

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЭЛЕКТРОДЕ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ЩЕЛЬЮ

АГАЯН К.Л., ГРИГОРЯН Э.Х.

Ключевые слова: волновое поле, дифракция, пьезоэлектрическое пространство, функциональное уравнение, вычет, асимптотика.

Key words: wave field, diffraction, piezoelectric space, functional equation, residue, asymptotics

Կ.Լ. Աղայան, Է.Խ. Գրիգորյան

Մահրի հարթ էլեկտրառաձգական ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ էլեկտրոդի վրա ճեղքված պիեզոառաձգական տարածությունում

Դիտարկվում է պիեզոառաձգական միջավայր, որը բաղկացած է վակուումային շերտով (ճեղքով) բաժանված երկու միասնական 6mm դասի կիսատարածություններից: Ներքևի կիսատարածության եզրը ծածկված է կիսաանվերջ մետաղական շերտով (էլեկտրոդ): Ուսումնասիրվում է վերևի կիսատարածությունում տարածվող սահրի հարթ էլեկտրառաձգական ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը կիսաանվերջ էլեկտրոդի վրա: Կառուցված է խնդրի փակ լուծումը, որով տրվում է էլեկտրառաձգական ալիքային դաշտը պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածություններում և էլեկտրական պոտենցիալը վակուումային շերտում: Ստացված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք բնութագրում են առաձգական տեղափոխությունները պիեզոէլեկտրիկի հեռու կետերի շրջակայքերում: Այդ բանաձևերում առանձնացված գումարելիների տեսքով մտնում են ընկնող, անդրադարձող, մակերևութային (ճեղքային), անհամասեռ ծավալային ալիքները: Հաշվված է էլեկտրոդի ծայրակետի շրջակայքում էլեկտրական ինդուկցիայի ուժգնության գործակիցը:

Երկու մասնավոր դեպքերում (էլեկտրոդը բացակայում է; էլեկտրոդը անվերջ է) խնդրի լուծումը տրվում է տարրական ֆունկցիաներով:

K.L. Aghayan, E.Kh. Grigoryan

Diffraction of Shear Plane Electroelastic Wave on the Semi-Infinite Electrode in the Piezoelectric Space with Crack

A piezoelectric medium consisting of two equal piezoelectric semi-space of 6mm class separated by vacuum layer is considered. An edge of lower semi-space is covered with semi-infinite metal coat (electrode). The problem of diffraction of shear plane electroelastic wave on the semi-infinite electrode propagated on the upper semi-space is investigated. The problem closed solution expressing the wave electroelastic field in every piezoelectric space and the meaning of electric potential in vacuum layer is built. Asymptotic equations determining behaviour of elastic displacement at distant areas of piezoelectric are obtained. The given equations in the form of discrete components consist of falling, reflected, surface (crack), inhomogeneous and three-dimensional waves. The concentration factor of electrical induction near the edge of electrode is calculated. In two special cases the solution of the problem is obtained in elementary functions.

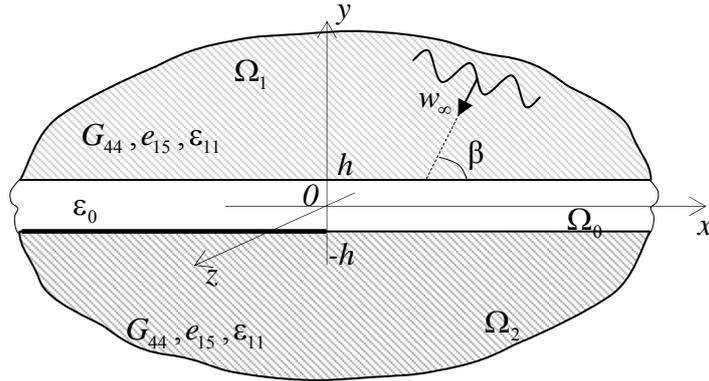
Рассматривается пьезоэлектрическая среда, состоящая из двух одинаковых пьезоэлектрических полупространств класса 6mm, разделённых вакуумным слоем (щель). Край нижнего полупространства покрыт полубесконечным металлическим покрытием (электрод). Исследуется задача о дифракции сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде, распространяющейся на верхнем полупространстве. Построено замкнутое решение задачи, представляющее волновое электроупругое поле в каждом пьезоэлектрическом пространстве и значение электрического потенциала в вакуумном слое. Получены асимптотические формулы, определяющие поведение упругих перемещений на дальних зонах пьезоэлектрика. В эти формулы в виде отдельных составляющих входят падающая, отражённая, поверхностные (щелевые), неоднородные и объёмные волны. Вычислен коэффициент концентрации электрической индукции около конца электрода. В двух частных случаях (электрод отсутствует; электрод бесконечный) решение задачи получено в элементарных функциях.

1. Рассмотрим пространство, состоящее из двух одинаковых пьезоэлектрических полупространств, разделенных вакуумным слоем толщиной $2h$. В декартовой системе координат $Oxyz$ полупространства занимают области $\Omega_1(|x| < \infty; y > h, |z| < \infty)$ и $\Omega_2(|x| < \infty; y < -h, |z| < \infty)$, а вакуумный слой – $\Omega_0(|x| < \infty; -h < y < h, |z| < \infty)$. Главные оси пьезоэлектрических полупространств (кристаллов) класса бтт гексагональной симметрии параллельны друг другу и оси Oz . Предполагается, что полуплоскость $x < 0$ границы нижнего полупространства покрыта тонким металлическим заземлённым слоем. Считая, что её жесткостью можно пренебречь, металлический слой рассматривается как электрод, занимающий полуплоскость $x < 0, y = -h, |z| < \infty$ (фиг.1).

В кристалле, занимающий область Ω_1 , распространяется падающая из бесконечности заданная сдвиговая плоская упругая волна $\bar{u} = (0; 0; u_z^{(\infty)}(x, y, t))$, поляризованная вдоль оси симметрии:

$$u_z^{(\infty)}(x, y, t) = w_\infty(x, y)e^{-i\omega t} = e^{-ik(x \cos \beta + y \sin \beta) - i\omega t} \quad (1.1)$$

где $w_\infty(x, y)$ – амплитуда, $\beta(0 < \beta < \pi/2)$ – угол скольжения падающей упругой волны, k – волновое число, ω – частота колебаний, t – время.



Фиг. 1

При этих предположениях требуется определить дифрагированное электроупругое поле в каждой области Ω_j ($j = 0, 1, 2$) пространства.

Единственное отличное от нуля упругое смещение $u_z^{(j)}(x, y, t)$ ($j = 1, 2$) и потенциал электрического поля $\varphi^{(j)}(x, y, t)$ ($j = 0, 1, 2$) в соответствующих областях Ω_j ищем в виде:

$$u_z^{(j)}(x, y, t) = w_j(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \varphi^{(j)}(x, y, t) = \varphi_j(x, y)e^{-i\omega t} \quad (1.2)$$

Тогда, в рамках квазистатической постановки задач для пьезоэлектрических тел [1] приходим к следующим краевым задачам относительно амплитуд из (1.2) (Δ – оператор Лапласа):

$$\begin{aligned} \Delta w_j(x, y) + k^2 w_j(x, y) &= 0, \\ \Delta \varphi_j(x, y) - (e_{15}/\epsilon_{11}) w_j(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (x, y) \in \Omega_j, \quad j = 1, 2 \quad (1.3)$$

$$\Delta\varphi_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0 \quad (1.4)$$

с граничными и контактными условиями

$$\begin{aligned} \tau_{yz}(x, \pm h) &= 0, \quad |x| < \infty \\ D_{1y}(x, h+0) &= D_{0y}(x, h-0), \quad \varphi_1(x, h+0) = \varphi_0(x, h-0), \quad |x| < \infty \\ \varphi_0(x, -h+0) &= \varphi_2(x, -h-0) = F_+(x), \quad -\infty < x < \infty \\ D_{0y}(x, -h+0) - D_{2y}(x, -h-0) &= \psi_-(x), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $F_+(x) = 0$ при $x < 0$ и $\psi_-(x) = 0$ при $x > 0$.

При этом, решение должно еще удовлетворять условию уходящей волны.

В (1.3)–(1.5) [1] e_{15} – пьезомодуль, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1/4\pi$ – диэлектрическая проницаемость, $v = \omega/k = \sqrt{c_{44}(1 + \chi_1^2)}/\rho$ – фазовая скорость распространения сдвиговой упругой волны, c_{44} – упругая постоянная (модуль сдвига), ρ – плотность среды, D_{jy} – нормальная компонента электрической индукции, $\chi_1^2 = e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$. Кроме того, имеют место соотношения [1]

$$\begin{aligned} D_{jy}(x, y) &= e_{15} \frac{\partial w_j}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}; \quad (j = 1, 2) \\ D_{0y}(x, y) &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \quad (\varepsilon_0 = 1); \quad \tau_{yz}(x, y) = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Перейдем к решению краевых задач (1.3)–(1.5). Введём функции

$$w_j(x, y) - w_\infty(x, y) = W_j(x, y), \quad \varphi_j(x, y) - \varphi_\infty(x, y) = \Phi_j(x, y) \quad (j = 1, 2) \quad (1.7)$$

$$\varphi_\infty(x, y) = (e_{15}/\varepsilon_{11})w_\infty(x, y) \quad (1.8)$$

Применим к (1.3)–(1.5) и (1.7) действительное интегральное преобразование Фурье по x . Тогда, имея в виду соотношения (1.6), приходим к уравнениям

$$\frac{d^2 \bar{W}_j(\sigma, y)}{dy^2} - \gamma^2 \bar{W}_j(\sigma, y) = 0, \quad j = 1, 2; \quad (-1)^{j-1} y > h \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_j(\sigma, y)}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_j(\sigma, y) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k^2 \bar{W}_j = 0, \quad j = 1, 2; \quad (-1)^{j-1} y > h \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_0(\sigma, y)}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\varphi}_0(\sigma, y) = 0, \quad -h < y < h \quad (1.11)$$

