-\infty < x < \infty,\ y = h,\ -\infty < z < \infty$ и $-\infty < x < \infty,\ y = -h,\ -\infty < z < \infty$. Пьезоэлектрическое пространство совершает установившиеся колебания под действием линейного источника $F\delta(x)\delta(y - y_0)e^{-i\omega t}$, где $F-$интенсивность действуюшей силы, и $y_0 > h$. Тогда величины, характеризующие электроупругое поле, зависят от времени пропорционально $e^{-i\omega t}$. В этом случае уравнения относительно амплитуд перемещения $w(x,y)$ и квазистатического электрического потенциала $\varphi(x,y)$ примут вид [1].

$$\begin{aligned}&\Delta w + k^2 w = P\delta(x)\delta(y-y_0)\\&\Delta\varphi + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}k^2 w = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}P\delta(x)\delta(y-y_0)\end{aligned} \quad \text{при } y>h \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}&\Delta w + k^2 w = 0\\&\Delta\varphi + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}k^2 w = 0\end{aligned} \quad \text{при } y<h \qquad (2)$$

ε_{11} – диэлектрическая проницаемость, e_{15} – пьезомодуль, ω – частота колебаний, $k=\omega/c$ – волновое число, $c=\sqrt{c_{44}(1+æ)/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой волны, c_{44} – упругая постоянная, ρ – плотность среды, $P=F/c_{44}(1+æ)$, $æ = e_{15}{}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$, $\delta(x)$ – функция Дирака, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Решения уравнений (1), (2) должны удовлетворять контактным условиям

$$\begin{aligned}&w(x,\pm h+0)=w(x,\pm h-0),\\&\sigma_{yz}(x,\pm h+0)=\sigma_{yz}(x,\pm h-0),\ \varphi(x,\pm h)=0\end{aligned} \qquad (3)$$

где $\sigma_{yz}=c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$

Здесь следует отметить, что решение еще должно удовлетворять условию уходящей волны.

Для решения уравнений (1), (2) с условиями (3), применив к ним действительное интегральное преобразование Фурье по x, получим

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\overline{w}}{dy^2}-\gamma^2\overline{w}=P\delta(y-y_0)\\&\frac{d^2\overline{\varphi}}{dy^2}-\sigma^2\overline{\varphi}+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{w}=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}P\delta(y-y_0)\end{aligned} \quad \text{при } y>h \qquad (4)$$

$$\frac{d^2\overline{w}}{dy^2}-\gamma^2\overline{w}=0,\quad \frac{d^2\overline{\varphi}}{dy^2}-\sigma^2\overline{\varphi}+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{w}=0 \quad \text{при } -h<y<h \qquad (5)$$

$$\frac{d^2\overline{w}}{dy^2}-\gamma^2\overline{w}=0,\quad \frac{d^2\overline{\varphi}}{dy^2}-\sigma^2\overline{\varphi}+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{w}=0 \quad \text{при } y<-h \qquad (6)$$

$$\begin{aligned}&\overline{w}(\sigma,\pm h+0)=\overline{w}(\sigma,\pm h-0),\ \overline{\varphi}(\sigma,\pm h)=0\\&c_{44}\left.\frac{d\overline{w}}{dy}\right|_{y=\pm h+0}+e_{15}\left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=\pm h+0}=c_{44}\left.\frac{d\overline{w}}{dy}\right|_{y=\pm h-0}+e_{15}\left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=\pm h-0}\end{aligned} \qquad (7)$$

где $\gamma^2 = \sigma^2 - k^2$, $\overline{f}(\sigma, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\sigma x} dx$, $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma$.

Решение системы, представляющее уходящую волну, представим в виде четного и нечетного по y составляющих:

$$\begin{aligned} \overline{w}(\sigma, y) &= \overline{w}_{\text{чётн}}(\sigma, y) + \overline{w}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) \\ \overline{\varphi}(\sigma, y) &= \overline{\varphi}_{\text{чётн}}(\sigma, y) + \overline{\varphi}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) \end{aligned} \tag{8}$$

где $\overline{w}_{\text{чётн}}(\sigma, y), \overline{\varphi}_{\text{чётн}}(\sigma, y)$ – решение задачи под действием силы с амплитудой $\frac{P}{2}\delta(x)\delta(y - y_0) + \frac{P}{2}\delta(x)\delta(y + y_0)$, $\overline{w}_{\text{нечётн}}(\sigma, y)$, $\overline{\varphi}_{\text{нечётн}}(\sigma, y)$ – решение задачи под действием силы с амплитудой $\frac{P}{2}\delta(x)\delta(y - y_0) - \frac{P}{2}\delta(x)\delta(y + y_0)$.

