ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **63, №1, 2010** **Механика**

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ[1]

ХАЧАТРЯН А.М., ТОВМАСЯН А.Б.

Ключевые слова: термоупругость, геометрически нелинейные уравнения, анизотропная пластинка, смешанные условия, асимптотический метод, внутренняя задача.
Key words: termoelacticity, geometrically nonlinear equations, anisotropic plate, mixed conditions, asymptotic method, interior problem.

Ա.Մ. Խաչատրյան, Ա.Բ. Թովմասյան
Անիզոտրոպ ջերմաառաձգական սալի ներքին խնդրի լուծումը առաձգականության երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հիման վրա

Դիտարկվում է անիզոտրոպ ջերմաառանձգական սալի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման խնդիրը, երբ նրա դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են լարումների, իսկ մյուսի վրա` տեղափոխության վեկտորի նորմալ բաղադրիչի և տանգենցիալ լարումների արժեքները:

Հետազոտությունը կատարվում է առաձգականության տեսության երկրաչափորեն ոչ գծային եռաչափ հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով: Գտնված է ներքին խնդրի ասիմպտոտիկան և կառուցված է նրա լուծումը: Ստացված են ռեկուրենտ բանաձևեր, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշելու ներքին խնդրի լարումների թենզորի և տեղափոխությունների վեկտորի բաղադրիչները:

A.M. Khachatryan, A.B. Tovmasyan
Asimptotic Solution of Three Dimention Interior Problem of Anisotropic Termoelasticity Plate on Basis of Geometrical Termoelesticity Non-Linear Theory of Elasticity

Consider a question of solution stress-strain state of anisotropic termoelasticity plate, when on one of the face surfaces are given values of stresses, and on the other surface-normal component of displacement vector of transference and tangential stresses. Investigation is leaded by the method of asymptotic integration geometrically non-linear equations of three dimention problem of theory of elasticity. Founded asimptotication and built solution, which appropriate to interior problem. Received recurent formulas, which allow determine all components of stresses tensor and vectors displacement of interior problem.

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропной термоупругой пластинки, когда на одной из лицевых поверхностей заданы значения напряжений, а на другой – нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные напряжения.

Исследование проводится методом асимптотического интегрирования нелинейных уравнений трехмерной задачи теории упругости. Найдена асимптотика и построено решение, соответствующее внутренней задаче. Получены реккурентные формулы, позволяющие определить все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения внутренней задачи.

1. Классические краевые задачи полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [1,2]. Тем же методом решены неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек в монографиях [2,3]. Вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропных пластин рассмотрен в [7,8]. В работе [9] тем же методом решена смешанная трехмерная внутренняя задача для анизотропной термоупругой пластинки. Метод оказался эффективным также для решения динамических задач тонких тел [10]. В работах [11-

---

[1] Тезисы доклада работы опубликованы в Тр. Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Сентябрь 21-26. Горис-Степанакерт. 2008. С. 432-434.

13] асимптотическим методом решена первая краевая задача для однослойного и двухслойного анизотропных прямоугольников-полос и для ортотропной пластины по геометрически нелинейной теории упругости, проведено сравнение с решением по линейной теории.

Рассмотрим анизотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины $2h$. Будем считать, что материал пластинки обладает общей анизотропией и подчиняется обобщенному закону Гука. Пользуемся декартовой системой координат x, y, z, располагая оси Ox, Oy в срединной плоскости пластинки. Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи термоупругости анизотропного тела в области $\Omega = \{(x, y, z);\ x, y \in \Omega_0,\ |z| \le h,\ h << a\}$, где Ω_0 – область, занятая срединной поверхностью пластинки, a – характерный тангенциальный размер пластинки. На пластинку действуют заданные объёмные силы с компонентами $F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)$ и температурные воздействия, на лицевых поверхностях пластинки заданы условия

$$\begin{aligned} &\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{+}(x,z), \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^{+}(x,z), \sigma_z = \sigma_z^{+}(x,z) \quad \text{при} \quad y = h \\ &w = \varepsilon^3 w^{-}(x,z), \sigma_{xz} = \sigma_{yz}^{-}(x,z), \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^{-}(x,z) \quad \text{при} \quad y = -h \end{aligned} \tag{1.1}$$