с условиями

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(\sigma, h) &= \bar{\varphi}_0(\sigma, h), \quad \bar{\varphi}_0(\sigma, -h) = \bar{\varphi}_2(\sigma, -h) = \bar{F}_+(\sigma) \\ \left(c_{44} \frac{d\bar{W}_j}{dy} + e_{15} \frac{d\bar{\varphi}_j}{dy} \right) \Big|_{y=(-1)^{j-1}h} &= 0, \quad (j = 1, 2) \\ \left(e_{15} \frac{d\bar{W}_j}{dy} - \varepsilon_{11} \frac{d\bar{\varphi}_j}{dy} + \varepsilon_0 \frac{d\bar{\varphi}_0}{dy} \right) \Big|_{y=(-1)^{j-1}h} &= \begin{cases} 0, & j = 1 \\ \bar{\psi}_-(\sigma), & j = 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\bar{f}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad \gamma^2 = \sigma^2 - k^2 \quad (1.13)$$

Решение уравнений (1.9) и (1.10), представляющие уходящие волны, имеют вид

$$\bar{W}_1(\sigma, y) = A_1 e^{-\gamma y}, \quad \bar{\Phi}_1(\sigma, y) = B_1 e^{-|\sigma|y} + (e_{15}/\varepsilon_{11}) \bar{W}_1(\sigma, y), \quad y > h, \quad (1.14)$$

$$\bar{W}_2(\sigma, y) = A_2 e^{\gamma y}, \quad \bar{\Phi}_2(\sigma, y) = B_2 e^{|\sigma|y} + (e_{15}/\varepsilon_{11}) \bar{W}_2(\sigma, y), \quad y < -h \quad (1.15)$$

а решение (1.11) –

$$\bar{\Phi}_0(\sigma, y) = A_0 \operatorname{ch}(\sigma y) + B_0(\sigma y), \quad -h < y < h \quad (1.16)$$

где $A_j(\sigma), B_j(\sigma)$ ($j = 0, 1, 2$) – неизвестные функции.

При этом, функция из (1.13) $\sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$ при $|\sigma| > k$, и $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$, т.е. действительная ось обходит точки ветвления функции $\sqrt{\alpha^2 - k^2}$ $\sigma = -k$ сверху, а $\sigma = k$ снизу [2].

Удовлетворяя при помощи (1.14)–(1.16) условиям (1.12), приходим к следующей задаче Римана на действительной оси:

$$c_0 |\sigma| \bar{K}(\sigma) \bar{F}_+(\sigma) + \bar{\Psi}_-(\sigma) = 2\pi c_1 \delta(\sigma - k \cos \beta) \quad (1.17)$$

где $\delta(x)$ – известная функция Дирака,

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{2}{1 + \varepsilon_{10}(1 + \chi_1^2)} \frac{\Delta_2(\sigma) \Delta_4(\sigma)}{\Delta_1(\sigma) \Delta_3(\sigma)} \quad (1.18)$$

$$c_0 = \varepsilon_0 + \varepsilon_{11}(1 + \chi_1^2), \quad \varepsilon_{10} = (\varepsilon_{01})^{-1} = \varepsilon_{11}/\varepsilon_0, \quad \chi = \chi_1^2 / (1 + \chi_1^2) \quad (1.19)$$

$$c_1 = 2e_{15} k \cos \beta e^{-ikh \sin \beta} / \Delta_3^*(k \cos \beta) \quad (1.19)$$

$$\Delta_1(\sigma) = \varepsilon_{01}(\gamma - \chi|\sigma|), \quad \Delta_2(\sigma) = \Delta_1(\sigma) + \gamma \operatorname{th}(h|\sigma|), \quad (1.20)$$

$$\Delta_3(\sigma) = (1 + \operatorname{th}^2(h|\sigma|)) \Delta_1(\sigma) + 2\gamma \operatorname{th}(h|\sigma|), \quad \Delta_4(\sigma) = \gamma + \Delta_1(\sigma) \operatorname{th}(h|\sigma|) \quad (1.20)$$

$$\Delta_3^*(\sigma) = (1 - \chi|\sigma|\gamma^{-1}) \operatorname{ch}(2h|\sigma|) + \varepsilon_{10} \operatorname{sh}(2h|\sigma|) \quad (1.21)$$

Следует отметить, что дисперсионные функции $\Delta_j(\sigma)$ ($j = \overline{1, 4}$) из (1.18) на действительной оси имеют по два корня $\pm \sigma_j$, которые расположены в порядке

$$0 < k < \sigma_4^* < \sigma_3^* < \sigma_2^* < \sigma_1^* < \infty \quad (1.22)$$

и других действительных корней не имеют [1, 11].

Следовательно, кроме отмеченного выше, предполагается, что в задаче Римана (1.17) действительная ось обходит точки $-\sigma_j^*$ сверху, а точки σ_j^* – снизу, что обеспечивает условие уходящей волны.

Неизвестные функции из (1.14)–(1.16) выражаются при помощи решения функционального уравнения (1.17) в виде

$$2 \operatorname{ch}(\sigma h) A_0 = (\varepsilon_{01} \gamma)^{-1} \Delta_1(\sigma) B_1 e^{-|\sigma|h} + \bar{F}_+(\sigma) + 2e_{15} \varepsilon_{11}^{-1} g^{(-)}(\sigma) \quad (1.23)$$

$$2 \operatorname{sh}(\sigma h) B_0 = (\varepsilon_{01} \gamma)^{-1} \Delta_1(\sigma) B_1 e^{-|\sigma|h} - \bar{F}_+(\sigma) + 2e_{15} \varepsilon_{11}^{-1} g^{(-)}(\sigma)$$

$$A_1 e^{-\gamma h} = -\chi \varepsilon_{11} (e_{15} \gamma)^{-1} |\sigma| B_1 e^{-|\sigma|h} + g^{(-)}(\sigma) \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned}
A_2 e^{-\gamma h} &= \frac{\chi \varepsilon_{11} |\sigma|}{e_{15} \gamma \operatorname{ch}(2h\sigma)} B_1 e^{-|\sigma| h} + \frac{\chi \varepsilon_0 \sigma \operatorname{th}(2h\sigma)}{e_{15} \gamma} \bar{F}_+(\sigma) + \frac{\chi}{e_{15} \gamma} \bar{\Psi}_-(\sigma) - g^{(+)}(\sigma) \\
B_2 e^{-|\sigma| h} &= \frac{1}{\operatorname{ch}(2\sigma h)} B_1 e^{-|\sigma| h} + \varepsilon_{01} \operatorname{th}(2h|\sigma|) \bar{F}_+(\sigma) - \frac{\bar{\Psi}_-(\sigma)}{\varepsilon_{11} |\sigma|} \\
B_1 e^{-|\sigma| h} &= \frac{\bar{F}_+(\sigma)}{\Delta_3^*(\sigma)} - \frac{2e_{15} \operatorname{ch}(2kh \cos \beta)}{\varepsilon_{11} \Delta_3^*(k \cos \beta)} g^{(+)}(\sigma) \tag{1.25}
\end{aligned}$$

$$g^{(\pm)}(\sigma) = 2\pi e^{\pm ikh \sin \beta} \delta(\sigma - k \cos \beta) \tag{1.26}$$

Таким образом, решение поставленной выше задачи свелось к решению функционального уравнения (1.17).

Перейдя к решению (1.17), заметим, что $\bar{K}(\sigma) \rightarrow 1$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$. Тогда имея в виду представления [3]:

$$\begin{aligned}
2\pi i \delta(\sigma - k \cos \beta) &= (\sigma - k \cos \beta - i0)^{-1} - (\sigma - k \cos \beta + i0)^{-1} \\
|\sigma| &= (\sigma - i0)^{1/2} (\sigma + i0)^{1/2} \tag{1.27}
\end{aligned}$$

решение уравнения (1.17) получим в виде [4–9]

$$\bar{F}_+(\sigma) = \frac{ic_1}{c_0 \sqrt{k \cos \beta} \bar{K}_-(k \cos \beta)} \frac{1}{\sqrt{\sigma + i0} (\sigma - k \cos \beta + i0) \bar{K}_+(\sigma)} \tag{1.28}$$

$$\bar{\Psi}_-(\sigma) = -\frac{ic_1 \sqrt{\sigma - i0} \bar{K}_-(\sigma)}{\sqrt{k \cos \beta} \bar{K}_-(k \cos \beta) (\sigma - k \cos \beta - i0)} \tag{1.29}$$

где $\bar{K}(\sigma) = \bar{K}_+(\sigma) \cdot \bar{K}_-(\sigma)$, $\bar{K}_+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im} \alpha > 0$, а $\bar{K}_-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im} \alpha < 0$, $\alpha = \sigma + i\tau$. При этом, $\bar{K}_\pm(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в своих областях регулярности и

$$\begin{aligned}
\bar{K}_\pm(\sigma) &= \exp(\bar{R}_\pm(\sigma)) \quad \bar{R}_+(\sigma) = \int_0^\infty R(x) e^{i(\sigma+i0)x} dx = \frac{1}{2} \ln[\bar{K}(\sigma)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\ln[\bar{K}(t)] dt}{t - \sigma} \\
\bar{R}_-(\sigma) &= \bar{R}_+(-\sigma), \quad R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \ln[\bar{K}(\sigma)] e^{-i\sigma x} d\sigma \tag{1.30}
\end{aligned}$$

2. Имея решение функционального уравнения (1.17) в виде (1.28) и (1.29), при помощи (1.23)–(1.26) и (1.14)–(1.16), после обратного преобразования Фурье, получим соответствующие формулы, определяющие дифрагированное электроупругое волновое поле в областях Ω_j ($j = 0, 1, 2$).