$$\begin{aligned} \overline{w}_{\text{чётн}}(\sigma, y) &= C_1 e^{-\gamma|y|} - \frac{P}{4\gamma} e^{-\gamma||y| - y_0|} \\ \overline{\varphi}_{\text{чётн}}(\sigma, y) &= C_2 e^{-|\sigma||y|} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \overline{w} \end{aligned} \quad \text{при } |y| > h \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \overline{w}_{\text{чётн}}(\sigma, y) &= C_3 \operatorname{ch}\gamma y \\ \overline{\varphi}_{\text{чётн}}(\sigma, y) &= C_4 \operatorname{ch}|\sigma| y + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \overline{w} \end{aligned} \quad \text{при } |y| < h \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \overline{w}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) &= C_5 e^{-\gamma|y|} \operatorname{sgn}(y) - \frac{P}{4\gamma} e^{-\gamma||y| - y_0|} \operatorname{sgn}(y) \\ \overline{\varphi}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) &= C_6 e^{-|\sigma||y|} \operatorname{sgn}(y) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \overline{w} \end{aligned} \quad \text{при } |y| > h \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \overline{w}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) &= C_7 \operatorname{sh}\gamma y \\ \overline{\varphi}_{\text{нечётн}}(\sigma, y) &= C_8 \operatorname{sh}|\sigma| y + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \overline{w} \end{aligned} \quad \text{при } |y| < h \tag{12}$$

Выше имелось в виду, что $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$, $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$ при $|\sigma| > k$, т.е действительная ось комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ обходит точку $\sigma = -k$ сверху, а точку $\sigma = k$ – снизу [2].

Удовлетворив условиям (7), получим

$$C_1 = -\frac{P(1+æ)}{4} \frac{e^{-\gamma y_0}(1 + e^{-2|\sigma|h})(1 + e^{2\gamma h})}{K_1(\sigma)} + \frac{P}{4\gamma} e^{-\gamma(y_0 - 2h)}$$

$$C_3 = -\frac{P(1+æ)}{2} \frac{e^{-\gamma y_0}(1 + e^{-2|\sigma|h})}{K_1(\sigma)}, \quad C_4 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} C_3 \frac{\operatorname{ch}\gamma h}{\operatorname{ch}|\sigma|h}, \quad C_2 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} C_3 e^{|\sigma||h|} \operatorname{ch}\gamma h$$

$$C_5 = -\frac{P(1+æ)}{4} \frac{e^{-\gamma y_0}(1 - e^{-2|\sigma|h})(e^{2\gamma h} - 1)}{K_2(\sigma)} + \frac{P}{4\gamma} e^{-\gamma(y_0 - 2h)}$$

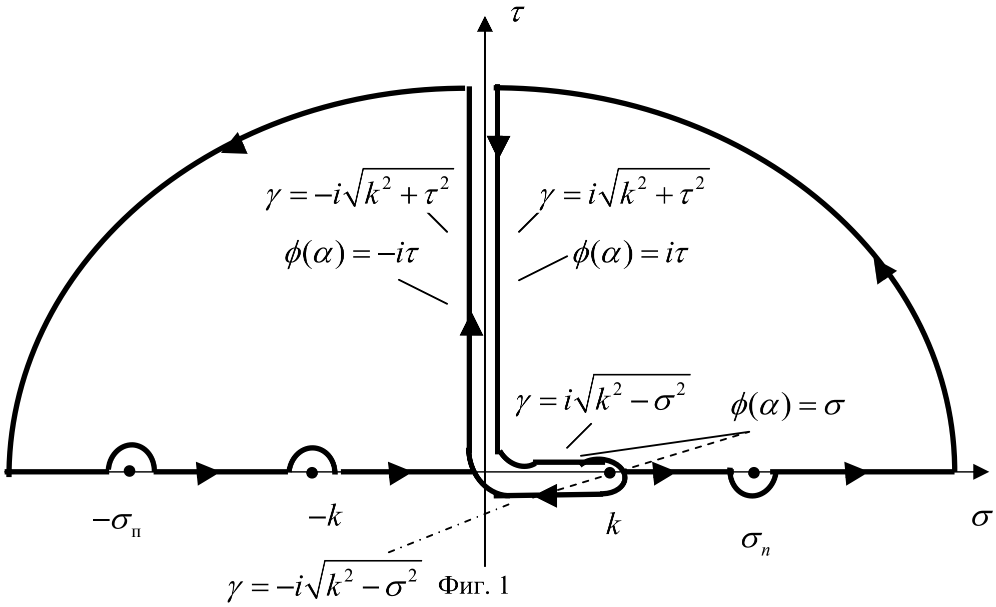
$$C_7 = -\frac{P(1+æ)}{2}\frac{e^{-\gamma y_0}(1-e^{-2|\sigma|h})}{K_2(\sigma)}, \quad C_8 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} C_7 \frac{\text{sh}\gamma h}{\text{sh}|\sigma| h},$$

