

УДК 539.3

**О ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТАВНОГО КОНСОЛЬНОГО  
СТЕРЖНЯ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ДЕЙСТВИИ “СЛЕДЯЩЕЙ” И  
НЕИЗМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ В ПРОЛЁТЕ**

**КАЗАРЯН К.Б., МАРТИРОСЯН С.Р., САНОЯН Ю.Г.**

**Ключевые слова:** составная консоль, устойчивость, следящая сила, флаттер, дивергенция, сила неизменного направления.

**Key words:** non-uniform bar, stability, tangential force, flutter, divergence, the force parallel to the axis bar.

**Կ. Բ. Դազարյան, Ս. Ր. Մարտիրոսյան, Յու. Գ. Սանոյան**

**Բաղադրյալ ձողի կայունության մի խնդրի մասին հետևող ու անփոփոխ ուղղություն ունեցող ուժերի ազդեցության տակ**

Գիտարկված է բաղադրյալ առաձգական ձողի կայունության խնդիրը, որի մի ծայրը ազատ է, իսկ մյուսը՝ ամրակցված: Ձողը կազմված է երկու մասից՝ տարբեր ամրության գործակիցներով: Այդ մասերը միացնող հատույթում միաժամանակ կիրառված են “հետևող” ու անփոփոխ ուղղություն ունեցող երկու կենտրոնացված ուժեր: Գտնված են տվյալ ազդող ուժերի կրիտիկական արժեքները, որոնց դեպքում տեղի է ունենում դիվերգենտ և ֆլատերային տեսքերի կայունության կորուստ:

**K. B. Gazaryan, S. R. Martirosyan, Ju. G. Sanoyan**

**On the Problem of Non -Uniform Cantilever Bar Stability Loaded at Span  
by a Concentrated Force Parallel to the Axis Bar and by Tangential Follower Force**

The problem of disturbed motion stability of non-uniform elastic cantilever bar loaded at span by a concentrated force parallel to the axis of the un-deflected bar and by tangential force to the axis of the deflected bar is considered.

Рассматривается задача устойчивости возмущённого движения составного упругого консольного стержня, нагруженного “следящей” силой и силой неизменного направления, параллельной оси стержня, приложенных в пролёте.

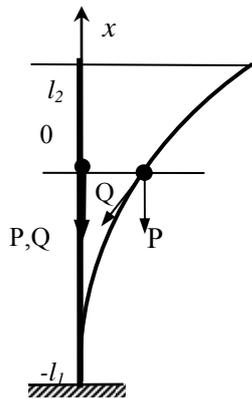
Случай одновременного действия следящей и неизменного направления сил, приложенных на свободном конце консольного стержня, приводится в [1], где показано стабилизирующее влияние сжимающей следящей нагрузки. В работе [2] рассмотрена задача устойчивости кусочно-неоднородной балки, когда на линии раздела материалов балки приложена следящая сила или сила неизменного направления. Показана возможность статической потери (дивергентной) устойчивости в случае действия следящей силы. В работе [3] в более общей постановке исследована устойчивость консольного стержня, сжатого тангенциальной силой. Рассмотрены различные варианты механических условий, осуществляемых в точке приложения силы. Обсуждены вопросы существования дивергентной и флаттерной типов потери устойчивости. Задача статической устойчивости разномодульного стержня, в середине которого приложена “мёртвая” или следящая сила, рассмотрена в [4]. В работах [5-6] рассмотрена задача устойчивости шарнирно опёртого составного стержня, изготовленного из двух различных материалов различных длин, под воздействием сосредоточенной силы, приложенной в пролёте. В работе [7] исследована задача устойчивости составного вязкоупругого стержня, нагруженного силой неизменного направления. Исследованы вопросы дивергентной и флаттерной форм потери устойчивости. Изучены также вопросы потери устойчивости стержня, когда одна из сил является сжимающей, а другая сила является растягивающей.

В настоящей работе показано, что одновременное воздействие сжимающих сил – неизменного направления и следящей, оказывает стабилизирующее действие при равенстве этих сил, а при остальных значениях сила неизменного направления оказывает эффект дестабилизации в смысле флаттерной потери устойчивости, а следящая сила приводит к стабилизации в смысле дивергентной потери устойчивости.