Решение задачи сводится к решению следующей системы нелинейных уравнений и соотношений термоупругости [4-6]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{xz}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{xz}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xz} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_z\right] + F_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_x + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_{xy} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma_{xz}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_{xy} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_y + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma_{xz}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma_{xz} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma_{yz} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma_z\right] + F_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial w}{\partial y}\sigma_{xy} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_{xz}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial w}{\partial y}\sigma_y + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_{xz}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial w}{\partial y}\sigma_{yz} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma_z\right] + F_z = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\sigma_{yz} +$$

$$+a_{15}\sigma_{xz} + a_{16}\sigma_{xy} + \alpha_{11}\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\sigma_{yz} +$$

$$+a_{25}\sigma_{xz} + a_{26}\sigma_{xy} + \alpha_{22}\theta$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]=a_{13}\sigma_x+a_{23}\sigma_y+a_{33}\sigma_z+a_{34}\sigma_{yz}+$$
$$+a_{35}\sigma_{xz}+a_{36}\sigma_{xy}+\alpha_{33}\theta$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}=a_{14}\sigma_x+a_{24}\sigma_y+a_{34}\sigma_z+a_{44}\sigma_{yz}+$$
$$+a_{45}\sigma_{xz}+a_{46}\sigma_{xy}+\alpha_{12}\theta$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}=a_{15}\sigma_x+a_{25}\sigma_y+a_{35}\sigma_z+a_{45}\sigma_{yz}+$$
$$+a_{55}\sigma_{xz}+a_{56}\sigma_{xy}+\alpha_{13}\theta$$
$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}=a_{16}\sigma_x+a_{26}\sigma_y+a_{36}\sigma_z+a_{46}\sigma_{yz}+$$
$$+a_{56}\sigma_{xz}+a_{66}\sigma_{xy}+\alpha_{23}\theta$$

при граничных условиях (1.1) и условиях краевых задач теории упругости на боковой поверхности (они пока не конкретизируются).

Чтобы решить поставленную трехмерную нелинейную краевую задачу, вводятся безразмерные переменные $\xi=x/a,\ \eta=y/a,\ \zeta=z/h$ и безразмерные перемещения $U=u/a,\ V=v/a,\ W=w/a$.

В безразмерных координатах $\xi,\ \eta,\ \zeta$ система уравнений (1.2) превратится в новую систему, содержащую малый параметр $\varepsilon=h/a$. Эта система сингулярно возмущенная и ее решение складывается из решений внутренней задачи (основное решение) и пограничного слоя.

Решение внутренней задачи отыскивается в виде ряда по степеням малого параметра [1-3,7-12]

$$Q=\varepsilon^q\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^s Q^{(s)} \tag{1.3}$$

где Q – любое из напряжений или безразмерных перемещений, q – целое число, которое подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(s)}$. Число q определяется для каждой величины единственным образом [1,2]:

$$q=3 \text{ для } \sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \sigma_{xy},\ U,\ V,\ W, \tag{1.4}$$
$$q=4 \text{ для } \sigma_{xz},\ \sigma_{yz}$$

Эта асимптотика по сути не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [7,8], однако, здесь, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.3) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра. Поэтому, было принято $q=q_0+4,$ где q_0 – значение асимптотики, соответствующее задаче в линейной теории упругости. Асимптотике (1.3), (1.4) соответствует выбор представления (1.1).