$$C_6 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} C_3 e^{|\sigma| h} C_7 \text{sh}\gamma h \tag{13}$$

$$K_1(\sigma) = (1+æ)\gamma(1+e^{-2|\sigma|h}) - |\sigma|æ(1+e^{-2\gamma h})$$

$$K_2(\sigma) = (1+æ)\gamma(1-e^{-2|\sigma|h}) - |\sigma|æ(1-e^{-2\gamma h}).$$

Применив обратное преобразование Фурье к (9), (10), (11), (12), получим



Фиг. 1

$$\begin{aligned} w(x,y) &= w_{\text{чётн}}(x,y) + w_{\text{нечётн}}(x,y) \\ \varphi(x,y) &= \varphi_{\text{чётн}}(x,y) + \varphi_{\text{нечётн}}(x,y) \end{aligned} \tag{14}$$

где при $|y| > h$

$$w_{\text{чётн}}(x,y) = w^0_{\text{чётн}}(x,y) + w_{\text{ист}}(x,y)$$

$$w_{\text{нечётн}}(x,y) = w^0_{\text{нечётн}}(x,y)\,\text{sgn}(y) + w_{\text{ист}}(x,y)\,\text{sgn}(y)$$

$$w^0_{\text{чётн}}(x,y) = -\frac{P}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}((\frac{2(1+æ)e^{-\gamma y_0}(1+e^{-2|\sigma|h})\text{ch}\gamma h}{K_1(\sigma)} - \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma(y_0-h)})e^{-\gamma(|y|-h)})e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{15}$$

$$w^0_{\text{нечётн}}(x,y) = -\frac{P}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2(1+æ)e^{-\gamma y_0}(1-e^{-2|\sigma|h})\text{sh}\gamma h}{K_2(\sigma)} - \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma(y_0-h)}\right)e^{-\gamma(|y|-h)}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{16}$$

$$w_{\text{ист}}(x,y) = -\frac{P}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\gamma||y|-y_0|}}{\gamma}e^{-i\sigma x}d\sigma = -i\frac{P}{8}H_0^{(1)}(kr_0)$$

где $r_0 = \sqrt{(y-y_0)^2 + x^2}$, $H_0^{(1)}(kr_0)$ – известная функция Ханкеля первого рода.

А при $|y|<h$ $\quad w_{\text{чётн}}(x,y)=-\dfrac{P}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(1+æ)e^{-\gamma y_0}(1+e^{-2|\sigma|h})}{K_1(\sigma)}\,\mathrm{ch}\gamma y e^{-i\sigma x}d\sigma$ (17)

$$w_{\text{нечётн}}(x,y)=-\frac{P}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+æ)e^{-\gamma y_0}(1-e^{-2|\sigma|h})}{K_2(\sigma)}\,\mathrm{sh}\gamma y e^{-i\sigma x}d\sigma \quad (18)$$

Заметим, что как показано в работе [5] на действительной оси ($\sigma\neq 0$) $K_2(\sigma)$, имеем нули только в точках $\sigma=\pm\sigma_{\text{п}2}$ при $kh>A$, где A – единственное решение уравнения $(1-e^{-2A})(1+æ)=2Aæ$, а $K_1(\sigma)$ в точках $\sigma=\pm\sigma_{\text{п}1}$ – при любых значениях kh ($\sigma=0$ не является полюсом для $\overline{w}_{\text{нечётн}}(\sigma,y)$).