В случае, когда сила неизменного направления – растягивающая, а следящая – сжимающая, наличие силы неизменного направления приводит к стабилизации в смысле потери устойчивости флаттерного типа.

В случае же, когда сила неизменного направления является сжимающей, а следящая – растягивающей, наличие следящей силы приводит к дестабилизации в смысле дивергентной неустойчивости, а при равенстве этих сил происходит потеря устойчивости обоих типов.

1. Пусть упругий консольный стержень, состоящий из двух частей длинами  $l_1$  и  $l_2$ , имеющих жёсткости  $E_1J_1$  и  $E_2J_2$  соответственно, нагружен следящей силой  $Q$  и силой неизменного направления  $P$ , приложенных в пролёте – в точке сопряжения участков ( $x = 0$ ). При этом, конец  $x = -l_1$  жёстко закреплён, а второй конец  $x = l_2$  свободен (фиг.1).



Фиг.1

Будем считать, в целях упрощения, что погонная масса первой части стержня  $m_1 = \rho_1 S_1$  ( $\rho_1$  и  $S_1$  – плотность материала и площадь торцевого сечения соответственно), а также, что силы сопротивления пренебрежимо малы. Тогда, в рамках обычных предположений элементарной теории изгиба, дифференциальные уравнения малых изгибных колебаний для каждой части стержня около невозмущённой (прямолинейной) формы равновесия будут иметь вид:

$$E_1 J_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + (P + Q) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, w_1 = w_1(x, t), x \in [-l_1, 0] \quad (1)$$

$$E_2 J_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + m_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0, w_2 = w_2(x, t), x \in [0, l_2] \quad (2)$$

Здесь  $m_2 = \rho_2 S_2$  – погонная масса второй части стержня,  $\rho_2$  – плотность материала,  $S_2$  – площадь торцевого сечения;  $w_1(x, t)$ ,  $w_2(x, t)$  – малые прогибы в любой точке первой и второй частях стержня соответственно.

Граничные условия по концам стержня и в точке сопряжения будут

$$w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, x = -l_1 \quad (3)$$

$$w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, E_1 J_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = E_2 J_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, E_1 J_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + P \frac{\partial w_1}{\partial x} = E_2 J_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}, x = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}, x = l_2 \quad (5)$$

Задача устойчивости возмущённого движения консольного стержня состоит в нахождении критических значений параметров  $P$ ,  $Q$  и таких их сочетаний, при которых краевая задача, описываемая уравнениями (1), (2) и граничными условиями (3)-(5), имеет решения, отличные от тривиального.

Представляя решение уравнений (1), (2) в виде гармонических колебаний

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= f_1(x)e^{i\omega t}, x \in [-l_1, 0] \\ w_2(x, t) &= f_2(x)e^{i\omega t}, x \in [0, l_2] \end{aligned} \quad (6)$$

приходим к следующей краевой задаче на собственные значения:

$$f_1'''' + (k_1^2 + k_2^2)f_1'' = 0, x \in [-l_1, 0] \quad (7)$$

$$f_2'''' - \beta_2 \omega^2 f_2 = 0, x \in [0, l_2] \quad (8)$$

$$f_1 = f_1' = 0, x = -l_1$$

$$f_1 = f_2, f_1' = f_2', f_1'' = \alpha f_2'', f_1''' + k_1^2 f_1' = \alpha f_2''', x = 0 \quad (9)$$

$$f_2'' = f_2''' = 0, x = l_2$$

где

$$k_1^2 = P(E_1 J_1)^{-1}, k_2^2 = Q(E_1 J_1)^{-1}, \beta_2 = m_2(E_2 J_2)^{-1}, \alpha = E_2 J_2 (E_1 J_1)^{-1} \quad (10)$$

Подставляя общий интеграл уравнений изогнутой оси стержня (7), (8)

$$f_1(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4, x \in [-l_1, 0] \quad (11)$$

$$f_2(x) = C_5 \sin \Omega x + C_6 \cos \Omega x + C_7 \operatorname{ch} \Omega x + C_8 \operatorname{sh} \Omega x, x \in [0, l_2] \quad (12)$$

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \sqrt{(P+Q)/(E_1 J_1)}, \Omega^4 = \beta_2 \omega^2 = m_2 \omega^2 (E_2 J_2)^{-1} \quad (13)$$

и их производные в граничные условия (9), получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ .

Для нахождения критических значений параметров  $P$ ,  $Q$  и их сочетаний, приводящих к потере устойчивости в задаче (1)-(5), имеем алгебраическое уравнение относительно приведённой частоты  $\bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} &\alpha^2 \bar{\Omega}^4 \gamma^4 [2(1 - \cos r) - r \sin r] (1 - \cos \bar{\Omega} \operatorname{ch} \bar{\Omega}) - \alpha \bar{\Omega}^3 \gamma^3 r (\sin r - r \cos r) (\sin \bar{\Omega} \operatorname{ch} \bar{\Omega} + \cos \bar{\Omega} \operatorname{sh} \bar{\Omega}) - \\ & - \alpha \bar{\Omega}^2 \gamma^2 [r(r^2 - r_1^2) \sin r + 2r_1^2 (1 - \cos r)] \sin \bar{\Omega} \operatorname{sh} \bar{\Omega} - \alpha \bar{\Omega} \gamma r^3 \sin r (\sin \bar{\Omega} \operatorname{ch} \bar{\Omega} - \cos \bar{\Omega} \operatorname{sh} \bar{\Omega}) + \\ & + r^2 [r^2 - r_1^2 (1 - \cos r)] (1 + \cos \bar{\Omega} \operatorname{ch} \bar{\Omega}) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$r = kl_1, r_1 = k_1 l_1, \bar{\Omega} = \Omega l_2, \gamma = l_1 / l_2 \quad (15)$$

или, в соответствии с (10), (13)

$$r = \sqrt{(P+Q)/E_1 J_1 l_1}, r_1 = \sqrt{P/E_1 J_1 l_1}, \bar{\Omega}^4 = m_2 \omega^2 l_2^4 / E_2 J_2 \quad (16)$$

которое получается приравниваем нулю определителя, составленного из коэффициентов полученной системы относительно постоянных  $C_i$ .

Переходя к пределу при  $r \rightarrow 0$  в уравнении (14), в принятом приближении получаем следующее уравнение относительно частоты собственных колебаний незагруженного стержня:

$$\alpha^2 \bar{\Omega}^4 \gamma^4 (1 - \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) - 4\alpha \bar{\Omega}^3 \gamma^3 (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} + \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) - 12\alpha \bar{\Omega}^2 \gamma^2 \sin \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega} - 12\alpha \bar{\Omega} \gamma (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} - \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) + 12(1 + \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) = 0 \quad (17)$$

где  $\alpha, \gamma, \bar{\Omega}$  определены выражениями (10), (15) и (16).

2. Исследуем задачу устойчивости (1)-(5) в предположении

$$l_1 = l_2 = l \quad (\gamma = 1), \quad E_1 J_1 = E_2 J_2 = EJ \quad (\alpha = 1) \quad (18)$$

С помощью графо-аналитических и численных методов исследований получены следующие результаты.

1) Если  $Q = 0$ , то имеет место дивергентная неустойчивость при значениях

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 n^2 EJ}{4l^2} \quad n=1.2.3\dots \quad (19)$$

При  $n = 1$  критическое значение сжимающей силы

$$P_{\text{кр.див.}}^* = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \quad (20)$$

соответствует обычной потере устойчивости в смысле Эйлера [1].

2) Если  $P = 0$ , то имеет место неустойчивость флаттерного типа. Первое критическое значение следящей силы

$$Q_{\text{кр.фл.}}^* = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (21)$$

Это значение примерно в два раза меньше критического значения следящей силы, полученного В.В.Болотиным при решении задачи устойчивости стержня, сжатого следящей силой, рассмотренной в [1].