В области Ω_1 ($y \geq h$) амплитуды упругого перемещения $w_1(x, y)$ и потенциал $\Phi_1(x, y)$ определяются формулами:

$$w_1(x, y) = W_1^{(1)}(x, y) + w_\infty(x, y) + w_{\text{отр}}^{(1)}(x, y) \tag{2.1}$$

$$W_1^{(1)}(x, y) = -\frac{\chi \varepsilon_{11}}{2\pi e_{15}} \int_{-\infty}^\infty \frac{|\sigma| \bar{F}_+(\sigma) e^{-\gamma(y-h)} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\gamma \Delta_3^*(\sigma)} d\sigma \tag{2.2}$$

$$w_{\text{отр}}^{(1)}(x, y) = A_{\text{отр}}^{(1)} e^{ik(y-h) \sin \beta} e^{-ikx \cos \beta}$$

$$A_{\text{отр}}^{(1)} = \left[1 + \frac{2i\chi \operatorname{ctg} \beta}{1 - i\chi \operatorname{ctg} \beta + \varepsilon_{10} \operatorname{th}(2kh \cos \beta)} \right] e^{-ikh \sin \beta} \quad (2.3)$$

$$\varphi_1(x, y) = (e_{15}/\varepsilon_{11})w_1(x, y) + \Phi_1^{(1)}(x, y) + \varphi_{\text{нд}}^{(1)}(x, y) \quad (2.4)$$

$$\Phi_1^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{F}_+(\sigma) e^{-|\sigma|(y-h)} e^{-i\sigma x}}{\Delta_3^*(\sigma)} d\sigma \quad (2.5)$$

$$\varphi_{\text{нд}}^{(1)}(x, y) = \Phi_{\text{нд}}^{(1)} e^{-k(y-h)\cos \beta} e^{-ikx \cos \beta} \quad (2.6)$$

$$\Phi_{\text{нд}}^{(1)} = -\frac{2e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{e^{-ikh \sin \beta}}{1 - i\chi \operatorname{ctg} \beta + \varepsilon_{10} \operatorname{th}(2kh \cos \beta)}$$

В области Ω_0 для амплитуды $\varphi_0(x, y)$ получим:

$$\varphi_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{ch}(\sigma(y-h))}{\operatorname{ch}(2\sigma h)} - \frac{\chi|\sigma|}{\gamma} \frac{2 \operatorname{sh}(\sigma(y+h))}{\operatorname{sh}(4\sigma h)} \right] \bar{F}_+(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma + \varphi_0^{(1)}(x, y) \quad (2.7)$$

$$\varphi_0^{(1)}(x, y) = \frac{2e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left[1 - \frac{1 - i\chi \operatorname{ctg} \beta}{\Delta_3^*(k \cos \beta)} \operatorname{ch}(kh \cos \beta) \right] \frac{\operatorname{sh}((y+h)k \cos \beta)}{\operatorname{sh}(2kh \cos \beta)} e^{-ikh \sin \beta} e^{-ikx \cos \beta}$$

В области $\Omega_2 (y \leq -h)$ получим

$$w_2(x, y) = \frac{\chi \varepsilon_{11}}{2\pi e_{15}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sigma|}{\gamma} G(\sigma) \bar{F}_+(\sigma) e^{\gamma(h+y)} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (2.8)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w_2(x, y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) \bar{F}_+(\sigma) e^{|\sigma|(h+y)} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (2.9)$$

$$G(\sigma) = \frac{1}{\Delta_3^*(\sigma) \operatorname{ch}(2h\sigma)} + \varepsilon_{01} \operatorname{th}(2h|\sigma|) - \frac{c_0}{\varepsilon_{11}} \bar{K}(\sigma) \quad (2.10)$$

Таким образом, решение задачи, т.е. определение электроупругого волнового поля в составном электроупругом пространстве в каждой области $\Omega_j (j = 0, 1, 2)$ даётся формулами (2.1)–(2.10). В (2.1) $w_\infty(x, y)$, $w_{\text{отр}}^{(1)}(x, y)$ и $W_1^{(1)}(x, y)$ – амплитуды падающей, отраженной и дифрагированных волн упругого перемещения, соответственно, в области Ω_1 . В (2.4) $\varphi_{\text{нд}}^{(1)}(x, y)$ – амплитуда неоднородной (щелевой) [11] волны потенциала электрического поля в Ω_1 .

Очевидно, что для полного исследования характерных особенностей волнового поля в пьезоэлектрическом пространстве следует подробно исследовать интегральные составляющие, входящие в (2.1)–(2.9), представляющие дифрагированные волны в каждой области Ω_j . Однако, в связи с большим объемом задачи, в настоящей статье будут исследованы особенности волнового поля упругих перемещений и притом, только в области Ω_1 .

Прежде чем перейти к этим исследованиям, остановимся на двух частных случаях рассматриваемой задачи, представляющие самостоятельный интерес.

1) Полубесконечный электрод отсутствует, т.е. оба края щели свободны [1]. Тогда очевидно, что $\bar{\psi}_-(\sigma) = 0$ и из (1.5) и (1.17) следует, что в этом случае

$$\overline{\varphi}_2(\sigma, -h - 0) = \overline{F}_+(\sigma) = 2\pi c_1 \delta(\sigma - k \cos \beta) / c_0 k \cos \beta \overline{K}(k \cos \beta) \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в (2.1)–(2.10), получим формулы, представляющие электроупругое поле в Ω_j ($j = 0, 1, 2$):

$$\begin{aligned} & \text{В } \Omega_1 \quad (y \geq h) \text{ —} \\ & w_1(x, y) = w_\infty(x, y) + (A_{\text{отр}}^{(1)} + A_{\text{отр}}^{(2)}) e^{ik(y-h)\sin\beta - ikx\cos\beta} \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $A_{\text{отр}}^{(1)}$ дается при помощи (2.5), а

$$A_{\text{отр}}^{(2)} = -\frac{i\chi\Delta_\beta \operatorname{ctg}\beta e^{-ik\sin\beta h} [\operatorname{ch}(k \cos \beta h) + \Delta_\beta \operatorname{sh}(k \cos \beta h)]^{-1}}{\Delta_3^*(k \cos \beta) [\operatorname{sh}(k \cos \beta h) + \Delta_\beta \operatorname{ch}(k \cos \beta h)]} \quad (2.13)$$

$$\Delta_\beta = \varepsilon_{10}(1 - i\chi \operatorname{ctg}\beta)$$

$$\varphi_1(x, y) = (\varepsilon_{15}/\varepsilon_{11})w_1(x, y) + (\Phi_{\text{нд}}^{(1)} + \Phi_{\text{нд}}^{(2)}) e^{-k(y-h)\cos\beta} e^{-ikx\cos\beta} \quad (2.14)$$

где $\Phi_{\text{нд}}^{(1)}$ дается формулой (2.6), а

$$\Phi_{\text{нд}}^{(2)} = c_1/c_0 \Delta_3^*(k \cos \beta) k \cos \beta \overline{K}(k \cos \beta) \quad (2.15)$$

Отметим, что в (2.12) часть отраженной волны

$$w_{\text{отр}}^{(2)}(x, y) = A_{\text{отр}}^{(2)} e^{ik(y-h)\sin\beta - ikx\cos\beta} \quad (2.16)$$

обусловлена присутствием нижнего полупространства и исчезает при $h \rightarrow \infty$.

В Ω_0 ($-h \leq y \leq h$) —

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y) &= \frac{c_1}{c_0 k \cos \beta \overline{K}(k \cos \beta)} \times \\ & \times \left[\frac{\operatorname{ch}(k \cos \beta (y - h))}{\operatorname{ch}(2k \cos \beta h)} - i\chi \operatorname{ctg}\beta \frac{2 \operatorname{sh}(k \cos \beta (y + h))}{\operatorname{sh}(4k \cos \beta h)} \right] e^{-ik \cos \beta x} + \varphi_0^{(1)}(x, y) \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $\varphi_0^{(1)}(x, y)$ дается формулой (2.7).

В Ω_2 ($y \leq -h$) —

$$\begin{aligned} w_2(x, y) &= (-ic_1\chi\varepsilon_{11} \operatorname{ctg}\beta / c_0 k \cos \beta e_{15} \overline{K}(k \cos \beta)) G(k \cos \beta) e^{-ik \sin \beta (y+h)} e^{-ik \cos \beta x} \\ \varphi_2(x, y) &= \frac{\varepsilon_{11} w_2(x, y) c_1}{e_{15} c_0 k \cos \beta \overline{K}(k \cos \beta) G(k \cos \beta)} e^{-ik \sin \beta (y+h)} e^{-ik \cos \beta x} \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $G(\sigma)$ дается формулой (2.10).

II) Нижняя граница ($y = -h$) щели покрыта бесконечным электродом. Тогда $\overline{F}_+(\sigma) = 0$ и опять из (2.1)–(2.11) получим:

$$\begin{aligned} & \text{В } \Omega_1 \quad (y \geq h) \\ & w_1(x, y) = w_\infty(x, y) + w_{\text{отр}}^{(1)}(x, y) \end{aligned} \quad (2.19)$$

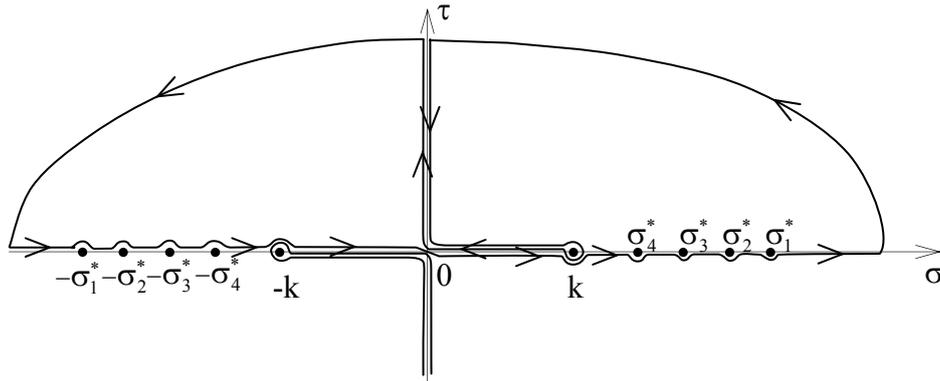
$$\begin{aligned} & \text{В } \Omega_0 \quad (-h \leq y \leq h) \\ & \varphi_0(x, y) = \varphi_0^{(1)}(x, y) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & \text{В } \Omega_2 \quad (y \leq -h) \\ & w_2(x, y) = \varphi_2(x, y) \equiv 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из (2.12) и (2.19) следует, что бесконечный электрод полностью (независимо от h) поглощает отраженную волну $w_{\text{отр}}^{(2)}(x, y)$ из (2.16).

3. Перейдем к исследованию волнового поля упругих перемещений в области Ω_1 , представляющей формулами (2.1)–(2.3). Для детального исследования интегрального составляющего (2.2) переходим на комплексную плоскость, разрезанную указанным на фиг.2 образом и преобразуем интегралы из (2.2) при помощи контурного интегрирования.