Поэтому, чтобы выполнялись условия уходящей волны, контур интегрирования (действительная ось) должен обходить точку $\sigma=-\sigma_{\text{пj}}$ сверху, а точку $\sigma=\sigma_{\text{пj}}$ – снизу $(j=1,2)$ [2]. Далее вычислим интегралы (15)-(18) при $x<0$ с помощью метода контурного интеграла в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ с разрезами, указанными на фиг.1, при $|y|>h$ для чётной задачи получим:

$$w^0_{\text{чётн}}(x,y)=S_1(1+e^{2\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}h})e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}(|y|-h)}e^{i\sigma_{\text{п}1}|x|}-\frac{P}{8\pi}I_{11}(x,y)-\frac{P}{8\pi}I_{12}(x,y)$$

$$I_{11}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_1(\tau)}{N_1(\tau)}\cos(\sqrt{\tau^2+k^2}h)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\sigma$$

$$I_{12}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(\tau)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(\tau)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\sigma-$$

$$-\int_0^k\Psi_1(\sigma)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(|y|-h)}e^{i\sigma|x|}d\sigma-\int_0^k\Psi_2(\sigma)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(|y|-h)}e^{i\sigma|x|}d\sigma$$

$$\Phi_1(\tau)=\frac{2(1+æ)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}(1+e^{-2i\tau h})\cos\sqrt{\tau^2+k^2}h}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1+e^{-2i\tau h})-\tauæ(1+e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}-\frac{e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}(y_0-h)}}{\sqrt{\tau^2+k^2}} \quad (19)$$

$$\Phi_2(\tau)=\frac{2(1+æ)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}(1+e^{-2i\tau h})\cos\sqrt{\tau^2+k^2}h}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1+e^{-2i\tau h})+\tauæ(1+e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}-\frac{e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(y_0-h)}}{\sqrt{\tau^2+k^2}}$$

$$\Psi_1(\sigma)=\frac{2(1+æ)e^{\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0}(1+e^{-2\sigma h})\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}h}{(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1+e^{-2\sigma h})-\sigmaæ(1+e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))}-\frac{e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h)}}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}}$$

$$\Psi_2(\sigma)=\frac{2(1+æ)e^{-\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0}(1+e^{-2\sigma h})\cos\sqrt{k^2-\sigma^2}h}{(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1+e^{-2\sigma h})+\sigmaæ(1+e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))}-\frac{e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h)}}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}}$$

для нечётной задачи:

$$w^0_{\text{нечётн}}(x,y)=S_2(1+e^{2\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2-k^2}h})e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2-k^2}|y|}e^{i\sigma_{\text{п}2}|x|}-\frac{P}{8\pi}I_{21}(x,y)-\frac{P}{8\pi}I_{22}(x,y)$$

$$I_{11}(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{M_3(\tau)}{N_3(\tau)}\sin(\sqrt{\tau^2+k^2}h)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\sigma$$

$$I_{22}(x,y)=\int_0^\infty \Phi_1(\tau)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\sigma+\int_0^\infty \Phi_2(\tau)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}(|y|-h)}e^{-\tau|x|}d\sigma-$$

$$-\int_0^k \Psi_2(\sigma)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(|y|-h)}e^{i\sigma|x|}d\sigma-\int_0^k \Psi_1(\sigma)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(|y|-h)}e^{i\sigma|x|}d\sigma$$

где уже

$$\Phi_1(\tau)=\frac{2i(1+æ)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}(1-e^{-2i\tau h})\sin\sqrt{\tau^2+k^2}h}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{-2i\tau h})-\tau æ(1-e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}-\frac{e^{-i\sqrt{k^2+\tau^2}(y_0-h)}}{\sqrt{k^2-\tau^2}}$$

$$\Phi_2(\tau)=-\frac{2i(1+æ)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}(1-e^{-2i\tau h})\sin\sqrt{\tau^2+k^2}h}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{-2i\tau h})+\tau æ(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}-\frac{e^{i\sqrt{k^2+\tau^2}(y_0-h)}}{\sqrt{k^2-\tau^2}}$$

$$\Psi_1(\sigma)=\frac{2i(1+æ)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0}(1-e^{-2\sigma h})\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}}{(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1-e^{-2\sigma h})-\sigma æ(1-e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))}-\frac{e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h)}}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}}$$

$$\Psi_2(\sigma)=-\frac{2i(1+æ)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0}(1-e^{-2\sigma h})\sin\sqrt{k^2-\sigma^2}}{(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1-e^{-2\sigma h})+\sigma æ(1-e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))}-\frac{e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h)}}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}} \quad (20)$$