Подставив (1.3) в преобразованную систему (1.2), с учетом (1.4), для определения коэффициентов разложения (1.3) получим систему

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_1^{*(s)}+F_x^{(s)}=0\\
&\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{y}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_2^{*(s)}+F_y^{(s)}=0\\
&\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{z}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_3^{*(s)}+F_z^{(s)}=0\\
&\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\xi}+U_\xi^{(s-3)}+V_\xi^{(s-3)}+W_\xi^{(s-1)}=a_{11}\sigma_x^{(s)}+a_{12}\sigma_y^{(s)}+a_{13}\sigma_z^{(s-2)}+\\
&+a_{14}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{15}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{16}\sigma_{xy}^{(s)}+\alpha_{11}\theta^{(s)}\\
&\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\eta}+U_\eta^{(s-3)}+V_\eta^{(s-3)}+W_\eta^{(s-1)}=a_{12}\sigma_x^{(s)}+a_{22}\sigma_y^{(s)}+a_{23}\sigma_z^{(s-2)}+\\
&+a_{24}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{25}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{26}\sigma_{xy}^{(s)}+\alpha_{22}\theta^{(s)}\\
&\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}+U_\zeta^{(s-3)}+V_\zeta^{(s-3)}+W_\zeta^{(s-1)}=a_{13}\sigma_x^{(s-2)}+a_{23}\sigma_y^{(s-2)}+a_{33}\sigma_z^{(s-4)}+\\
&+a_{34}\sigma_{yz}^{(s-3)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(s-3)}+a_{36}\sigma_{xy}^{(s-2)}+\alpha_{33}\theta^{(s-1)}\\
&\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+U_{\eta\zeta}^{(s-4)}+V_{\eta\zeta}^{(s-4)}+W_{\eta\zeta}^{(s-4)}a_{14}\sigma_x^{(s-1)}+a_{24}\sigma_y^{(s-1)}+a_{34}\sigma_z^{(s-3)}+\\
&+a_{44}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s-1)}+\alpha_{23}\theta^{(s-1)}\\
&\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+U_{\xi\zeta}^{(s-4)}+V_{\xi\zeta}^{(s-4)}+W_{\xi\zeta}^{(s-4)}=a_{15}\sigma_x^{(s-1)}+a_{25}\sigma_y^{(s-1)}+a_{35}\sigma_z^{(s-3)}+\\
&+a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)}+\alpha_{13}\theta^{(s-1)}\\
&\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\xi}+U_{\xi\eta}^{(s-3)}+V_{\xi\eta}^{(s-3)}+W_{\xi\eta}^{(s-3)}=a_{16}\sigma_x^{(s)}+a_{26}\sigma_y^{(s)}+a_{36}\sigma_z^{(s-2)}+\\
&+a_{46}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s)}+\alpha_{13}\theta^{(s)}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где

$$\sigma_1^{*(s)}=\sigma_{11}^{(s)}+\sigma_{12}^{(s)},\ \sigma_2^{*(s)}=\sigma_{22}^{(s)}+\sigma_{21}^{(s)},\ \sigma_3^{*(s)}=\sigma_{33}^{(s)}+\sigma_{13}^{(s)}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{12}^{(s)}=\sum_{i=0}^{s}\Bigg[&\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\sigma_x^{(s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-i)}}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{y}^{(s-i)}}{\partial\eta}+\right.\\
&\left.+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-i)}}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-i)}}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2U^{(i)}}{\partial\xi^2}\sigma_x^{(s-i)}+\frac{\partial^2U^{(i)}}{\partial\eta^2}\sigma_y^{(s-i)}+
\end{aligned}
$$

$$+2\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\xi\partial\eta}\sigma_{xy}^{(s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\xi\partial\zeta}\sigma_{xz}^{(s-i)}+2\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\eta\partial\zeta}\sigma_{yz}^{(s-i)}\Bigg]\qquad \left(1,2,3;U,V,W;\xi,\eta,\zeta\right)$$

$$\sigma_{11}^{(s)}=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial\zeta^2}\sigma_z^{(s-i)}+\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma_z^{(s-i)}}{\partial\zeta}\right]\quad \left(1,2,3;U,V,W;\xi,\eta,\zeta\right)$$

$$U_\xi^{(s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\xi},\;\; U_{\xi\eta}^{(s)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial\eta}\quad \left(U,V,W\right);\left(\xi,\eta,\zeta\right)\quad (1.6)$$

