ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 63, №1, 2010 Механика

УДК 539.3

ОТРАЖЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ ОТ КРОМКИ ПЛАСТИНКИ

БЕЛУБЕКЯН М.В., ХАЧАТРЯН Л.С.

Ключевые слова: пластина, упругая волна, изгиб, отражение.

Keywords: plate, elastic wave, bending, reflection.

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Լ. Ս Խաչատրյան
Ծռման ալիքի անդրադարձումը սալի սահմաններից

Ծռման ալիքի անդրադարձումը սալի սահմաններից խնդիրը ուսումնասիրվել է բազմիցս: Համեմատաբար քիչ ուսումնասիրված հարցերից է ծռման ալիքի անդրադարձումը սալի հարթ եզրերից: Այս աշխատանքում ներկայացնում ենք հետևյալ խնդիրը՝ ծռման ալիքի անդրադարձումը սալի տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Ազատ եզրի մասնավոր դեպքում, երբ բացակայում է ալիքի անդրադարձումը, ստացվում է տեղայնացված ծռման տատանումների խնդիրը:

M.V. Belubekyan, L.S. Khachatryan
Reflection of bending Waves from Border of the Plate

To problems of the reflection of the bending waves from flat border of the ambience dedicated to the multiple studies. Relatively little works are connected with questions of the reflection cuved waves from flat edge of the thin plate. In this work happen to the decisions of the problem of the plate under different border condition. For partial case of the free edge, as limiting case of the absence of the reflected wave, is got decision of the problem localized curved variations.

Задачам отражения упругих волн от плоской границы среды посвящены многочисленные исследования. Сравнительно мало работ связаны с вопросами отражения изгибных волн от плоской кромки тонкой пластинки. В настоящей работе приводятся решения задачи отражения изгибных волн от кромки пластинки при различных граничных условиях. Для частного случая свободной кромки, как предельный случай отсутствия отраженной волны, получается решение задачи локализованных изгибных колебаний .

Задачам отражения упругих волн от плоской границы среды посвящены многочисленные исследования [1]. Сравнительно мало работ связаны с вопросами отражения изгибных волн от плоской кромки тонкой пластинки [2]. В настоящей работе приводятся решения задачи отражения изгибных волн от кромки пластинки при различных граничных условиях. Для частного случая свободной кромки, как предельный случай отсутствия отраженной волны, получается решение задачи локализованных изгибных колебаний [3,4].

1. Пусть упругая пластинка занимает область

$$-\infty < x < \infty, 0 \le y < \infty, -h \le z \le h$$

На кромку пластинки $y = 0$ падает изгибная волна. Требуется определить отраженную волну при различных условиях закрепления кромки y=0.

Уравнение изгибных колебаний изотропной пластинки по теории Кирхгофа имеет вид [5]

$$D\Delta^2 w + 2gh\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1)$$

где $w-$ функция прогиба пластины, $\rho-$ плотность материала, $D-$ жесткость на изгиб

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \qquad (1.2)$$

$E-$ модуль Юнга, $\nu-$ коэффициент Пуассона.

Если представить решение уравнения (1.1) в виде гармонических волн [2]

$$w = w_0 \exp i(\omega t - k_1 x + k_2 y) \qquad (1.3)$$

то получается следующее характеристическое уравнение:

$$D(k_1^2 + k_2^2)^2 - 2\rho h\omega^2 = 0 \qquad (1.4)$$

Из (1.4) можно определить волновое число k_2 посредством k_1 и ω в виде четырех корней

$$k_{21} = -k_{22} = \sqrt{\Omega - k_1^2}, \quad k_{23} = -k_{24} = i\sqrt{\Omega + k_1^2} \qquad (1.5)$$

Очевидно, что для существования падающей волны необходимо условие

$$\Omega > k_1^2, \quad \Omega = (2\rho h)^{1/2} D^{1/2}\omega \qquad (1.6)$$

Из (1.3) и (1.5), с учетом (1.6) следует, что решение для падающей волны имеет вид:

$$W_{\text{п}} = A\exp i(\omega t - k_1 x + k_{21} y), \ k_1 \geq 0 \qquad (1.7)$$

и для отражённой волны

$$W_{\text{отр}} = B\exp i(\omega t - k_1 x - k_{21} y) + C\exp i(\omega t - k_1 x + k_{23} y) \qquad (1.8)$$

Слагаемое в (1.8) с амплитудой C является неоднородной волной, т.е. она затухает по глубине. Амплитуды отражённых волн B и C должны определяться удовлетворением граничными условиями при $y = 0$.

2. Вначале рассматривается случай жестко закрепленного края

$$W = 0, \ \partial w/\partial y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \qquad (2.1)$$

Подстановка

$$W = W_{\text{п}} + W_{\text{отр}}, \qquad (2.2)$$

согласно (1.7), (1.8), в граничные условия (2.1) приводит к системе алгебраических уравнений относительно искомых постоянных B и C, откуда и получается

$$B = \Omega^{-1}(\Omega - 2k_1^2 + 2i\sqrt{\Omega^2 - k_1^2})A; \ C = -2\Omega^{-1}(\Omega - k_1^2 - i\sqrt{\Omega^2 - k_1^4})A \qquad (2.3)$$

Из выражения (2.3) следует, что при условии $\Omega = 2k_1^2$ фаза отраженной волны меняется на 0,5π. В (2.3) частный случай $k_1 = 0$ соответствует нормально падающей волне.