а при $|y|<h$

$$w_{\text{чётн}}(x,y)=S_1\operatorname{ch}(\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}\,y)e^{i\sigma_п|x|}-\frac{P}{4\pi}I_{31}(x,y)-\frac{P}{4\pi}I_{32}(x,y)$$

$$w_{\text{нечётн}}(x,y)=S_2\operatorname{sh}\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}\,ye^{i\sigma_п|x|}-\frac{P}{4\pi}I_{41}(x,y)-\frac{P}{4\pi}I_{42}(x,y),$$

$$I_{42}(x,y)=\int_0^\infty \frac{i(1+æ)(1-e^{-2i\tau h})e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}\sin(\sqrt{\tau^2+k^2}\,y)}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{-2i\tau h})-\tau æ(1-e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}e^{-\tau|x|}d\tau-$$

$$-\int_0^\infty \frac{i(1-e^{-2i\tau h})(1+æ)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}\sin(\sqrt{\tau^2+k^2}\,y)}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{-2i\tau h})+\tau æ(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}e^{-\tau|x|}d\tau-\int_0^k\frac{M_4(\sigma)}{N_4(\sigma)}e^{i\sigma|x|}d\tau$$

$$I_{32}(x,y)=\int_0^\infty \frac{(1+æ)(1+e^{-2i\tau h})e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}\cos(\sqrt{\tau^2+k^2}\,y)}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1+e^{-2i\tau h})-\tau æ(1+e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}e^{-\tau|x|}d\tau+$$

$$+\int_0^\infty \frac{(1+æ)(1+e^{-2i\tau h})e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}\cos(\sqrt{\tau^2+k^2}\,y)}{(1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1+e^{-2i\tau h})-\tau æ(1+e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})}e^{-\tau|x|}d\tau-\int_0^k\frac{M_2(\sigma)}{N_2(\sigma)}e^{i\sigma|x|}d\tau$$

где

$$I_{31}(x,y)=\int_0^\infty\frac{M_1(\tau)}{N_1(\tau)}\cos\sqrt{\tau^2+k^2}\,ye^{-\tau|x|}d\tau$$

$$I_{41}(x,y)=\int_0^\infty\frac{M_3(\tau)}{N_3(\tau)}\sin(\sqrt{\tau^2+k^2}\,y)e^{-\tau|x|}d\tau$$

$$M_1(\tau)=4\tau æ(1+æ)(1+e^{-2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})\cos^2(\tau h)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}$$

$$N_1(\tau)=(\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)(1+e^{2i\tau h})-\tauæ(1+e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))\times$$
$$\times(\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)(1+e^{-2i\tau h})+\tauæ(1+e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}}))$$
$$M_3(\tau)=-4ie^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})\tauæ\sin^2(\tau h)(1+æ)$$
$$N_3(\tau)=((1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{-2i\tau h})+\tauæ(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))\times$$
$$\times((1+æ)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{2i\tau h})-\tauæ(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))$$
$$M_4(\sigma)=[2i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)\sin(\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0)(1-e^{-2\sigma h})-$$
$$-4i\sigmaæ\sin(\sqrt{k^2-\sigma^2}h)\sin(\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h))](1-e^{-2\sigma h})\sin(\sqrt{k^2-\sigma^2}y)$$
$$N_4(\sigma)=(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1-e^{-2\sigma h})-\sigmaæ(1-e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))\times$$
$$\times(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1-e^{-2\sigma h})+\sigmaæ(1-e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))$$
$$N_2(\sigma)=(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1+e^{-2\sigma h})-\sigmaæ(1+e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))\times$$
$$\times(i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)(1+e^{-2\sigma h})+\sigmaæ(1+e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))$$
$$M_2(\sigma)=(1+æ)[2i(1+æ)\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+e^{-2\sigma h})\cos(\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0)-$$
$$-4i\sigmaæ\cos(\sqrt{k^2-\sigma^2}h)\sin(\sqrt{k^2-\sigma^2}(y_0-h))](1+e^{-2\sigma h})\cos(\sqrt{k^2-\sigma^2}y)$$
$$S_1=-\frac{Pi}{2}\frac{(1+æ)e^{-\sqrt{\sigma_{п1}{}^2-k^2}y_0}(1+e^{-2\sigma_{п1}h})}{K_1'(\sigma_{п1})}$$
$$S_2=\begin{cases}-\dfrac{Pi(1+æ)e^{-\sqrt{\sigma_{п2}{}^2-k^2}y_0}(1-e^{-2\sigma_{п2}h})}{2K_2'(\sigma_{п2})}, & kh>A\\ 0, & kh\le A\end{cases}$$
$$(\sigma_{п_1}{}^2-k^2)K_1'(\sigma_{п1})=(\sigma_{п_1}{}^2-k^2)\left.\frac{dK_1(\sigma)}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_{п1}}=(1+e^{-2h\sqrt{\sigma_{п1}{}^2-k^2}})k^2æ+$$
$$+2e^{-2h\sqrt{\sigma_{п1}{}^2-k^2}}hæ\sigma_{п1}{}^2\sqrt{\sigma_{п1}{}^2-k^2}-2h(1+æ)e^{-2h\sigma_{п1}}(\sigma_{п1}{}^2-k^2)^{3/2}$$
$$(\sigma_{п2}{}^2-k^2)K_2'(\sigma_{п2})=(\sigma_{п2}{}^2-k^2)\left.\frac{dK_2(\sigma)}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_{п2}}=(1-e^{-2h\sqrt{\sigma_{п2}{}^2-k^2}})k^2æ-$$
$$-2e^{-2h\sqrt{\sigma_{п2}{}^2-k^2}}hæ\sigma_{п2}{}^2\sqrt{\sigma_{п2}{}^2-k^2}+2h(1+æ)e^{-2h\sigma_{п2}}(\sigma_{п2}{}^2-k^2)^{3/2}$$