Сначала рассмотрим (2.2) в области $\Omega_1^{(1)} (x < 0, y > h)$. Для этой области путь интегрирования следует замыкать в верхней полуплоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ (фиг.2). Подынтегральная функция из (2.2) содержит $|\sigma|$ и в знаменателе $\Delta_3^*(\sigma)$. Аналитическое продолжение функции $\Delta_3^*(\sigma)$ из (1.21) $\Delta_3^*(\alpha)$ не имеет чисто мнимых корней. Оно не может иметь также комплексных корней в разрезанной плоскости (фиг.2), поскольку, если полагать, что в первой четверти $\alpha = \alpha_0$ является комплексным корнем $\Delta_3^*(\alpha)$, то тогда и $\bar{\alpha}_0$ будет корнем $\Delta_3^*(\alpha)$, так как в разрезанной плоскости (фиг.2) имеет место $\sqrt{\alpha^2 - k^2} = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - k^2}$. Но, тогда нетрудно убедиться, что поле перемещений будет иметь составляющую, приходящую из бесконечности [8].



Фиг.2

Таким образом, аналитическое продолжение подынтегральной функции из (2.2) внутри контура интегрирования (на верхней полуплоскости) имеет единственную особую точку $\sigma = \sigma_3^*$ (корни $\Delta_3(\sigma)$ и $\Delta_3^*(\sigma)$ одинаковы), где она имеет простой полюс.

Имея в виду эти замечания, по обычной процедуре контурного интегрирования из (2.2) для $W_1^{(1)}(x, y)$ в области $\Omega_1^{(1)}$ получим

$$W_1^{(1)}(x, y) = w_1^{(1)}(x, y) + w_{\text{пз}}^{(1)}(x, y) + w_{\text{пов}}^{(3)}(x, y) \quad (3.1)$$

$$w_1^{(1)}(x, y) = \frac{D_1^*}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau}}{\bar{K}_+(i\tau)} \left[M_{11}(\tau) e^{-i\sqrt{k^2 + \tau^2}(y-h)} + (M_{12}(\tau)) e^{i\sqrt{k^2 + \tau^2}(y-h)} \right] e^{-\tau|x|} d\tau +$$

$$+ \frac{D_1}{2\pi} \int_0^k \frac{\sqrt{\sigma}}{\bar{K}_+(\sigma)} \left[M_{14}(\sigma) e^{-i\sqrt{k^2 - \sigma^2}(y-h)} + M_{15}(\sigma) e^{i\sqrt{k^2 - \sigma^2}(y-h)} \right] \frac{e^{i\sigma x} d\sigma}{\sigma - k \cos \beta + i0} \quad (3.2)$$

$$w_{\text{пз}}^{(1)}(x, y) = \frac{D_1^*}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau}}{\bar{K}_+(i\tau)} M_{13}(\tau) e^{i\sqrt{k^2 + \tau^2}(y-h)} e^{-\tau|x|} d\tau \quad (3.3)$$

$$w_{\text{пов}}^{(3)}(x, y) = A_{\text{пов}}^{(3)} e^{-\gamma_3^*(y-h)} e^{i\sigma_3^*|x|}, \quad \gamma_3^* = \sqrt{(\sigma_3^*)^2 - k^2}$$

$$A_{\text{пов}}^{(3)} = \frac{D_1 \sqrt{\sigma_3^*} [\bar{K}_+(\sigma_3^*)]^{-1}}{\gamma_3^* (\sigma_3^* - k \cos \beta) \text{ch}(2\sigma_3^* h)} \left[\frac{\varepsilon_{01} \chi k^2}{(\gamma_3^*)^{3/2}} + \frac{2h}{\text{ch}^2(2\sigma_3^* h)} \right]^{-1}, \quad (3.4)$$

$$M_{11}(\tau) = \left[d^+(i\tau) \sqrt{k^2 + \tau^2} - \chi \tau \cos(2h\tau) (i\tau - k \cos \beta) \right]^{-1}$$

$$M_{12}(\tau) = \left[d^+(i\tau) \sqrt{k^2 + \tau^2} + \chi \tau \cos(2h\tau) (i\tau - k \cos \beta) \right]^{-1} \quad (3.5)$$

$$M_{13}(\tau) = \frac{-2\sqrt{k^2 + \tau^2} \cos(2h\tau) \cdot (i\tau - k \cos \beta)^{-1}}{\left[d^-(i\tau) \sqrt{k^2 + \tau^2} - \chi \tau \cos(2h\tau) \right] \left[d^+(i\tau) \sqrt{k^2 + \tau^2} + \chi \tau \cos(2h\tau) \right]}$$

$$M_{14}(\sigma) = \left[d^+(\sigma) \sqrt{k^2 - \sigma^2} + i\chi \sigma \text{ch}(2h\sigma) \right]^{-1}, \quad d^\pm(\sigma) = \text{ch}(2h\sigma) \pm \varepsilon_{10} \text{sh}(2h\sigma)$$

$$M_{15}(\sigma) = \left[d^-(\sigma) \sqrt{k^2 - \sigma^2} - i\chi \sigma \text{ch}(2h\sigma) \right]^{-1} \quad (3.6)$$

$$D_1 = \frac{2\chi \sqrt{k \cos \beta}}{1 + \varepsilon_{01} + \chi_1^2} \frac{e^{-ikh \sin \beta}}{\bar{K}_-(k \cos \beta) \Delta_3^*(k \cos \beta)}, \quad D_1^* = D_1 e^{-i\pi/4} \quad (3.7)$$

В (3.1) $w_{\text{пов}}^{(3)}(x, y)$ – вычет подынтегральной функции в точке $\alpha = \sigma_3^*$ – амплитуда поверхностной волны, $w_{\text{пз}}^{(1)}(x, y)$ – амплитуда упругих перемещений, обусловленная чисто пьезоэффектом.

Подставляя (3.1) в (2.1), получим выражение для амплитуды упругого перемещения в области $\Omega_1^{(1)}(x < 0, y > h)$, представленное в виде суммы падающей ($w_\infty(x, y)$), отраженной ($w_{\text{отр}}(x, y)$), поверхностной ($w_{\text{пов}}^{(3)}(x, y)$) волны и регулярных интегралов из (3.2), (3.3).

Для более детального изучения влияния полубесконечного электрода на характер распределения волнового поля в рассматриваемой области пьезоэлектрика следует исследовать поведение интегральных слагаемых, входящих в (3.2) и (3.3), на дальних зонах, т.е. получить асимптотическое представление волнового поля, обусловленное $w_1^{(1)}(x, y)$ при $r = \sqrt{x^2 + (y-h)^2} \rightarrow \infty$.

Рассмотрим (3.2). Перейдем к полярным координатам

$$x = r \cos \theta, \quad y - h = r \sin \theta, \quad \pi/2 < \theta < \pi \quad (3.8)$$

и сделаем в (3.2) замену переменных [8]

$$\lambda_1(\sigma) = \sigma |\cos \theta| - \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta, \quad \lambda_2(\sigma) = \sigma |\cos \theta| + \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta \quad (3.9)$$

Тогда имея в виду, что $\lambda_2'(\sigma) > 0$ при $0 < \sigma < k |\cos \theta|$, $\lambda_2'(\sigma) < 0$ при $k |\cos \theta| < \sigma < k$, а $\lambda_1'(\sigma) > 0$ при $0 < \sigma < k$, из (3.2) будем иметь:

а) при $\pi - \beta < \theta < \pi$ ($\cos(\pi - \theta) > \cos \beta$)

$$w_1^{(1)}(r, \theta) = \sum_{j=1}^3 Q_j(r, \theta) + Q_4^+(r, \theta) \quad (3.10)$$

$$Q_1(r, \theta) = \frac{D_1^*}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau}}{\bar{K}_+(i\tau)} \left[M_{11}(\tau) e^{-m_1} + M_{12}(\tau) e^{-m_2} \right] d\tau$$

$$\begin{aligned}
Q_2(r, \theta) &= \frac{D_1}{2\pi} \int_{-k \sin \theta}^{k|\cos \theta|} \frac{\sqrt{\sigma_1(\lambda_1)} M_{14}(\sigma_1) \cdot e^{i\lambda_1 r}}{\overline{K}_+(\sigma_1)(\sigma_1 - k \cos \beta + i0)} \frac{d\sigma_1}{d\lambda_1} d\lambda_1 \\
Q_3(r, \theta) &= \frac{D_1}{2\pi} \int_{k \sin \theta}^k \frac{\sqrt{\sigma_2(\lambda_2)} M_{15}(\sigma_2) \cdot e^{i\lambda_2 r}}{\overline{K}_+(\sigma_2)(\sigma_2 - k \cos \beta + i0)} \frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} d\lambda_2 \\
Q_4^+(r, \theta) &= -\frac{D_1}{2\pi} \int_{k|\cos \theta|}^k \frac{\sqrt{\sigma_1(\lambda_2)} M_{15}(\sigma_1) e^{i\lambda_2 r}}{\overline{K}_+(\sigma_1)(\sigma_1 - k \cos \beta + i0)} \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} d\lambda_2
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$\sigma_1(\lambda_j) = \lambda_j |\cos \theta| + \sqrt{k^2 - \lambda_j^2} \sin \theta, \quad j = 1, 2 \tag{3.12}$$

$$\sigma_2(\lambda_2) = \lambda_2 |\cos \theta| - \sqrt{k^2 - \lambda_2^2} \sin \theta$$

$$n_1(\tau) = \tau |\cos \theta| + i\sqrt{k^2 + \tau^2} \sin \theta, \quad n_2 = \tau |\cos \theta| - i\sqrt{k^2 + \tau^2} \sin \theta$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} = -\frac{\sqrt{k^2 - \sigma_1^2}}{\sqrt{k^2 - \lambda_2^2}}, \quad \frac{d\sigma_j}{d\lambda_j} = \frac{\sqrt{k^2 - \sigma_j^2}}{\sqrt{k^2 - \lambda_j^2}}, \quad (j = 1, 2) \tag{3.13}$$

Отметим, что при $\pi - \beta < \theta < \pi$ уравнения

$$\sigma_1(\lambda_1) - k \cos \beta = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta = 0 \tag{3.14}$$

имеют, соответственно, корни $\lambda_{11} = -k \cos(\theta - \beta)$, $\lambda_{22} = -k \cos(\theta + \beta)$, принадлежащие, соответственно, интервалам $(-k \sin \theta, k|\cos \theta|)$ и $(k \sin \theta, k)$. При этом,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_1(\lambda_1) - k \cos \beta + i0} &= \frac{C_{-1}^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_{11} + i0} + C_0^{(1)} + C_1^{(1)}(\lambda_1 - \lambda_{11}) + \dots \\
\frac{1}{\sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta + i0} &= \frac{C_{-1}^{(2)}}{\lambda_2 - \lambda_{22} + i0} + C_0^{(2)} + C_1^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_{22}) + \dots
\end{aligned} \tag{3.15}$$