3) Если  $P = Q$ , то имеют место как дивергентная, так и флаттерная типы неустойчивости. Критические значения сил определяются выражениями

$$P_{\text{кр.див.}} = Q_{\text{кр.див.}} = \frac{\pi^2 EJ}{2l^2}, \quad (P + Q)_{\text{кр.див.}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (22)$$

$$P_{\text{кр.фл.}} = Q_{\text{кр.фл.}} = \frac{\pi^2 EJ}{\sqrt{2}l^2}, \quad (P + Q)_{\text{кр.фл.}} = \frac{\sqrt{2}\pi^2 EJ}{l^2} \quad (23)$$

В соответствии с (20) и (21), из (22) и (23) следует, что одновременное воздействие следящей и неизменного направления сил оказывает стабилизирующее действие. При этом, в смысле дивергентной неустойчивости значение (22) примерно в 4 раза превышает значение (20), а в смысле флаттерной неустойчивости значение (23) примерно в 1.4 раза превышает значение (21).

4) Если  $0 < P < 2.47 EJ/l^2$ , то имеет место неустойчивость флаттерного типа. Соответствующие критические значения приведены в табл. 1.

Таблица 1

$-P_{\text{кр.фл.}} l^2/EJ$	0.00	0.25	0.05	1.00	1.50	2.00	2.47
$-Q_{\text{кр.фл.}} l^2/EJ$	10.32	10.18	10.03	9.75	9.47	9.19	8.94

Как видно из табл.1,  $(P + Q)_{кр.фл.}$  примерно равно значению (21). Следовательно, сила  $P$  оказывает дестабилизирующее действие: с возрастанием значения  $P$  флаттер имеет место при более меньших значениях  $Q_{кр.фл.}$ , чем значение (21).

5) Если  $2.47 EJ/l^2 < P < 8.68 EJ/l^2$ , то имеют место как флаттерная, так и дивергентная неустойчивости. Причём потеря устойчивости дивергентного типа происходит не позже потери устойчивости флаттерного типа. Соответствующие критические значения приведены в табл.2.

Таблица 2

$-P_{кр.} l^2/EJ$	2.47	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	8.68
$-Q_{кр.фл.} l^2/EJ$	8.94	8.66	8.16	7,70	7.27	6.90	6.59	6.40
$-Q_{кр.див.} l^2/EJ$	0.00	1.67	3.74	5.00	5.75	6.18	6.37	6.40

В этом случае, также, наличие силы  $P$  оказывает эффект дестабилизации в смысле флаттерной неустойчивости – с возрастанием значения  $P$  флаттер имеет место при более меньших значениях  $Q_{кр.фл.}$ , чем значение (21). А наличие силы  $Q$  приводит к стабилизации возмущённого движения стержня в смысле дивергентной неустойчивости. Отметим, что при  $P_{кр} = 8.68 EJ/l^2$  имеем  $Q_{кр.фл.} = Q_{кр.див.} = 6.40 EJ/l^2$ .

6) Если  $P > 8.68 EJ/l^2$ , то имеет место только лишь дивергентная неустойчивость. Соответствующие критические значения приведены в табл.3.

Таблица 3

$-P_{кр.див.} l^2/EJ$	8.68	11.20	13.87	15.87	17.62	19.24	20.76	22.21
$-Q_{кр.див.} l^2/EJ$	6.40	6.00	5.00	4.00	3.00	2.00	1.00	0.00

Заметим, что уравнение (14), в котором  $\alpha = \gamma = 1$ , а  $r$  и  $r_1$  определяются выражениями (16), соответствует случаю, когда обе приложенные силы  $P$  и  $Q$  являются “сжимающими”:  $P_x < 0$ ,  $Q_x < 0$ .

Однако немалый интерес представляет исследование задачи устойчивости возмущённого движения рассматриваемой консоли в случае, когда одна из приложенных сил является растягивающей, а другая – сжимающей.

3. Рассмотрим задачу устойчивости возмущённого движения составной консоли в случае, когда в исходном положении равновесия сила неизменного направления  $P$  является растягивающей, а следящая сила  $Q$  – сжимающей:  $P_x > 0$ ,  $Q_x < 0$ .

