

УДК 621.983

## МЕХАНИКА ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ТОНКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Назарян Э.А., Араб Н.Н., Аракелян М.М., Маркосян А.С.

**Ключевые слова:** формоизменение, вытяжка, отбортовка, листовой металл, вид деформации.

**Key words:** forming, deep drawing, flanging, sheet metal, deformation types.

Է.Ա.Նազարյան, Ն.Ն.Արաբ, Մ.Մ.Արակելյան, Ա.Ս.Մարկոսյան  
Բարակ օղակաձևված թիթեղների ձևափոխման մեխանիկան

Դեֆորմացիոն ամրացման և հաստության փոխկապակցված փոփոխության պայմաններում կատարված է բարակ օղակաձև թիթեղների ձևափոխման վերլուծությունը մեծ պլաստիկ դեֆորմացիաների դեպքում: Հաստատված է, որ համասեռ ամրացման դեպքում պլաստիկության հարթ լարվածային վիճակի հավասարումները արտապատկերվում են պլաստիկության գլանի  $\pi$  - հարթության վրա շառավղային լարման և համարժեք դեֆորմացիայի փոփոխման արագությունների միջև համեմատական կախվածության տեսքով: Դեֆորմացվող նյութի իդեալ կոշտ-պլաստիկ և ամրացվող մոդելների համար, երկառնային միանշան և տարանշան լարված վիճակների դեպքում ստացված են գլխավոր լարումների և դեֆորմացիաների բաշխման համար անալիտիկ արտահայտություններ:

E.A.Nazaryan, N.N.Arab, M.M.Arakelyan, A.S. Markosyan  
Mechanics of Forming thin Ring Plates

The analysis of forming thin ring plates in case of the big plastic deformations taking into account the interconnected change of material thickness and deformation hardening is carried out. It is established, that in case of isotropic hardening the equations characterizing plastic flat intense condition, are displayed on  $\pi$ -planes of the plasticity cylinder in the form of proportional dependence between speeds of radial pressure change and equivalent deformation. Analytical dependences for distribution of the main pressure and deformations are obtained at biaxial homonymic and heteronymic strained conditions for ideally stiff-plastic and hardening models of the deformable material.

Проведен анализ формоизменения тонких кольцевых пластин в случае больших пластических деформаций с учетом взаимосвязанного изменения толщины материала и деформационного упрочнения. Установлено, что в случае изотропного упрочнения уравнения, характеризующие пластическое плоское напряженное состояние, отображаются на  $\pi$ -плоскости цилиндра пластичности в виде пропорциональной зависимости между скоростями изменения радиального напряжения и эквивалентной деформации. Получены аналитические зависимости для распределения главных напряжений и деформаций при двухосно-одноименном и разноименном напряженных состояниях для идеально жестко-пластической и упрочняющей моделей деформируемого материала.

### 1. Введение

Многочисленные прикладные проблемы формоизменения листового металла требуют решения задач по определению напряженно-деформированного состояния при больших пластических деформациях. К таким проблемам относится прогнозирование параметров точности и прочности изделий, изготовленных методами формоизменения листового металла.

Возможности существующих приближенных методов анализа подобных задач для реального листового металла (с учетом деформационного упрочнения) ограничены по области приложений и особенно по точности получаемых решений [1,2,3]. Поэтому представляется целесообразной математически корректная

постановка задач формоизменения листового металла в условиях взаимосвязанного изменения толщины и деформационного упрочнения.

При осесимметричном формоизменении листового металла точность изделий зависит от стабильности диаметральных размеров, которая для изотропного материала при отсутствии остаточных напряжений обусловлена распределением толщины по образующей изделия. Прочность изделий при тех же условиях определяется итоговым распределением напряжения текучести материала. В процессах формоизменения листового металла напряжение текучести функционально связано с эквивалентной деформацией, которая, в свою очередь, однозначно определяется главными деформациями. Следовательно, проблема прогнозирования параметров прочности и точности сводится к установлению величины и распределения эквивалентной деформации по образующей.

В настоящей работе разработан общий метод анализа задач осесимметричного формоизменения листового металла в условиях взаимосвязанного изменения толщины и деформационного упрочнения и продемонстрировано применение метода при деформировании тонких кольцевых пластин.

## 2. Общий метод анализа формоизменения листового металла при осевой симметрии деформирования

При осевой симметрии деформирования принимается, что формоизменение листового металла происходит в условиях плоского напряженного состояния [1,2,3]. Напряжения и деформации могут быть определены совместным решением уравнений теории пластичности и уравнения, описывающего деформационное упрочнение [1, 5].