где $C_0^{(1)}, C_1^{(1)}, \dots, C_0^{(2)}, C_1^{(2)}, \dots$ — постоянные, а

$$C_{-1}^{(1)} = \left((d\sigma_1/d\lambda_1)_{\lambda_1=\lambda_{11}} \right)^{-1} = \sin(\theta - \beta)/\sin \beta,$$

$$C_{-1}^{(2)} = \left((d\sigma_2/d\lambda_2)_{\lambda_2=\lambda_{22}} \right)^{-1} = -\sin(\theta + \beta)/\sin \beta$$

б) при $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$ ($\cos(\pi - \theta) < \cos \beta$)

$$w_1^{(1)}(r, \theta) = \sum_{j=1}^3 Q_j(r, \theta) + Q_4^-(r, \theta) + w_{\text{отр}}^{(2)}(r, \theta) \tag{3.16}$$

где $Q_j(r, \theta)$ ($j = 1, 2, 3$) даются формулой (3.11), а

$$Q_4^-(r, \theta) = -\frac{D_1}{2\pi} \int_{k|\cos \theta|}^k \frac{\sqrt{\sigma_1(\lambda_2)} M_{15}(\sigma_1) e^{i\lambda_2 r}}{\overline{K}_+(\sigma_1)(\sigma_1 - k \cos \beta - i0)} \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} d\lambda_2 \tag{3.17}$$

Отметим, что при получении (3.16) было использовано представление (1.27). В этом случае в интервале $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$ уравнения

$$\sigma_1(\lambda_2) - k \cos \beta = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta = 0 \quad (3.18)$$

имеют, соответственно, корни $\lambda_{12} = -k \cos(\theta + \beta)$ и $\lambda_{22} = -k \cos(\theta + \beta)$ в интервалах $(k|\cos \theta|, k)$ и $(k \sin \theta, k)$. При этом,

$$\frac{1}{\sigma_1(\lambda_2) - k \cos \beta - i0} = \frac{B_{-1}^{(1)}}{\lambda_2 - \lambda_{12} + i0} + B_0^{(1)} + B_1^{(1)}(\lambda_2 - \lambda_{12}) + \dots \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{\sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta + i0} = \frac{B_{-1}^{(2)}}{\lambda_2 - \lambda_{22} + i0} + B_0^{(2)} + B_1^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_{22}) + \dots$$

где $B_0^{(1)}, B_1^{(1)}, \dots, B_0^{(2)}, B_1^{(2)}, \dots$ – постоянные, а

$$B_{-1}^{(1)} = \left(\left. \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} \right|_{\lambda_2=\lambda_{12}} \right)^{-1} = \sin(\theta + \beta) / \sin \beta,$$

$$B_{-1}^{(2)} = \left(\left. \frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} \right|_{\lambda_2=\lambda_{22}} \right)^{-1} = -\sin(\theta + \beta) / \sin(2\theta + \beta),$$

в) при $\theta = \pi - \beta$ из (3.2) получим

$$w_{\pi-\beta}^{(1)}(r) \equiv w_1^{(1)}(r, \pi - \beta) = Q_1(r, \pi - \beta) + Q_2(r, \pi - \beta) + Q_{15}(r) \quad (3.20)$$

$$Q_{15}(r) = \frac{D_1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{k \cos \beta}^{k-\varepsilon} \Phi_{15}^{(1)}(\sigma_1) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \int_{k \sin \beta}^{k-\varepsilon} \Phi_{15}^{(2)}(\sigma_2) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \right. \\ \left. - \int_{C'_\varepsilon} \Phi_{15}^{(1)}(\sigma_1(\zeta)) e^{i\zeta r} d\zeta - \int_{C''_\varepsilon} \Phi_{15}^{(2)}(\sigma_2(\zeta)) e^{i\zeta r} d\zeta \right\} \quad (3.21)$$

$$\Phi_{15}^{(j)}(\sigma_j) = \left[\frac{\sqrt{\sigma_j(\lambda_2)} M_{15}(\sigma_j)}{\bar{K}_+(\sigma_j)(\sigma_j(\lambda_2) - k \cos \beta + i0)} \frac{d\sigma_j}{d\lambda_2} \right]_{\theta=\pi-\beta} = \\ = \frac{\sqrt{\sigma_j} \sqrt{k^2 - \sigma_j^2} M_{15}(\sigma_j)}{\bar{K}_+(\sigma_j) \left[(k + \lambda_2) \sin \beta + (-1)^j \sqrt{k^2 - \lambda_2^2} \cos \beta \right] (k - \lambda_2)} \quad j=1,2$$

где C'_ε и C''_ε – полуокружности с радиусом ε и с центром в точке $\alpha = k$, обходящие по часовой стрелке.

Таким образом, дифрагированное поле упругого перемещения в области $\Omega_1^{(1)}(x < 0, y > h)$ определяется формулами (3.10), (3.16) и (3.20) при указанных выше значениях θ , соответственно.

Перейдем к определению асимптотических формул для $w_1^{(1)}(x, y)$ в области $\Omega_1^{(1)}(x < 0, y > h)$. Эти формулы будут получены из интегралов, входящих в (3.10), (3.16) и (3.20), интегрируя их по частям [8, 12]. Для этого, нам необходимо иметь разложения подынтегральных функций около точек $\tau = 0$, $\lambda_1 = -k \sin \theta$, $\lambda_2 = k \sin \theta$ и $\lambda_2 = k$.

Рассмотрим сначала $\bar{K}_+(\sigma)$. Из (1.30) имеем

$$\bar{R}(\sigma) = \bar{R}_+(\sigma) + \bar{R}_-(\sigma) = \ln \bar{K}(\sigma) \quad (3.22)$$

где $\bar{K}(\sigma)$ дается (1.18). Следовательно, для малых $|\sigma|$ получим

$$\bar{R}(\sigma) = d_0 + d_1|\sigma| + O(|\sigma|^2), \quad |\sigma| \rightarrow 0 \quad (3.23)$$

где $d_0 = \ln(2/1 + \chi_1^2 + \varepsilon_{01})$, $d_1 = (\varepsilon_{01}^2 - 1)\varepsilon_0^{-1} + i\chi(kh)^{-1}$

Тогда при помощи известного представления [3]

$$|\sigma| = \frac{\sigma}{\pi i} \ln(\sigma - i0) - \frac{\sigma}{\pi i} \ln(\sigma + i0) + \sigma \quad (3.24)$$

из (3.23) получим, что при $\sigma \rightarrow 0$

$$\bar{R}_+(\sigma) = \frac{1}{2}d_0 - d_1 \frac{\sigma}{\pi i} \left[\ln(\sigma + i0) - \frac{i\pi}{2} \right] + C_1\sigma + O(\sigma^2), \quad \bar{R}_-(\sigma) = \bar{R}_+(-\sigma) \quad (3.25)$$

где C_1 – постоянная.

Теперь имея в виду формулу

$$\bar{K}_+(\sigma) = e^{\bar{R}_+(0)} \left[1 + \frac{\bar{R}_+(\sigma) - R_+(0)}{1!} + \frac{(\bar{R}_+(\sigma) - R_+(0))^2}{2!} + \dots \right] \quad (3.26)$$

вытекающую из (1.18), при помощи (3.25) и (3.26) получим следующее разложение для $\bar{K}_+(\sigma)$, при $\sigma \rightarrow 0$:

$$\bar{K}_+(\sigma) = a_0 [1 + a_1\sigma \ln(\sigma + i0)] + (C_1 - i\pi a_1/2)\sigma + O(\sigma^2(1 + \ln \sigma + \ln^2 \sigma)) \quad (3.27)$$

$$a_0 = \sqrt{2/(1 + \chi_1^2 + \varepsilon_{01})}, \quad a_1 = \frac{i}{\pi} \left(\frac{\varepsilon_{01}^2 - 1}{\varepsilon_{01}} + i \frac{\chi}{kh} \right) \quad (3.28)$$

Введем обозначения:

$$T_{1j}(\tau) = \frac{\sqrt{\tau}}{\bar{K}_+(i\tau)} M_{1j}(\tau), \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.29)$$

$$T_{1j}(\sigma) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\bar{K}_+(\sigma)} \frac{M_{1j}(\sigma)}{\sigma - k \cos \beta + i0}, \quad j = 4, 5$$

Теперь имея (3.27), для функции T_{1j} из (3.29) получим следующие разложения:

при $\lambda_1 \rightarrow -k \sin \theta$

$$T_{1j}(\tau) - N_{1j}^{(0)}(\tau) = O(\tau^{5/2}(1 + \ln \tau + \ln^2 \tau)), \quad i = 1, 2, 3, \quad \tau \rightarrow 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\lambda_1} T_{14}(\sigma_1(\lambda_1)) - N_{14}^{(0)}(\lambda_1^*) = O((\lambda_1^*)^{5/2}(1 + \ln \lambda_1^* + \ln^2 \lambda_1^*)), \quad \lambda_1^* = \lambda_1 + k \sin \theta \quad (3.31)$$

при $\lambda_2 \rightarrow k \sin \theta$

$$\frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} T_{15}(\sigma_2(\lambda_2)) - N_{15}^{(0)}(\lambda_2^*) = O((\lambda_2^*)^{5/2}(1 + \ln \lambda_2^* + \ln^2 \lambda_2^*)), \quad \lambda_2^* = \lambda_2 - k \sin \theta \quad (3.32)$$

$$N_{1j}^{(0)}(\tau) = A_{1j}^{(1)}(\tau)^{1/2} + A_{1j}^{(2)}(\tau)^{3/2} \ln(\tau) + A_{1j}^{(3)}(\tau)^{3/2}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.33)$$

$$N_{14}^{(0)}(\lambda_2^*) = A_{14}^{(1)}(\lambda_2^*)^{1/2} + A_{14}^{(2)}(\lambda_2^*)^{3/2} \ln(\lambda_2^*) + A_{14}^{(3)}(\lambda_2^*)^{3/2} \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.34)$$

$$N_{15}^{(0)}(\lambda_2^*) = A_{15}^{(1)}(\lambda_2^*)^{1/2} + A_{15}^{(2)}(\lambda_2^*)^{3/2} \ln(\lambda_2^*) + A_{15}^{(3)}(\lambda_2^*)^{5/2} \quad (3.35)$$