Решив систему (1.5), получим

$$\begin{aligned}
&W^{(s)}=w^{(s)}(\xi,\eta)+w^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\\
&U^{(s)}=u^{(s)}(\xi,\eta)+u^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\qquad (u,v)\\
&\sigma_z^{(s)}=\tau_{z0}^{(s)}+\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\\
&\sigma_x^{(s)}=\tau_{x0}^{(s)}+\sigma_x^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\qquad (x,y)\\
&\sigma_{xy}^{(s)}=\tau_{xy0}^{(s)}+\sigma_{xy}^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\\
&\sigma_{xz}^{(s)}=\zeta\tau_{xz1}^{(s)}+\tau_{xz0}^{(s)}+\sigma_{xz}^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\qquad (x,y)
\end{aligned}\qquad (1.7)$$

где

$$\tau_{x0}=B_{11}\varepsilon_1+B_{12}\varepsilon_2+B_{16}\omega\quad \left(x,y;1,2\right)\qquad (1.8)$$

$$\tau_{xy0}^{(s)}=B_{16}\varepsilon_1^{(s)}+B_{26}\varepsilon_2^{(s)}+B_{66}\omega^{(s)}$$

$$\tau_{xz1}^{(s)}=-\left(\frac{\partial\tau_{x0}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{xy0}^{(s)}}{\partial\eta}\right)=-L_{11}\left(B_{ij}\right)u^{(s)}-L_{12}\left(B_{ij}\right)v^{(s)}\quad \left(x,y;\xi,\eta\right)\qquad (1.9)$$

$$\varepsilon_1^{(s)}=\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\xi},\;\varepsilon_2^{(s)}=\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\eta},\;\;\omega^{(s)}=\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\xi}$$

Коэффициенты B_{ij} определяются по формулам

$$\begin{aligned}
&B_{11}=\left(a_{22}a_{66}-a_{26}^2\right)/\Omega,\;B_{22}=\left(a_{11}a_{66}-a_{16}^2\right)/\Omega\\
&B_{12}=\left(a_{16}a_{26}-a_{12}a_{66}\right)/\Omega,\;B_{66}=\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)/\Omega\\
&B_{16}=\left(a_{12}a_{22}-a_{16}a_{22}\right)/\Omega,\;B_{26}=\left(a_{12}a_{16}-a_{11}a_{26}\right)/\Omega\\
&\Omega=\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)a_{66}+2a_{12}a_{16}a_{26}-a_{11}a_{26}^2-a_{22}a_{16}^2
\end{aligned}\qquad (1.10)$$

Величины со звездочками, как всегда, известны и определяются по формулам

$$w^{*(s)}=\int_0^\zeta\Big(a_{13}\sigma_x^{(s-1)}+a_{23}\sigma_y^{(s-1)}+a_{33}\sigma_z^{(s-1)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(s-2)}+$$

$$+a_{36}\sigma_{xy}^{(s-1)}-\left(U_\zeta^{(s-4)}+V_\zeta^{(s-4)}+W_\zeta^{(s-4)}\right)+\alpha_{33}\theta^{(s)}\Big)d\zeta$$

$$u^{*(s)} = \int_0^{\zeta}\Big(a_{15}\sigma_x^{(s-1)} + a_{25}\sigma_y^{(s-1)} + a_{35}\sigma_z^{(s-1)} + a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)} +$$

$$+ a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)} - \frac{\partial w^{*(s)}}{\partial\xi} - \left(U_{\xi\zeta}^{(s-4)} + V_{\xi\zeta}^{(s-4)} + W_{\xi\zeta}^{(s-4)}\right) + \alpha_{13}\theta^{(s-1)}\Big)d\zeta$$