Согласно критерию текучести Мизеса, напряжение текучести имеет вид:

$$\sigma_s = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2] \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z$  – главные напряжения в радиальном, окружном направлении и по толщине, соответственно.

Напряжение текучести (1) зависит от величины эквивалентной деформации, которая определяется следующим образом:

$$\varepsilon_i = \left\{ \frac{2}{9} [(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\rho)^2] \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$  – главные деформации в тех же направлениях, удовлетворяющие условию постоянства объема:

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \quad (3)$$

Соотношения между напряжениями и приращениями главных деформаций имеют вид:

$$\frac{d\varepsilon_\rho - d\varepsilon_\theta}{\sigma_\rho - \sigma_\theta} = \frac{d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_z}{\sigma_\theta - \sigma_z} = \frac{d\varepsilon_z - d\varepsilon_\rho}{\sigma_z - \sigma_\rho} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_s}, \quad (4)$$

где  $d\varepsilon_i$  – интенсивность приращения главных деформаций, которая определяется соотношением:

$$d\varepsilon_i = \left\{ \frac{2}{9} [d\varepsilon_\rho - d\varepsilon_\theta]^2 + (d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_\rho)^2 \right\}^{1/2} \quad (5)$$

В условиях плоского напряженного состояния ( $\sigma_z = 0$ ) из (4) следует:

$$d\varepsilon_\rho = \frac{2\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_\rho} d\varepsilon_\theta, \quad d\varepsilon_z = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} d\varepsilon_\theta. \quad (6)$$

Зависимость между напряжением текучести (1) и эквивалентной деформацией (2) удобно представить в виде степенной функции [2,3].

$$\sigma_s = A\varepsilon_i^n, \quad (7)$$

где  $A$  и  $n$  – параметры деформационного упрочнения, зависящие от механических свойств листового металла.

Уравнение равновесия элемента, вырезанного главными сечениями из осесимметрично нагруженной оболочки переменной толщины имеет вид [1]:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho \left(1 + \frac{\rho ds}{s d\rho}\right) - \sigma_\theta = 0 \quad (8)$$

Приращения главных деформаций в окружном направлении и в направлении толщины связаны с приращением радиуса  $d\rho$  и толщины  $ds$  соотношениями

$$d\varepsilon_\theta = \frac{d\rho}{\rho}, \quad d\varepsilon_z = \frac{ds}{s}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), с учетом зависимостей (6), после некоторых преобразований получим

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2 \frac{\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2}{\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} = 0. \quad (10)$$

Интегрирование (10) с учетом (1) возможно только для идеально жестко-пластической модели деформируемого материала ( $\sigma_s = \text{const}$ ). При интегрировании (10) с учетом деформационного упрочнения необходимо принятие дальнейших упрощающих допущений, основным из которых является условие постоянства толщины. Такое допущение равносильно утверждению, что формоизменение листового металла происходит в условиях плоской деформации, что в принципе исключает возможность решения задач, в которых реализуется плоское напряженное состояние.

## 2.1. Деформации и напряжения при плоском напряженном состоянии и их представление

В условиях больших пластических деформаций из условия (3) следует, что деформации взаимосвязаны и могут быть представлены на плоскости в косоугольных координатах. Рассмотрим  $\pi$ -плоскость цилиндра пластичности, где начало координат соответствует нулевым деформациям (состоянию заготовки до деформирования), а геометрическое место точек, последовательных деформированных состояний представляет собой путь деформации рассматриваемой материальной частицы. В общем случае текущие величины главных деформаций представляют собой проекции вектор-функции  $\bar{\varepsilon}_i$  на косоугольные координатные оси, путь деформации описывается вектор-функцией  $\bar{\varepsilon}_i(\rho)$  ( $\rho$  – некоторый параметр времени), а направление скорости деформации  $d\bar{\varepsilon}_i/d\rho$  совпадает с касательной к пути деформации. Модуль текущей величины вектор-функции  $\bar{\varepsilon}_i(\rho)$  численно равен эквивалентной деформации (2) [4].

Приращения главных деформаций в рассматриваемой плоскости удобно представить в тригонометрической форме:

$$d\varepsilon_\rho = d\varepsilon_i \cos \varphi, \quad d\varepsilon_\theta = d\varepsilon_i \cos(\varphi + \frac{2}{3}\pi), \quad d\varepsilon_z = d\varepsilon_i \cos(\varphi + \frac{4}{3}\pi), \quad (11)$$

где  $\varphi$  – угол вида деформированного состояния.

Из совместного решения (6) и (11) устанавливаются зависимости радиальных и окружных напряжений от угла вида деформированного состояния:

$$\sigma_\rho = \sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6), \quad \sigma_\theta = -\sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi, \quad (12)$$

удовлетворяющие критерию текучести Мизеса (1).