где $A_{1j}^{(3)}$ ($j = \overline{1,5}$) – постоянные, а

$$A_{11}^{(1)} = A_{12}^{(1)} = -A_{13}^{(1)}/2 = -1/k^2 a_0 \cos \beta, \quad A_{1j}^{(2)} = -ia_1 A_{1j}^{(1)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.36)$$

$$A_{14}^{(1)} = A_{15}^{(1)} = -1/k^2 a_0 |\cos \theta|^{3/2} \cos \beta, \quad A_{14}^{(2)} = A_{15}^{(2)} = -ia_1 A_{14}^{(1)}, \quad (3.37)$$

С другой стороны, в окрестности точки $\lambda_2 = k$ имеют место разложения

$$T_{15}(\sigma_1(\lambda_2)) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} - T_1^{(k)}(\lambda_2) = O((k - \lambda_2)^{5/2}) \text{ при } \lambda_2 \rightarrow k \quad (3.38)$$

$$T_{15}(\sigma_2(\lambda_2)) \frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} - T_2^{(k)}(\lambda_2) = O((k - \lambda_2)^{5/2}) \text{ при } \lambda_2 \rightarrow k \quad (3.39)$$

$$T_1^{(k)}(\lambda_2) = \sum_{n=0}^5 (-1)^{n-1} b_{n-1} (k - \lambda_2)^{(n-1)/2}, \quad T_2^{(k)}(\lambda_2) = \sum_{n=0}^5 b_{n-1} (k - \lambda_2)^{(n-1)/2} \quad (3.40)$$

$$b_{-1} = \sqrt{k/2} \sin \theta T_{15}(k|\cos \theta) = \frac{\sqrt{2|\cos \theta|} \sin \theta [\bar{K}_+(k|\cos \theta)]^{-1}}{2k [2e^{2kh|\cos \theta|} \sin \theta - i\chi|\cos \theta|]} \frac{1}{(|\cos \theta| - \cos \beta)}$$

$$b_0 = \left[|\cos \theta| T_{15}(\sigma) - k^2 \sin^2 \theta \frac{dT_{15}}{d\sigma} \right]_{\sigma=k|\cos \theta|}$$

$$b_1 = -\frac{3 \sin \theta}{4\sqrt{2k}} T_{15}(k|\cos \theta) - \frac{3\sqrt{2k}}{2} \sin \theta |\cos \theta| \left. \frac{dT_{15}}{d\sigma} \right|_{\sigma=k|\cos \theta|} + k \sqrt{\frac{k}{2}} \sin^3 \theta \left. \frac{d^2 T_{15}}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=k|\cos \theta|}$$

$$b_2 = \left[-\cos 2\theta \frac{dT_{15}}{d\sigma} + 2k \sin^2 \theta |\cos \theta| \frac{d^2 T_{15}}{d\sigma^2} - \frac{k^2}{3} \sin^4 \theta \frac{d^3 T_{15}}{d\sigma^3} \right]_{\sigma=k|\cos \theta|}$$

$$b_3 = -\frac{5 \sin \theta}{4\sqrt{2k}} \left[-\frac{1}{8k} T_{15}(\sigma) + |\cos \theta| \frac{dT_{15}}{d\sigma} + k(\cos^2 \theta + \cos 2\theta) \frac{d^2 T_{15}}{d\sigma^2} - \frac{4k^2}{3} \sin^2 \theta |\cos \theta| \frac{d^3 T_{15}}{d\sigma^3} \right]_{\sigma=k|\cos \theta|} \quad (3.41)$$

$$b_4 = \left[-\frac{\sin^2 \theta}{32k} \frac{dT_{15}}{d\sigma} + \frac{1 - 4 \sin^2 \theta}{2} |\cos \theta| \frac{d^2 T_{15}}{d\sigma^2} - \frac{k \sin^2 \theta}{2} (1 - 4 \cos^2 \theta) \frac{d^3 T_{15}}{d\sigma^3} \right]_{\sigma=k|\cos \theta|}$$

Теперь, имея полученные разложения, $w_1^{(1)}(r, \theta)$ из (3.10) представим в виде

$$w_1^{(1)}(r, \theta) = I_{11}(r, \theta) + I_{12}(r, \theta) + q_1(r, \theta) \quad (3.42)$$

$$I_{11}(r, \theta) = \frac{D_1^*}{2\pi} \int_0^\infty \left[\left[T_{11}(\tau) e^{-ir\sqrt{k^2 + \tau^2} \sin \theta} - N_{11}^{(0)}(\tau) e^{-ikr \sin \theta} \right] + \left[T_{12}(\tau) e^{ir\sqrt{k^2 + \tau^2} \sin \theta} - N_{12}^{(0)}(\tau) e^{ikr \sin \theta} \right] \right] e^{-\tau r |\cos \theta|} d\tau \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
I_{12}(r, \theta) = & \frac{D_1}{2\pi} \left\{ \int_{-k \sin \theta}^{k|\cos \theta|} \left[T_{14}(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_1} - N_{14}^{(0)}(\lambda_1) \right] e^{i\lambda_1 r} d\lambda_1 - \int_{k|\cos \theta|}^{\infty} N_{14}^{(0)}(\lambda_1) e^{i\lambda_1 r} d\lambda_1 - \right. \\
& - \int_{k|\cos \theta|}^k \left[T_{15}(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} - T_1^{(k)}(\lambda_2) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \int_k^{\infty} N_{15}^{(0)}(\lambda_2) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \\
& + \int_{k \sin \theta}^k \left[T_{15}(\sigma_1) \frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} - T_2^{(k)}(\lambda_2) - N_{15}^{(0)}(\lambda_2) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \\
& \left. - \int_{-\infty}^k T_2^{(k)}(\lambda_2) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \int_{-\infty}^{k|\cos \theta|} T_1^{(k)}(\lambda_2) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \right\} + q_1^{(1)}(r, \theta)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$q_1^{(1)}(r, \theta) = \frac{D_1}{\sqrt{\pi}} \left[b_{-1} \frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{r^{1/2}} - b_1 \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{r^{3/2}} + b_3 \frac{3e^{i(kr+\pi/4)}}{4r^{5/2}} \right] \tag{3.45}$$

Здесь $N_j^{(0)}(\tau)$ ($j=1,2,4,5$) и $T_j^{(k)}(\lambda_2)$ ($j=1,2$) даются формулами (3.33)–(3.35) и (3.40), соответственно, а b_j – (3.41).

Следует отметить, что при получении (3.42) имелись в виду равенства

$$\begin{aligned}
\int_{-k \sin \theta}^{\infty} N_{14}^{(0)}(\lambda_1) e^{i\lambda_1 r} d\lambda_1 &= e^{-i\pi/4} \int_0^{\infty} N_{11}^{(0)}(\tau) e^{-\tau r |\cos \theta|} d\tau = J_1 \\
\int_{k \sin \theta}^{\infty} N_{15}^{(0)}(\lambda_2) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 &= e^{-i\pi/4} \int_0^{\infty} N_{12}^{(0)}(\tau) e^{-\tau r} d\tau = J_2
\end{aligned} \tag{3.46}$$

вытекающие из (3.32)–(3.37). При этом [13],

$$\begin{aligned}
J_j &= \frac{\sqrt{\pi} e^{-i\pi/4}}{2|r \cos \theta|^{3/2}} \left[A_{1j}^{(1)} + \frac{3}{r|\cos \theta|} \left(\frac{4}{3} A_{1j}^{(2)} + \frac{3}{2} A_{1j}^{(3)} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{3}{2r|\cos \theta|} A_{12}^{(2)} (C + \ln 4r|\cos \theta|) \right] \quad j=1,2
\end{aligned}$$

где $C = 0,5772\dots$ – постоянная Эйлера.

Имея в виду (3.30)–(3.32), нетрудно убедиться, что при $\tau \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
T_{11}(\tau) e^{-ir\sqrt{k^2+\tau^2} \sin \theta} - N_{11}^{(0)}(\tau) e^{-ikr \sin \theta} &= \\
= \tau^{5/2} e^{-ikr \sin \theta} \left[A_{11}^{(4)} (1 + \ln \tau + \ln^2 \tau) - \frac{ikr \sin \theta}{2k} A_{11}^{(1)} \right]
\end{aligned} \tag{3.47}$$

где $A_{11}^{(4)}$ – постоянная.

Аналогичная оценка имеет место и для второго слагаемого подынтегрального выражения $I_{11}(r, \theta)$.

Теперь при помощи (3.47) и (3.43) по свойству преобразования Лапласа получим, что при $r \rightarrow \infty$

$$I_{11}(r, \theta) = -\frac{15D_1^* A_{11}^{(1)}}{16k\sqrt{\pi}} \frac{\sin \theta \sin k(y-h)}{|\cos \theta|^{7/2}} \frac{1}{r^{5/2}} + O\left(r^{-7/2} (1 + \ln r + \ln^2 r)\right) \quad (3.48)$$

Относительно $I_{12}(r, \theta)$ можно утверждать следующее. Интегралы, входящие в (3.44), допускают интегрирование по частям три раза (при условиях (3.30)–(3.32), (3.38) и (3.39)). Интегрируя теперь два раза по частям, интегралы, входящие в формулу (3.44), замечая при этом, что все внеинтегральные члены сокращаются, получим

$$\begin{aligned} I_{12}(r, \theta) = & \frac{D_1}{2\pi r^2} \left\{ \int_{-k \sin \theta}^{k|\cos \theta|} \frac{d^2}{d\lambda_1^2} \left[T_{14}(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_1} - N_{14}^{(0)}(\lambda_1) \right] e^{i\lambda_1 r} d\lambda_1 + \right. \\ & + \int_{-k \sin \theta}^k \frac{d^2}{d\lambda_2^2} \left[T_{15}(\sigma_1) \frac{d\sigma_{12}}{d\lambda_2} - T_2^{(k)}(\lambda_2) - N_{15}^{(0)}(\lambda_2) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \\ & - \int_{k|\cos \theta|}^k \frac{d^2}{d\lambda_2^2} \left[T_{15}(\sigma_1) \frac{d\sigma_{12}}{d\lambda_2} - T_1^{(k)}(\lambda_2) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \int_{k|\cos \theta|}^{\infty} \frac{d^2 N_{14}^{(0)}(\lambda_1)}{d\lambda_1^2} e^{i\lambda_1 r} d\lambda_1 - \\ & \left. - \int_k^{\infty} \frac{d^2 N_{15}^{(0)}(\lambda_2)}{d\lambda_2^2} e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \int_{-\infty}^{k \sin \theta} \frac{d^2 T_2^{(k)}(\lambda_2)}{d\lambda_2^2} e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \int_{-\infty}^{k|\cos \theta|} \frac{d^2 T_1^{(k)}(\lambda_2)}{d\lambda_2^2} e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Каждый интеграл, входящий в (3.49), имеет порядок r^{-1} при $r \rightarrow \infty$, в чем можно убедиться, интегрируя их еще один раз по частям. Следовательно, имеет место

$$I_{12}(r, \theta) = O(r^{-3}) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (3.50)$$