При получении представления $w(x,y)$ имелось в виду, что аналитическое продолжение функции $\phi(\sigma)=|\sigma|$ в комплексной плоскости α это $\phi(\alpha)=\alpha$ при $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, и $\phi(\alpha)=-\alpha$ при $\mathrm{Re}(\alpha)<0$. С такими разрезами в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ функции $K_j(\alpha)(j=1,2)$ не могут иметь чисто комплексных нулей. Поскольку, если $\alpha=\alpha_j\,(j=1,2)$ будут чисто комплексными нулями $K_j(\alpha)(j=1,2)$, находящимися в первой четверти, то, следовательно, $\alpha=\bar{\alpha}_j\,(j=1,2)$ также будут нулями $K_j(\alpha)(j=1,2)$ $(\overline{\sqrt{\alpha_j{}^2-k^2}}=\sqrt{\bar{\alpha}_j{}^2-k^2})$. А это означает, что $w(x,y)$ будет иметь составляющие в виде приходящей волны из $x\to+\infty$, что противоречит поставленной задаче. Нетрудно увидеть, что $\bar{w}(\alpha,y)$ на мнимой оси не имеет полюсов.

Отметим также, что в силу симметричности задачи по x, полученное представление $w(x,y)$ справедливо и при $x>0$.

Итак, получили представление $w(x,y)$ в виде суммы поверхностной волны и регулярных интегралов. Чтобы выявить влияние электродов на характер волнового поля в пьезоэлектрике, следует определить асимптотические формулы $w(x,y)$ в далёких точках. Для получения асимптотической формулы , когда $y>h$, при $kr\to\infty$ сделаем замену переменных

$(y-h)=r\sin\theta,\ x=r\cos\theta\,,\lambda_1=\sigma\left|\cos\theta\right|-\sqrt{k^2-\sigma^2}\,\sin\theta\,,$

$\lambda_2=\sigma\left|\cos\theta\right|+\sqrt{k^2-\sigma^2}\,\sin\theta$, следующими обозначениями:

$n_1(\tau)=i\sqrt{\tau^2+k^2}\,\sin\theta+\tau\left|\cos\theta\right|,\ \ n_2(\tau)=-i\sqrt{\tau^2+k^2}\,\sin\theta+\tau\left|\cos\theta\right|$

и используя метод, описанный в работах [3], [4], получим:

$$w_{\text{чётн}}(x,y)=2S_1\mathrm{ch}\left(h\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}\right)e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}r\left|\sin\theta\right|}e^{i\sigma_{\text{п}1}r\left|\cos\theta\right|}+b_{1\text{чётн}}\frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{\sqrt{kr}}-\tag{21}$$

$$-\frac{1}{16\sqrt{\pi}}(b_3+\frac{P}{\sqrt{2}}(\frac{4k((y_0-h)\sin\theta+ik(y_0-h)^2\cos^2\theta)-i}{2})e^{-ik(y_0-h)\sin\theta})\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{(kr)^{3/2}}-$$

$$-\frac{P}{4\pi}\frac{(1+e^{2ikh})æe^{iky_0}\cos kh}{(1+æ)\cos^2\theta}\frac{e^{ikr\sin\theta}}{\left(kr\right)^2}+O\left(\frac{1}{\left(kr\right)^{5/2}}\right)$$