Если край пластинки шарнирно закреплён, то должны выполняться условия

$$W = 0, \ \partial^2 w/\partial y^2 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \qquad (2.4)$$

Требуя, чтобы решение (2.2) удовлетворяло условию (2.4), получим

$$B = -A, \quad C = 0 \qquad (2.5)$$

т.е. при шарнирном закреплении неоднородная волна не существует. Решение для этого случая приводится в монографии [2].

Для варианта граничных условий скользящего контакта

$$\partial w/\partial y = 0,\quad \partial^3 w/\partial y^3 = 0 \tag{2.6}$$

искомое решение имеет вид

$$B = A,\ C = 0 \tag{2.7}$$

Граничные условия свободного края имеют вид

$$M_y = 0,\quad \tilde{N}_y = 0 \quad \text{при}\ y = 0 \tag{2.8}$$

или, согласно [5],

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^3 w}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{2.9}$$

В [2] вместо условия равенства нулю обобщенного перерезывающего усилия $\tilde{N}_y$ используется условие равенства нулю перерезывающего усилия N_y, т. е. вместо второго условия из (2.9) берётся условие $\partial^3 w/\partial y^3 = 0$.

Удовлетворение граничным условиям (2.9) приводит к следующей системе уравнений:

$$(q_2^2 + \nu)B - (q_1^2 - \nu)C = -(q_2^2 + \nu)A \tag{2.10}$$

$$q_2(q_2^2 + 2 - \nu)B + iq_1(q_1^2 - 2 + \nu)C = q_2(q_2^2 + 2 - \nu)A$$

где $q_1 = \sqrt{\eta + 1},\quad q_2 = \sqrt{\eta - 1},\quad \eta = k_1^{-2}\Omega$ (2.11)

Используя преобразования

$$\begin{aligned} &\pm iq_1(q_2^2 + \nu)(q_1^2 - 2 + \nu) + q_2(q_1^2 - \nu)(q_2^2 + 2 - \nu) = \\ &= \pm i(q_1 \mp iq_2)[q_1^2 q_2^2 - 2i(1-\nu)q_1 q_2 \pm \nu^2] \end{aligned} \tag{2.12}$$

получим решение системы уравнений в виде

$$B = -\frac{(q_1 + iq_2)[q_1^2 q_2^2 - 2i(1-\nu)q_1 q_2 - \nu^2]}{(q_1 - iq_2)\Delta_1}A \tag{2.13}$$

$$C = -\frac{2i}{q_1 - iq_2}\frac{q_2(q_2^2 + \nu)(q_1^2 - \nu)}{\Delta_1}A$$

где

$$\Delta_1 = q_1^2 q_2^2 - 2i(1-\nu)q_1 q_2 - \nu^2 \tag{2.14}$$

Из (2.13) в предельном случае $\Delta_1 \to 0$ получается дисперсионное уравнение локализованных изгибных колебаний пластинки, допускающее решение, удовлетворяющее условию $\eta < 1$ [4].

3. Как видно из предыдущего пункта, для граничных условий шарнирного закрепления и скользящего контакта, в отличие от граничных условий жесткого закрепления и свободного края, неоднородная волна не отражается $(C = 0)$. Можно ли заменой граничного условия жесткого закрепления условием упругого закрепления устранить отраженную неоднородную волну? Можно ли укреплением края свободной пластинки ребром жесткости устранить эту волну?

В частности, если к свободному краю пластинки прикреплено ребро, то согласно монографии [6], наиболее простой вариант учета ребра является замена граничных условий (2.9) условиями

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^3 w}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}+\frac{E_o I}{D}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \quad \text{при } y=0 \tag{3.1}$$

где $E_o I -$ жесткость ребра на изгиб, $E_o -$ модуль Юнга материала ребра, I – момент инерции поперечного сечения ребра.

Подстановка решения (2.2), с учетом (1.7), (1.8), в граничные условия (3.1) приводит к системе уравнений относительно искомых постоянных, откуда и, аналогично предыдущим случаям, они определяются

$$B=\frac{-(q_1+iq_2)[q_1^2q_2^2-2i(1-\nu)q_1q_2-\nu^2]}{(q_1-iq_2)[\Delta_1+\alpha k_1(q_1+iq_2)]}A \tag{3.2}$$

$$C=-\frac{2i(q_2^2+\nu)[q_2(q_1^2-\nu)+i\alpha k_1]}{(q_1-iq_2)[\Delta_1+\alpha k_1(q_1+iq_2)]}B$$

где $\alpha = E_o ID^{-1}$ (3.3)

Из выражения (3.2) видно, что нельзя подбором параметра α, характеризующего изгибную жесткость ребра, устранить неоднородную волну.

ЛИТЕРАТУРА

1. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam, North-Holl. Publ. Co, 1984, p. 425.
2. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) М.: Наука, 1982. 332 с.
3. Коненков Ю. К. Об изгибной волне “рэлеевского” типа. //Акуст. журн. 1960. №1. С.124-126.
4. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. ///ПМ. 1994. Т.30, № 2. С. 61-68.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
6. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Изд. Физматлит, 1963. 636 с.

Белубекян Мелс Вагаршакович
Профессор, кандидат физ.-мат. наук, главный научный сотрудник,
Институт механики НАН РА
Адрес: 0019 Ереван, пр.Баграмяна 24Б
Тел.: (+37410) 52-15-03, E-mail: mbelubekyan@sci.am

Хачатрян Лейли Самвеловна
Ереванский колледж права, экономики и управления,
преподаватель
Дом.тел.: (+37410) 66-69-88

Поступила в редакцию 17.04.2009