Уравнение относительно собственных частот колебаний стержня в предположении (18) описывается следующим соотношением:

при  $P > Q$

$$\begin{aligned} & \bar{\Omega}^4 [2(1 - \text{chr}) + r \text{shr}] (1 - \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) - \bar{\Omega}^3 r (r \text{chr} - \text{sh} r) (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} + \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) - \\ & - \bar{\Omega}^2 [r(r^2 - r_1^2) \text{shr} - 2r_1^2 (1 - \text{chr})] \sin \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega} - \bar{\Omega} r^3 \text{shr} (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} - \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) + \\ & + r^2 [r^2 - r_1^2 (1 - \text{chr})] (1 + \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$r = \sqrt{(P-Q)/EJl}, r_1 = \sqrt{P/EJl}, \bar{\Omega}^4 = m_2 \omega^2 l^4 / EJ \quad (25)$$

при  $P < Q$

$$\begin{aligned} & \bar{\Omega}^4 [2(1 - \cos r) - r \sin r] (1 - \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) - \bar{\Omega}^3 r (\sin r - r \cos r) \times \\ & \times (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} + \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) - \bar{\Omega}^2 [r(r^2 + r_1^2) \sin r - 2r_1^2 (1 - \cos r)] \sin \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega} - \\ & - \bar{\Omega} r^3 \sin r (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} - \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) + r^2 [r^2 + r_1^2 (1 - \cos r)] (1 + \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$r = \sqrt{(Q-P)/EJl}, r_1 = \sqrt{P/EJl}, \bar{\Omega}^4 = m_2 \omega^2 l^4 / EJ \quad (27)$$

В этом случае при  $P > Q$  возмущённое движение стержня устойчиво. А при  $P < Q$  имеет место только флаттерная неустойчивость. При этом, наличие консервативной составляющей  $P$  приводит к стабилизации. Критические значения приведены в табл. 4.

Таблица 4

$P_{\text{кр.фл.}} l^2 / EJ$	0.00	0.25	1.00	4.00	16.00	25.00	29.16	34.93
$-Q_{\text{кр.фл.}} l^2 / EJ$	10.32	10,47	10.92	12.85	21.98	30.13	34.32	41.42

Если  $P = Q \neq 0$ , то уравнение относительно собственных частот колебаний стержня будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \bar{\Omega}^4 \gamma^4 (1 - \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) - 4\alpha \bar{\Omega}^3 \gamma^3 (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} + \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) - (12 - r_1^2) \alpha \bar{\Omega}^2 \gamma^2 \sin \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega} - \\ & - 12\alpha \bar{\Omega} \gamma (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} - \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) + (12 + 6r_1^2) (1 + \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) = 0 \end{aligned}$$

$$r_1 = \sqrt{P/EJl}, \bar{\Omega}^4 = m_2 \omega^2 l^4 / EJ$$

При этом имеет место только дивергентная неустойчивость при  $P_{\text{кр.див}}^* = Q_{\text{кр.див}}^* \approx 43,13 EJl^{-2}$ .

4. Теперь рассмотрим задачу устойчивости возмущённого движения составной консоли в случае, когда в исходном положении равновесия сила неизменного направления  $P$  является сжимающей, а следящая сила  $Q$  - растягивающей:  $P_x < 0$ ,  $Q_x > 0$ . Уравнение относительно собственных частот колебаний стержня в предположении (18) описывается следующим соотношением:

при  $P < Q$

$$\begin{aligned} & \bar{\Omega}^4 [2(1 - \text{chr}) + r \text{shr}] (1 - \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) - \bar{\Omega}^3 r (\text{chr} - \text{shr}) (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} + \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) - \\ & - \bar{\Omega}^2 [r(r^2 + r_1^2) \text{shr} + 2r_1^2 (1 - \text{chr})] \sin \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega} - \bar{\Omega} r^3 \text{shr} (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} - \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) + \\ & + r^2 [r^2 + r_1^2 (1 - \text{chr})] (1 + \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$r = \sqrt{(Q-P)/EJl}, r_1 = \sqrt{P/EJl}, \bar{\Omega}^4 = m_2 \omega^2 l^4 / EJ \quad (29)$$

а при  $P > Q$  совпадает с уравнением (14), в котором  $r$  и  $r_1$  определяются выражениями (25).

В этом случае при  $P < Q$  возмущённое движение стержня устойчиво. А при  $P > Q$  имеет место только дивергентная неустойчивость. При этом наличие

следящей силы  $Q$  приводит к дестабилизации. Критические значения приведены в табл.5.