Таким образом, имея в виду (3.48) и (3.50), для $w_1^{(1)}(r, \theta)$ в секторе $\pi - \beta < \theta < \pi$ будем иметь асимптотику

$$w_1^{(1)}(r, \theta) = q_1^{(1)}(r, \theta) + O(r^{-5/2}) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (3.51)$$

Аналогичным путем из (3.3) и (3.22) получим асимптотическую формулу

$$\begin{aligned} w_{\text{пз}}^{(1)}(r, \theta) = & q_{\text{пз}}^{(1)}(r, \theta) + O(r^{-5/2} \ln r) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \\ q_{\text{пз}}^{(1)}(r, \theta) = & A_{\text{пз}}^{(1)} e^{ikr \sin \theta} r^{-3/2}, \quad A_{\text{пз}}^{(1)} = D_1^* / 2\sqrt{\pi} a_0 k^2 \cos \beta |\cos \theta|^{3/2} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Объединяя теперь в (2.1) формулы (3.1), (3.51) и (3.52), получим, что в секторе $\pi - \beta < \theta < \pi$

$$\begin{aligned} w_1(r, \theta) = & e^{-ikh \sin \beta} e^{-ikr \cos(\theta - \beta)} + A_{\text{отр}}^{(1)} e^{-ikr \cos(\theta + \beta)} + A_{\text{пов}}^{(3)} e^{-\gamma_3^* r \sin \theta} e^{\sigma_3^* r |\cos \theta|} + \\ & + \frac{D_1}{\sqrt{\pi}} \left[b_{-1} \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{r^{1/2}} - b_1 \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{r^{3/2}} \right] + q_{\text{пз}}^{(1)}(r, \theta) + O(r^{-5/2} \ln r) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.53)$$

представляющее волновое поле упругих перемещений в секторе $\pi - \beta < \theta < \pi$

области $\Omega_1^{(1)}$ при $r = \sqrt{x^2 + (y-h)^2} \rightarrow \infty$.

Аналогичными рассуждениями из (2.1), (3.1), (3.16) и (3.48) получим асимптотическую формулу для упругих перемещений в секторе $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$ при $r \rightarrow \infty$. Она имеет вид

$$w_1(r, \theta) = e^{-ikh \sin \beta} e^{-ikr \cos(\theta - \beta)} + [A_{\text{отр}}^{(1)} + A_{\text{отр}}^{(2)}] e^{-ikr \cos(\theta + \beta)} + A_{\text{пов}}^{(3)} e^{-\gamma_3^* r \sin \theta} e^{\sigma_3^* r |\cos \theta|} + \\ + \frac{D_1}{\sqrt{\pi}} \left[b_{-1} \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{r^{1/2}} - b_1 \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{r^{3/2}} \right] + q_{\text{пз}}^{(1)}(r, \theta) + O(r^{-5/2} \ln r), \quad r \rightarrow \infty \quad (3.54)$$

Теперь рассмотрим случай $\theta = \pi - \beta$. Подынтегральные функции $\Phi_{15}^{(j)}(\sigma_1(\lambda_2))$ из (3.21) в окрестности точки $\lambda_2 = k$ имеют разложения

$$\Phi_{15}^{(j)}(\sigma_1(\lambda_2)) = \frac{B_0}{k - \lambda_2} + (-1)^j \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} + \dots \quad j = 1, 2 \quad (3.55)$$

где B_0, B_1 – постоянные. (3.56)

Тогда $w_1^{(1)}(r, \pi - \beta)$ из (3.20) можно представить в виде

$$w_1^{(1)}(r, \pi - \beta) = Q_1(r, \pi - \beta) + Q_2(r, \pi - \beta) + \\ + \frac{D_1}{2\pi} \left\{ \int_{k \cos \beta}^k \left[\Phi_{15}^{(1)}(\sigma_1(\lambda_2)) - \frac{B_0}{k - \lambda_2} - \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \right. \\ - \int_{k \sin \beta}^k \left[\Phi_{15}^{(2)}(\sigma_1) - \frac{B_0}{k - \lambda_2} + \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \int_{-\infty}^{k \cos \beta} \left[\frac{B_0}{k - \lambda_2} + \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \\ \left. + \int_{-\infty}^{k \sin \beta} \left[\frac{B_0}{k - \lambda_2} - \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + q_{\pi - \beta}(r) \right\} \quad (3.57)$$

$$q_{\pi - \beta}(r) = \frac{1}{2} A_{\text{отр}}^{(2)} e^{ikr} + \frac{D_1 B_1}{\sqrt{\pi} r^{1/2}} e^{i(kr - \pi/4)} \quad (3.58)$$

Отметим, что при выводе (3.57) имелось в виду, что

$$\frac{D_1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{C_\varepsilon'} \Phi_{15}^{(1)}(\sigma_1(\zeta)) e^{i\zeta r} d\zeta + \int_{C_\varepsilon''} \Phi_{15}^{(2)}(\sigma_2(\zeta)) e^{i\zeta r} d\zeta \right) = -\frac{1}{2} A_{\text{отр}}^{(2)} e^{ikr} \quad (3.59)$$

Теперь, как это делалось выше, интегрирование по частям из (3.57) получим следующую асимптотическую формулу для $w_1^{(1)}(r, \pi - \beta)$:

$$w_1^{(1)}(r, \pi - \beta) = \frac{1}{2} A_{\text{отр}}^{(2)} e^{ikr} + O(r^{-1/2}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (3.60)$$

Объединяя (3.60) с (3.1) и (2.1), при этом имея в виду (3.52), в итоге получим следующую формулу:

$$w_{\pi - \beta}(r) = e^{ikh \cos \beta} e^{-ikr \cos 2\beta} + A_{\text{пов}}^{(3)} e^{-\gamma_3^* r \sin \beta} e^{\sigma_3^* r \cos \beta} + A_{\text{отр}}^{(1)} e^{ikr} + 0,5 A_{\text{отр}}^{(2)} e^{ikr} + \\ + O(r^{-1/2}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (3.61)$$

представляющую асимптотику волнового поля упругих перемещений вдоль луча $\theta = \pi - \beta$, исходящего из точки $(0, h)$ при $r \rightarrow \infty$.

Таким образом, формулами (3.53), (3.54) и (3.61) определяется поведение волнового поля упругих перемещений в дальних зонах области $\Omega_1^{(1)}(x < 0, y > h)$ при соответствующих значениях угла θ .

В конце остановимся на асимптотике упругих перемещений по линии $y = h$, ($x < 0$). Оказывается, что в этом случае искомую асимптотическую формулу можно получить из (3.53) предельным переходом при $\theta \rightarrow \pi$. Перейдя в (3.53) к пределу, имея при этом в виду (3.47), получим асимптотическую формулу для упругих перемещений по линии $y = h$ при $x \rightarrow -\infty$ в виде

$$w_1(x, h) = \left(e^{ikh \sin \beta} + A_{\text{отр}}^{(1)} \right) e^{-ik|x| \cos \beta} + A_{\text{пов}}^{(3)} e^{\sigma_3^* |x|} + q_{\pi}^{(1)}(x) + \frac{D_1^* \sqrt{h}}{2\sqrt{\pi} a_0 k^2 \cos \beta} \frac{1}{|x|^{3/2}} + O\left(|x|^{-5/2} \ln|x|\right) \quad (3.62)$$

$$q_{\pi}^{(1)}(x) = D_1 B_{\pi}^{(1)} e^{i(kx - \pi/4)} / 2\sqrt{\pi} |x|^{3/2} \quad (3.63)$$

$$B_{\pi}^{(1)} = (\varepsilon_{01} + \text{th}(2hk)) / \sqrt{2} k^2 \varepsilon_{01}^2 \bar{K}_+(k) \text{ch}(2kh) \sin^2(\beta/2) \quad (3.64)$$

4. Определим волновое поле упругих перемещений в области $\Omega_1^{(2)}(x > 0, y \geq h)$ из (2.1). Так как $x > 0$, то при переходе на комплексную плоскость следует контур интегрирования замыкать в нижней полуплоскости с разрезами (фиг.2) и заменить в интеграле (2.2) $\bar{K}_+(\sigma)$ на $\bar{K}(\sigma)/\bar{K}_-(\sigma)$. Тогда аналитическое продолжение подынтегральной функции внутри контура интегрирования регулярно кроме точек $\alpha_2 = -\sigma_2^*$, $\alpha_4 = -\sigma_4^*$, $\alpha_3 = k \cos \beta - i0$ (4.1)

где оно имеет полюса первого порядка. Тогда опять по обычной процедуре контурного интегрирования из (2.1)–(2.3) получим аналогичную (3.1) формулу, определяющую поле упругих перемещений в области $\Omega_1^{(2)}(x > 0, y \geq h)$

$$w_1(x, y) = w_1^{(2)}(x, y) + w_{\infty}(x, y) + w_{\text{отр}}^{(1)}(x, y) + w_{\text{отр}}^{(2)}(x, y) + w_{\text{пз}}^{(2)}(x, y) + w_{\text{пов}}^{(2)}(x, y) + w_{\text{пов}}^{(4)}(x, y) \quad (4.2)$$