Для облегчения интерпретации полученных результатов начало отсчета на  $\pi$ -плоскости совмещено с осью  $\varepsilon_\rho$ , а увеличение угла  $\varphi$  взято в направлении против часовой стрелки. При изменении  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  радиальные лучи делят  $\pi$ -плоскость на 12 секторов с центральными углами, равными  $\pi/6$  (фиг. 1а).

В указанном диапазоне изменения параметра  $\varphi$  вектор-функция  $\vec{\varepsilon}_i(\rho)$  становится либо параллельной, либо перпендикулярной к координатным осям  $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ , вследствие чего главные деформации по этим осям изменяются в пределах от единицы до нуля.

С учетом зависимостей (11) и (12) уравнение равновесия (10) можно представить на  $\pi$ -плоскости в достаточно простой форме:

$$d\sigma_\rho = \sigma_s d\varepsilon_i. \quad (13)$$

Таким образом, система уравнений, характеризующих плоское напряженное состояние, отображается на  $\pi$ -плоскости в виде пропорциональной зависимости между скоростями изменения радиального напряжения и эквивалентной деформации. Коэффициентом пропорциональности в (13) является напряжение текучести материала, характеризующее, согласно (7), деформационное упрочнение.

При допущении  $d\varepsilon_i = |d\varepsilon_\theta|$  и использовании критерия текучести  $\sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_s$  дифференциальная зависимость (13) принимает вид:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0, \quad \text{что представляет собой обычно применяемое в приложениях}$$

уравнение равновесия без учета изменения толщины материала.

### 3. Анализ формоизменения тонких кольцевых пластин

Рассмотрим формоизменение тонкой кольцевой пластины размерами  $R_0, r_0, s_0$ . При определенных размерных характеристиках пластины и деформирующего инструмента возможны следующие варианты формоизменения:

- вытяжка цилиндрического изделия при постоянной или переменной величине диаметра центрального отверстия (фиг. 1с).
- отбортовка центрального отверстия при постоянной или переменной величине диаметра наружного контура (фиг. 1в).

Указанный характер формоизменения позволяет условно разделить деформацию кольцевой пластины на две составляющие: растяжение кольцевых пластин с размерами  $R_0, a, s_0$  и  $a, r_0, s_0$  под нагрузками интенсивности  $\sigma_s$ , приложенными, соответственно, к внутреннему и наружному контурам. Очевидно, что при такой

схематизации не учитываются напряжения, возникающие вследствие изгиба материала на радиусных кромках деформирующих инструментов, а участок кольца, разделяющий зону вытяжки от зоны отбортовки, заменяется условной окружностью радиуса  $a$ .

Проблема интегрирования (13) заключается в том, что в общем случае приращение эквивалентной деформации, определяемое дифференцированием (2), не равняется интенсивности приращения главных деформаций (5). Легко показать, что такое равенство возможно только при пропорциональном изменении главных деформаций, что соответствует радиальным путям деформаций на  $\pi$ -плоскости. При таком допущении из (13) следует:

$$\sigma_{\rho} = \frac{A}{n+1} \varepsilon_i^{n+1} + c. \quad (14)$$

Постоянную интегрирования находим из граничных условий, по которым для свободных от нагрузки контуров радиальные напряжения равны нулю. С учетом граничных условий, приравняв результат интегрирования соотношению (12), имеем:

$$\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_{\text{ед}}^{n+1} = (1+n)\varepsilon_i^n \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6), \quad (15)$$

где  $\varepsilon_{\text{ед}}$  – эквивалентная деформация краевого элемента.

Пределы изменения угла вида деформированного состояния в рассматриваемых задачах устанавливаются в зависимости от знака окружной деформации и величины наибольших растягивающих напряжений. Из зависимостей (12) следует, что в направлениях  $\varphi = 0, \varphi = 5\pi/3$  радиальные напряжения достигают величины,

равной пределу текучести материала. В диапазоне углов  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$  окружные

деформации отрицательны, а в диапазоне  $\frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$  положительны. Таким

образом, все виды деформаций, которые, в принципе, могут реализоваться в процессах вытяжки и отбортовки, располагаются на полуплоскости и занимают равные сектора с центральными углами  $\varphi = \pi/3$  (фиг.1а).

Если путь деформации совпадает с осью  $\varepsilon_{\theta}$ , то  $\varepsilon_{\theta}$  – деформация растяжения в окружном направлении, а  $\varepsilon_{\rho}, \varepsilon_z$  – деформации сжатия, численно равные  $\varepsilon_{\theta}/2$ .