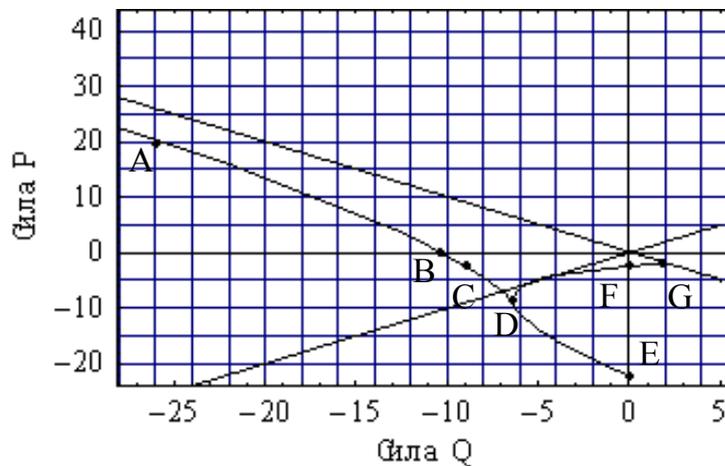
Таблица 5

$-P_{кр.див.} l^2/EJ$	2.47	2.40	2.22	2.06	2.00
$-Q_{кр.див.} l^2/EJ$	0.00	0.25	1.00	1.69	2.00

Если  $P = Q \neq 0$ , то уравнение относительно собственных частот колебаний стержня имеет вид

$$\alpha^2 \bar{\Omega}^4 \gamma^4 (1 - \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) - 4\alpha \bar{\Omega}^3 \gamma^3 (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} + \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) - \alpha \bar{\Omega}^2 \gamma^2 (12 + r_1^2) \sin \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega} - 12\alpha \bar{\Omega} \gamma (\sin \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega} - \cos \bar{\Omega} \text{sh} \bar{\Omega}) + (12 - 6r_1^2) (1 + \cos \bar{\Omega} \text{ch} \bar{\Omega}) = 0$$

$$r_1 = \sqrt{P/EJl}, \quad \bar{\Omega}^4 = m_2 \omega^2 l^4 / EJ :$$



Фиг.2

При этом имеют место как дивергентная, так и флаттерная неустойчивости при  $P_{кр.див.}^* = Q_{кр.див.}^* \approx 2EJl^{-2}$  и  $P_{кр.фл.} = Q_{кр.фл.} \approx 43,23EJl^{-2}$ . Критические значения сил  $P$  и  $Q$ , приводящих к флаттерной неустойчивости, на порядок больше критических значений, приводящих к дивергентной неустойчивости.

На фиг. 2 показан график, иллюстрирующий явление потери устойчивости возмущённого движения составного стержня под воздействием силы неизменного направления и следящей силы, построенный по значениям, приведённым в табл. 1–5.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
2. G.E. Lee and E. Reissner. Note on a Problem of Beam Bending. J. of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), Vol. 26, P. 839-840, 1975.
3. Белубекян М. В., Мовсисян Л. А. К задаче устойчивости консольного стержня, сжатого следящей нагрузкой. /Ереван: Тр. международной конференции

- “Математическое моделирование механики сплошных сред. Методы граничных элементов. Санкт-Петербург. Т.2. 2003. С.95-98.
4. Амбарцумян С.А. Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Ереван: Изд. РАУ, 2004. 185 с.
  5. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
  6. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400 с.
  7. Мовсисян Л.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1991. Т.44. № 4. С. 3–11.

**Казарян Карен Багратович**

Д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник

Института механики НАН РА

адрес: пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>, 0019, Ереван, Армения

Е-mail: [ghkarren@gmail.com](mailto:ghkarren@gmail.com)

**Мартirosян Стелла Размиковна**

Кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики НАН РА

Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>

Тел: (+37410) 52-48-90, Е-mail: [mehchins@sci.am](mailto:mehchins@sci.am)

**Саноян Юрий Геворкович**

к.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт механики НАН РА

Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24<sup>б</sup>,

Тел: (+37410) 52-48-90

Е-mail: [yusanoyan@mechins.sci.am](mailto:yusanoyan@mechins.sci.am)

Поступила в редакцию 3.04.2009