где $w_{\infty}(x, y)$, $w_{\text{отр}}^{(1)}(x, y)$ и $w_{\text{отр}}^{(2)}(x, y)$ даются формулами (1.1), (2.3) и (2.13), а

$$w_1^{(2)}(x, y) = \frac{D_2^*}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\tau} \bar{K}_+(i\tau)}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \left[M_{21}(\tau) e^{-i\sqrt{k^2 + \tau^2}(y-h)} + M_{22}(\tau) e^{i\sqrt{k^2 + \tau^2}(y-h)} \right] e^{-\tau|x|} d\tau + \frac{D_2}{2\pi} \int_0^k \frac{\sqrt{\sigma} \bar{K}_+(\sigma)}{\sqrt{k^2 - \sigma^2}} \left[M_{24}(\sigma) e^{-i\sqrt{k^2 + \tau^2}(y-h)} + M_{25}(\sigma) e^{i\sqrt{k^2 - \sigma^2}} \right] e^{-i\sigma x} dx \quad (4.3)$$

$$w_{\text{пз}}^{(2)}(x, y) = \frac{D_2^*}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\tau} \bar{K}_+(i\tau)}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} M_{23}(\tau) e^{i\sqrt{k^2 + \tau^2}(y-h)} e^{-\tau|x|} d\tau \quad (4.4)$$

$$w_{\text{пов}}^{(j)}(x, y) = A_{\text{пов}}^{(j)} e^{-\gamma_j^*(y-h)} \cdot e^{i\sigma_j^* x}, \quad \gamma_j^* = \sqrt{(\sigma_j^*)^2 - k^2}, \quad j = 2, 4 \quad (4.5)$$

$$A_{\text{пов}}^{(2)} = \frac{-iD_2 \sqrt{\sigma_2^*} \text{th}(h\sigma_2^*)}{\bar{K}_+(\sigma_2^*) (\sigma_2^* + k \cos \beta) (\gamma_2^*)^{1/2}} \left[\frac{\varepsilon_{01} \chi k^2}{(\gamma_2^*)^{3/2}} + \frac{h}{\text{ch}^2(h\sigma_2^*)} \right]^{-1}$$

$$A_{\text{пов}}^{(2)} = \frac{-iD_2 \sqrt{\sigma_4^*} \varepsilon_{10}}{\bar{K}_+(\sigma_4^*) (\sigma_4^* + k \cos \beta) (\gamma_4^*)^{1/2}} \left[\frac{\chi k^2 \text{th}(h\sigma_4^*)}{(\gamma_4^*)^{3/2}} + \frac{h(1 - \chi \sigma_4^* (\gamma_4^*)^{-1/2})}{\text{ch}^2(h\sigma_4^*)} \right]^{-1} \quad (4.6)$$

$$D_2 = D_1 c_0 / 2\varepsilon_0, \quad D_2^* = D_2 e^{-i\pi/4},$$

$$M_{21}(\tau) = -\frac{\eta_-(\tau)(k \cos \beta + i\tau)^{-1}}{(\cos(h\tau) + \eta_-(\tau) \sin(h\tau))(\sin(h\tau) - \eta_-(\tau) \cos(h\tau))}$$

$$M_{22}(\tau) = -\frac{\eta_+(\tau)(k \cos \beta + i\tau)^{-1}}{(\cos(h\tau) + \eta_+(\tau) \sin(h\tau))(\sin(h\tau) - \eta_+(\tau) \cos(h\tau))} \quad (4.7)$$

$$M_{23}(\tau) = \frac{\eta_-(\tau)(k \cos \beta + i\tau)^{-1}}{(\cos(h\tau) - \eta_-(\tau) \sin(h\tau))(\sin(h\tau) + \eta_+(\tau) \cos(h\tau))} +$$

$$+ \frac{\eta_+(\tau)(k \cos \beta + i\tau)^{-1}}{(\cos(h\tau) + \eta_+(\tau) \sin(h\tau))(\sin(h\tau) - \eta_+(\tau) \cos(h\tau))}$$

$$M_{24}(\sigma) = \frac{\xi_+(\sigma)(\sigma + k \cos \beta)^{-1}}{(\text{ch}(h\sigma) + \xi_+(\sigma) \text{sh}(h\sigma))(\text{sh}(h\sigma) + \xi_+(\sigma) \text{ch}(h\sigma))} \quad (4.8)$$

$$M_{25}(\sigma) = \frac{\xi_-(\sigma)(\sigma + k \cos \beta)^{-1}}{(\text{ch}(h\sigma) + \xi_-(\sigma) \text{sh}(h\sigma))(\text{sh}(h\sigma) + \xi_-(\sigma) \text{ch}(h\sigma))}$$

$$\eta_{\pm}(\tau) = i\varepsilon_{01} \left(1 \pm \chi \tau / \sqrt{\tau^2 + k^2} \right), \quad \xi_{\pm}(\sigma) = \varepsilon_{01} \left(1 \pm \chi \sigma / \sqrt{k^2 - \sigma^2} \right) \quad (4.9)$$

В (4.2) $w_{\text{пов}}^{(2)}(x, y)$ и $w_{\text{пов}}^{(4)}(x, y)$ – амплитуды поверхностных волн, распространяющихся с фазовой скоростью ω/σ_2^* и ω/σ_4^* по направлению Ox .

Аналогичным путем, как в пункте 3, можно исследовать особенности волнового поля в области $\Omega_2(x > 0, y \geq h)$. Не останавливаясь на этом, приведем лишь окончательную формулу, представляющую асимптотическое поведение упругих перемещений по линии $y = h$ при $x \rightarrow +\infty$. Она имеет следующий вид:

$$w_1(x, h) = \left[e^{-ikh \sin \beta} + A_{\text{отр}}^{(1)} + A_{\text{отр}}^{(2)} \right] e^{-ikx \cos \beta} + A_{\text{пов}}^{(2)} e^{i\sigma_2^* x} + A_{\text{пов}}^{(4)} e^{i\sigma_4^* x} + \quad (4.10)$$

$$+ \frac{\sqrt{2\pi} D_2 k \bar{K}_+(k)}{2} \left[\frac{1}{\text{sh}^2(kh)} + \frac{1}{\text{ch}^2(kh)} + \frac{2\varepsilon_{01}}{\text{sh}^2(2kh)} \right] \frac{e^{i(kx + \pi/4)}}{x^{3/2}} + O(x^{-5/2}(1 + \ln x))$$

Из полученных асимптотических формул вытекает, что полубесконечный электрод существенным образом влияет на качественное распределение волнового поля упругих перемещений. В частности, как следует из (2.4), (3.53) и (4.10), полубесконечный электрод возбуждает неоднородную волну $\varphi_{\text{нд}}^{(1)}(x, y)$ и поверхностные волны $w_{\text{пов}}^{(2)}(x, y)$, $w_{\text{пов}}^{(3)}(x, y)$, $w_{\text{пов}}^{(4)}(x, y)$. Далее, из формул (2.12) и (3.53) следует, что полубесконечный электрод поглощает отражённую волну из (2.16) $w_{\text{отр}}^{(2)}(x, y)$ в секторе $\pi - \beta < \theta \leq \pi$, а из (3.61) следует, что полубесконечный электрод возбуждает по направлению луча $\theta = \pi - \beta$ перемещение $A_{\text{отр}}^{(2)} e^{ikr}$. В

(3.53) $q_{\text{пз}}^{(1)}(r, \theta)$ – волна, распространяющаяся по направлению луча с углом раствора θ со скоростью $\omega/k \sin \theta$ (или распространяющаяся по направлению Oy со скоростью ω/k), обусловленная присутствием электрода. При этом, на линии $y = h$ волна представляет собой неволновую часть, распространяющуюся со скоростью света.

5. В заключение коротко остановимся на асимптотическом распределении электрической индукции около конца полубесконечного электрода. Из (2.7)–(2.9) и (3.8) получим, что при $-\pi \leq \theta \leq 0$ и $r \rightarrow 0$

$$D_{2y}(x, y) = \left(\frac{\varepsilon_0}{c_0} - 1 \right) D_0 \frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}} + O(1) \quad (5.1)$$

$$D_{2x}(x, y) = \left(\frac{\varepsilon_0}{c_0} - 1 \right) D_0 \frac{\cos(\theta/2)}{r^{1/2}} + O(1)$$

где $D_0 = c_1 e^{-i\pi/4} / \sqrt{\pi k \cos \beta} \bar{K}_-(k \cos \beta)$, а c_1 дается формулой (1.19).

Учитывая, что

$$D_\theta(r, \theta) = -D_x \cos \theta + D_y \sin \theta \quad (5.2)$$

из (5.1) получим формулу

$$D_{2\theta}(r, \theta) = \left(\frac{\varepsilon_0}{c_0} - 1 \right) D_0 \frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}} + O(1) \quad (5.3)$$

представляющую асимптотическое поведение электрической индукции около конца электрода при $-\pi \leq \theta \leq 0$ и $r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2} \rightarrow 0$.

Аналогичным образом получим, что при $0 \leq \theta \leq \pi$ и $r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2} \rightarrow 0$

$$D_{00}(r, \theta) = -\frac{\varepsilon_0}{c_0} D_0 \frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}} + O(1) \quad (5.4)$$

Имея (5.3) и (5.4), при помощи (1.29) нетрудно убедиться, что имеет место асимптотическое равенство

$$D_{2\theta}(r, -\pi - 0) - D_{00}(r, \pi + 0) = \psi_-(x) \Big|_{x \rightarrow 0} = \frac{D_0}{\sqrt{-x}}$$

при $r = |x| \rightarrow 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 294с.
3. Функциональный анализ /под редакцией С.Г.Крейна. М.: Наука, 1972. 544с.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. //Уч. записки ЕГУ. 1979. 3. С.29-34.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. //Иzv. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.

6. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краю полубесконечного металлического слоя. //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №4. С.43-52.
7. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краях параллельных полубесконечных металлических слоёв. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С.16-28.
8. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23-37.
9. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.38-50.
10. Аветисян А.С. О поверхностных волнах в пьезоэлектрике при наличии электропроводящей среды вблизи его границы. //В сб.ст.: "Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов". Ереван. 1984. Т.1. С.27-30.
11. Danoyan Z.N., Piliposian G.I. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric layer. Int. J. of Solids and Structures. 2008. 44. 5829-5847.
12. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №1. С.40-51.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798с.

Агаян Каро Леренцович

Кандидат физ.-мат.наук, старший научный сотрудник
Института механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б,
Тел: (+37410) 52-58-35; E-mail: karo-aga@mechins.sci.am

Григорян Эдуард Хосровович

Доктор физ.-мат.наук, профессор ЕГУ, факультет механики
Адрес: Ереван, ул.Алека Манукяна 1, ЕГУ, факультет механики
Тел: (+37410) 23-03-89

Поступила в редакцию 30.04.2009