при $kr\to\infty$

$$w_{\text{нечётн}}(x,y)=2S_2\mathrm{sh}\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2-k^2}\,he^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2-k^2}r\left|\sin\theta\right|}e^{i\sigma_{\text{п}2}r\left|\cos\theta\right|}+b_{1\text{нечётн}}\frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{\sqrt{kr}}-$$

$$-\frac{1}{16\sqrt{\pi}}(b_3+\frac{P}{\sqrt{2}}(\frac{4k((y_0-h)\sin\theta+ik(y_0-h)^2\cos^2\theta)-i}{2})e^{-ik(y_0-h)\sin\theta})\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{(kr)^{3/2}}+\tag{22}$$

$$+\frac{P}{2\pi}\frac{i(1-e^{2ikh})æ(1+æ)(kh)^2}{((1-e^{2ikh})æ+2ikh(1+æ))^2\cos^2\theta}e^{iky_0}\sin kh\frac{e^{ikr\sin\theta}}{(kr)^2}+O(\frac{1}{\left(kr\right)^{5/2}})$$

при $kr\to\infty$

где

$$b_{1\text{чётн}}=\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}(\frac{(1+æ)e^{ik\sin\theta y_0}(1+e^{-2ikh\sin\theta})\cos(kh\cos\theta)\sin\theta}{(1+æ)\sin\theta(1+e^{-2ikh\cos\theta})+iæ\cos\theta(1+e^{2ikh\sin\theta})}-\sin(k\sin\theta(y_0-h))$$

$$b_{1\text{нечётн}}=-\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}\left[\frac{i(1+æ)e^{k\sin\theta y_0}(1-e^{-2k\cos\theta h})\sin(kh\sin\theta)\sin\theta}{\sin\theta(1+æ)(1-e^{-2k\cos\theta h})+i\cos\thetaæ(1-e^{2ik\sin\theta h})}+\sin(k\sin\theta(y_0-h)\right]$$

$$b_3 = b_{31}\Psi_2(k|\cos\theta|) + b_{32}\left.\frac{d\Psi_2(\sigma)}{d\sigma}\right|_{\sigma=k|\cos(\theta)|} + b_{33}\left.\frac{d^2\Psi_2(\sigma)}{d\sigma^2}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|}$$

$$b_{31} = -\frac{3\sin\theta}{4\sqrt{2k}},\ b_{32} = -|\cos\theta|\sin\theta\frac{3\sqrt{2k}}{2},\ b_{33} = \frac{k^{3/2}\sin^3\theta}{\sqrt{2}}$$

где для $\Psi_2(\sigma)$ принимаются выражения (19) или (20) для нечётной или чётной задачи, соответственно.

Асимптотическая формула при $|kx| \to \infty$ для $w_{\text{нечётн}}(x,y)$, $|y| < h$ при $kh \neq A$ имеет вид:

$$w_{\text{нечётн}}(x,y) = S_2 \operatorname{sh}\sqrt{\sigma_{\text{п}2}{}^2 - k^2}\, y e^{i\sigma_{\text{п}2}|x|} -$$

$$-\frac{P}{2\sqrt{2}\pi}\frac{(1+æ)y_0(1-e^{-2kh}) - 2ækh(y_0-h)}{((1+æ)(1-e^{-2kh}) - 2khæ)^2}k^2(1-e^{-2kh})y\frac{e^{i(|kx|-\frac{\pi}{4})}}{|kx|^{3/2}} - \tag{23}$$

$$-\frac{P}{\pi}\frac{ie^{iky_0}(1-e^{2ikh})æk^2h^2\sin ky}{(2ikh(1+æ)+æ(1-e^{2ikh}))^2}\frac{1}{(kx)^2} + O(\frac{1}{|kx|^{5/2}})$$