$$v^{*(s)} = \int_0^{\zeta}\Big(a_{14}\sigma_x^{(s-1)} + a_{24}\sigma_y^{(s-1)} + a_{34}\sigma_z^{(s-1)} + a_{44}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{45}\sigma_{xz}^{(s-2)} + \qquad (1.11)$$

$$+ a_{46}\sigma_{xy}^{(s-1)} - \frac{\partial w^{*(s)}}{\partial\eta} - \left(U_{\eta\zeta}^{(s-4)} + V_{\eta\zeta}^{(s-4)} + W_{\eta\zeta}^{(s-4)}\right) + \alpha_{12}\theta^{(s-1)}\Big)d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(s)} = B_{11}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{12}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{16}\omega^{*(s)} + a_3\sigma_z^{(s-2)} + a_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + a_5^{(k)}\sigma_{xz}^{(s-1)}$$

$$\sigma_y^{*(s)} = B_{12}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{22}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{26}^{(k)}\omega^{*(s)} + b_3\sigma_z^{(s-2)} + b_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + b_5\sigma_{xz}^{(s-1)}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = B_{16}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{22}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{66}\omega^{*(s)} + c_3\sigma_z^{(s-2)} + c_4\sigma_{yz}^{(s-1)} + c_5\sigma_{xz}^{(s-1)}$$

$$\sigma_{xz}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_x^{*(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial\eta} + \sigma_1^{*(s)} + F_x^{(s)}\right)d\zeta \quad \left(x, y; \xi, \eta; 1, 2\right)$$

$$\sigma_z^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial\eta} + \sigma_3^{*(s)} + F_z^{(s)}\right)d\zeta$$

где

$$\varepsilon_1^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi} + U_{\xi}^{(s-3)} + V_{\xi}^{(s-3)} + W_{\xi}^{(s-1)} - \alpha_{11}\theta^{(s)}$$

$$\varepsilon_2^{*(s)} = \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\eta} + U_{\eta}^{(s-3)} + V_{\eta}^{(s-3)} + W_{\eta}^{(s-1)} - \alpha_{22}\theta^{(s)} \qquad (1.12)$$

$$\omega^{*(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\xi} + U_{\xi\eta}^{(s-3)} + V_{\xi\eta}^{(s-3)} + W_{\xi\eta}^{(s-1)} - \alpha_{12}\theta^{(s)}$$

$$a_i = -\left(a_{1i}B_{11} + a_{2i}B_{12} + a_{i6}B_{16}\right),\ b_i = -\left(a_{1i}B_{12} + a_{2i}B_{22} + a_{i6}B_{26}\right)$$

$$c_i = -\left(a_{1i}B_{61} + a_{2i}B_{26} + a_{i6}B_{66}\right) \qquad \left(i = 1,2,...,6\right)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), для определения неизвестных величин получим следующую систему уравнений:

$$L_{11}\left(B_{ij}\right)u + L_{12}\left(B_{ij}\right)v = p_1^{(s)} \qquad (1.13)$$

$$L_{12}\left(B_{ij}\right)u + L_{22}\left(B_{ij}\right)v = p_2^{(s)}$$

где дифференциальные операторы L_{ij} имеют вид

$$L_{11}\left(B_{ij}\right) = B_{11}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$L_{22}\left(B_{ij}\right) = B_{22}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2B_{26}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$$

$$L_{12}\left(B_{ij}\right)=B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \tag{1.14}$$

$$L_{13}\left(B_{ij}\right)=-\left[B_{11}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}+3B_{16}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\eta^2}+B_{26}\frac{\partial^3}{\partial\eta^3}\right]$$

$$L_{23}\left(B_{ij}\right)=-\left[B_{22}\frac{\partial^3}{\partial\eta^3}+3B_{26}\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\eta^2}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta}+B_{16}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\right]$$

В (1.13) $p_1^{(s)}$, $p_2^{(s)}$ играют роль обобщенных нагрузок, для вычисления которых получаются формулы

$$\begin{aligned} p_1^{(s)} &= -X_1^{(s)}+\frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{*(s)}\left(\zeta=1\right)-\sigma_{xz}^{*(s)}\left(\zeta=-1\right)\right)\\ p_2^{(s)} &= -Y_1^{(s)}+\frac{1}{2}\left(\sigma_{yz}^{*(s)}\left(\zeta=1\right)-\sigma_{yz}^{*(s)}\left(\zeta=-1\right)\right)\end{aligned} \tag{1.15}$$

Остальные неизвестные функции интегрирования $\tau_{xz0}^{(s)}, \tau_{yz0}^{(s)}, \tau_{z0}^{(s)}$ и $w^{(s)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \tau_{xz0}^{(s)} &= X_2^{(s)}-\frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{*(s)}\left(\zeta=1\right)+\sigma_{xz}^{*(s)}\left(\zeta=-1\right)\right)-\frac{1}{2}L_{13}\left(B_{ij}\right)w^{(s)}\\ \tau_{yz0}^{(s)} &= Y_2^{(s)}-\frac{1}{2}\left(\sigma_{yz}^{*(s)}\left(\zeta=1\right)+\sigma_{yz}^{*(s)}\left(\zeta=-1\right)\right)-\frac{1}{2}L_{23}\left(B_{ij}\right)w^{(s)}\\ \tau_{z0}^{(s)} &= \sigma_z^{+(s)}-\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)\\ w^{(s)} &= w^{-(s)}-w_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,-1\right)\end{aligned} \tag{1.16}$$

где

$$X_{1,2}^{(s)}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{+(s)}\pm\sigma_{xz}^{-(s)}\right),\quad Y_{1,2}^{(s)}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{yz}^{+(s)}\pm\sigma_{yz}^{-(s)}\right),$$

$$\sigma_{xz}^{\pm(0)}=\sigma_{xz}^{\pm},\ \sigma_{yz}^{\pm(0)}=\sigma_{yz}^{\pm},\ \sigma_z^{+(0)}=\sigma_z^{+},\ w^{(0)}=w^{-}$$

$$\sigma_{xz}^{\pm(s)}=\sigma_{yz}^{\pm(s)}=\sigma_z^{+(s)}=0, w^{-(s)}=0 \qquad s>0$$

Легко убедиться, что при $s=0$ система уравнений (1.13) совпадает с уравнениями обобщенной плоской задачи, когда имеется плоскость упругой симметрии. Для приближений $s>0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука,1976. 512 с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. “Гитутюн” НАН РА, 2005. 468с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с.

5. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948.
6. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд. ЛГУ, 1988.
7. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией //В сб.: “XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин”. Тезисы докл.. М.: 1977. 89с.
8. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида//Изв. НАН РА. Механика. 1996. Т. 49. №3. С.10-22.
9. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной задачи для анизотропной термоупругой пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. № 3-4. С.3-11.
10. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. Механика оболочек и пластин //Сб. докл. XIX Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. РФ. Нижний Новгород. 1999. С.16-20.
11. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости //Изв. Северо-Кавказского центра высшей школы. Сер. естест. наук. 2001. Спецвыпуск. С.16-18.
12. Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной двухслойной полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости //В сб.:“Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем”. Ереван: 2002. С.213-218.
13. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. К решению первой краевой задачи для ортотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости. //Уч. записки АрГУ. 2004. №1(8). С.15-20.

Сведения об авторах:
Хачатрян Александр Мовсесович –доктор физ.-мат. .наук.,
профессор каф. математики АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5
Тел.: (+37497) 20-19-49; E-mail: alexkhach49@yandex.ru

Товмасян Артур Бабкенович – канд. физ.-мат. .наук.,
доцент каф. инженерии АрГУ
Адрес: НКР, Степанакерт, ул. Мхитара Гоша, 5
Тел.: (+37497) 20-32-42

Поступила в редакцию 24.03.2009