а при $kh = A$

$$w_{\text{нечётн}}(x,y) = A_1\frac{P(1+æ)}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{i(|kx|+\pi/4)}}{\sqrt{|kx|}} + A_3\frac{P(1+æ)}{8\sqrt{\pi}}\frac{e^{i(|kx|-\pi/4)}}{|kx|^{3/2}} -$$

$$-\frac{P}{\pi}\frac{ie^{iky_0}(1-e^{2ikh})æk^2h^2\sin ky}{(2ikh(1+æ)+æ(1-e^{2ikh}))^2}\frac{1}{(kx)^2} + O(\frac{1}{|kx|^{5/2}})$$

$$A_2 = -y\sqrt{k}(2\sqrt{2}e^{-2kh}kh + (1-e^{-2kh})(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{3}\sqrt{2}k^2y^2))(-4(1-e^{-2kh})(1+æ)y_0 +$$

$$+8hkæ(y_0-h)) +$$

$$+\sqrt{2k}(1-e^{-2kh})y(-2y_0(1+æ)(1-e^{-2kh} + 4e^{-2kh}kh + \frac{2}{3}k^2y_0{}^2(1-e^{-2kh})) +$$

$$+4ækh(y_0-h)(3 + \frac{2}{3}k^2h^2 + \frac{2}{3}k^2(y_0-h)^2))$$

$$A_3 = \frac{1}{8h^4k^{3/2}æ^2}(-\frac{(e^{-2kh}(1+æ) - æ(1+\frac{4}{3}h^2k^2))^2}{2h^2k^3æ^2} + \frac{15+8h^2k^2}{6k})\frac{A_1}{2k^{3/2}} + \tag{24}$$

$$+\frac{1}{8h^4k^{3/2}æ^2}(\frac{A_1}{4k^{5/2}} + \frac{A_2}{2k})$$

$$A_1 = \frac{(1-e^{-2kh})y((1+æ)y_0(1-e^{-2kh}) - 2khæ(y_0-h))}{2\sqrt{2}k^2h^4æ^2}$$

для $w_{\text{чётн}}(x,y)$

$$w_{\text{чётн}}(x,y)=S_1\text{ch}(\sqrt{\sigma_{\text{п}1}{}^2-k^2}\,y)e^{i\sigma_{\text{п}1}|x|}-$$

$$-\frac{P}{8\sqrt{2\pi}}\frac{(1+æ)((1+æ)(1+e^{-2kh})-2kæ(y_0-h))(1+e^{-2kh})}{æ^2}\frac{e^{i(|kx|-\pi/4)}}{|kx|^{3/2}}+ \tag{25}$$

$$+\frac{P}{4\pi}\frac{1}{(kx)^2}\frac{æ(1+e^{2ikh})e^{iky_0}\cos ky}{(1+æ)}+O(\frac{1}{(kx)^{5/2}})$$

Отметим, что при отсутствии электродов $w(x,y)=w_{\text{ист}}(x,y)$. Тогда из формул (14), (23), (24), (25) следует, что наличие электродов приводит к появлению двух волн с волновыми числами $\sigma_{\text{п}1},\sigma_{\text{п}2}$ при $kh>A$, а при $kh\le A$ распространяется волна с волновым числом $\sigma_{\text{п}1}$, а также к появлению члена (последний в асимптотиках (23), (24), (25)), имеющий неволновой характер по x, кроме того, приводит к изменению поведения сдвиговой объемной волны при $|kx|\to\infty$, а при $kh=A$ поведение сдвиговой объемной волны не меняется.

Из асимптотических формул (14), (21), (22) следует, что наличие электродов при $kh>A$ приводит к появлению двух поверхностных волн с волновыми числами $\sigma_{\text{п}1},\sigma_{\text{п}2}$, а при $kh=A$ появляется только поверхностная волна с волновым числом $\sigma_{\text{п}1}$, а также к появлению волны – четвертый член в формулах (21), (22), распространяющийся по направлению луча с углом раствора θ со скоростью $c/\sin\theta$ (или распространяющийся по направлению y со скоростью c).

Считаю своим долгом выразить глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Э.Х. Григоряну за постановку задачи и постоянное внимание к моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Б.Нобл. Метод Винера–Хопфа. М.: Изд. ИЛ, 1962. 279 с.
3. Агаян К. Л., Григорян Э.Х. Излучение плоской сдвиговой волны упругого волновода в составное упругое пространство. // Изв. НАН Армении.Механика. 2007. Т.60. №3. С.23-37.
4. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №1.С.40-51.
5. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краях параллельных полубесконечных металлических слоев.// Изв. НАН Армении.Механика. 2005. Т.58. №3. С.16-28.

Синанян Самвел Суренович
ЕрНИИММ, Инженер-программист
e-mail: ssinanyan@mail.ru

Поступила в редакцию 27.03.2009