Если путь деформации совпадает с осью  $\varepsilon_{\rho}$ , то  $\varepsilon_{\rho}$  – деформация растяжения в радиальном направлении, а  $\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_z$  – деформации сжатия, численно равные  $\varepsilon_{\rho}/2$ .

Если путь деформации совпадает с отрицательным направлением оси  $\varepsilon_z$ , то  $\varepsilon_z$  – деформация сжатия по толщине, а  $\varepsilon_{\rho}, \varepsilon_{\theta}$  – деформации растяжения, численно

равные  $\varepsilon_z/2$ . Если путь деформации  $\varepsilon_{\rho} = 0$ , а  $\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_z$  равны по величине и противоположны по знаку, то имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости  $(\theta, z)$ . Если путь деформации совпадает с направлением  $\varepsilon_{\theta} = 0$ , а

$\varepsilon_{\rho}, \varepsilon_z$  равны по величине и противоположны по знаку, то имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости  $(\rho, z)$ . Если путь деформации совпадает с

направлением  $\varepsilon_z = 0$ , а  $\varepsilon_{\rho}, \varepsilon_{\theta}$  равны по величине и противоположны по знаку, то имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости  $(\rho, \theta)$ . Таким

образом, пути деформации с углами  $\varphi = 3\pi/2, 11\pi/6, \pi/6$  соответствуют чистому сдвигу, соответственно, в плоскостях  $(\theta, z), (\rho, z), (\rho, \theta)$ , а с углами  $\varphi = 0, 4\pi/3, \pi/3, 5\pi/3$  – чистому растяжению и сжатию, соответственно, в радиальном, окружном направлениях и в направлении по толщине (фиг.1).

Полученное решение позволяет установить взаимосвязь между координатами рассматриваемой материальной частицы и углом вида деформированного состояния. Для этого, продифференцировав (15) при  $\varepsilon_{\delta} = 0$ , с учетом (9), (11), имеем:

$$\frac{d\rho}{\rho} = (1+n)\left(\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{6}\cos^2\varphi\right)d\varphi. \quad (16)$$

После интегрирования (16) приводится к виду

$$\ln\rho = (1+n)\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{12}\sin 2\varphi\right) + C. \quad (17)$$

Постоянная интегрирования в (17) находится из следующих граничных условий: для внешней кольцевой пластины  $\rho = R_0, \varphi = \pi/3$ ; для внутренней кольцевой пластины  $\rho = r_0, \varphi = 4\pi/3$ . С учетом граничных условий выражение (17) принимает вид:

для внешней кольцевой пластины

$$\frac{\rho}{R_0} = \exp\left\{(1+n)\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(\varphi - \pi/3) - \frac{1}{4}\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{12}\sin 2\varphi\right]\right\} \quad (18)$$

для внутренней кольцевой пластины:

$$\frac{\rho}{r_0} = \exp\left\{(1+n)\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(\varphi - 4\pi/3) - \frac{1}{4}\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{12}\sin 2\varphi\right]\right\} \quad (19)$$

Подставляя в (18) и (19) предельные значения углов вида деформированного состояния  $\varphi = 0, \varphi = \frac{5}{3}\pi$ , при которых растягивающие напряжения достигают величины, равной пределу текучести материала, получим отношение наибольших размеров кольцевых пластин:

$$\frac{a}{r_0} = \frac{R_0}{a} = \exp\left[(1+n)\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right)\right] \approx \exp[0,854(1+n)] \quad (20)$$

При  $n=0$  предельные величины отношений  $R_0/a$  и  $a/r_0$  равны 2.35, что совпадает с результатом работы [4] и достаточно близко к величинам, обычно реализуемым в экспериментах [1,2].

Используя значение эквивалентной деформации, легко определить главные деформации для начального пластического состояния кольцевых пластин:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{1+n}{2}\left(1 + \cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi\right), \quad \varepsilon_\theta = -\frac{1+n}{2}\left(\cos 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi\right) \\ \varepsilon_z &= -\frac{1+n}{2}\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi\right) \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, зависимости (12), (15), (18), (19) и (21), являясь параметрическим решением задачи, полностью определяют напряженно-деформированное состояние

кольцевых пластин с учетом взаимосвязанного изменения толщины материала и деформационного упрочнения.

Очевидно, что, исключая параметр  $\varphi$ , можно получить зависимости, характеризующие распределение главных напряжений и деформаций по координате материальной частицы для начальных пластических состояний пластин.

#### 4. Обсуждение результатов

На фиг.2а,в представлены графики распределения главных напряжений и толщины, а на фиг.2с,d – графики распределения эквивалентной и главных деформаций по координате материальной частицы, соответственно, для внешней и внутренней кольцевых пластин.

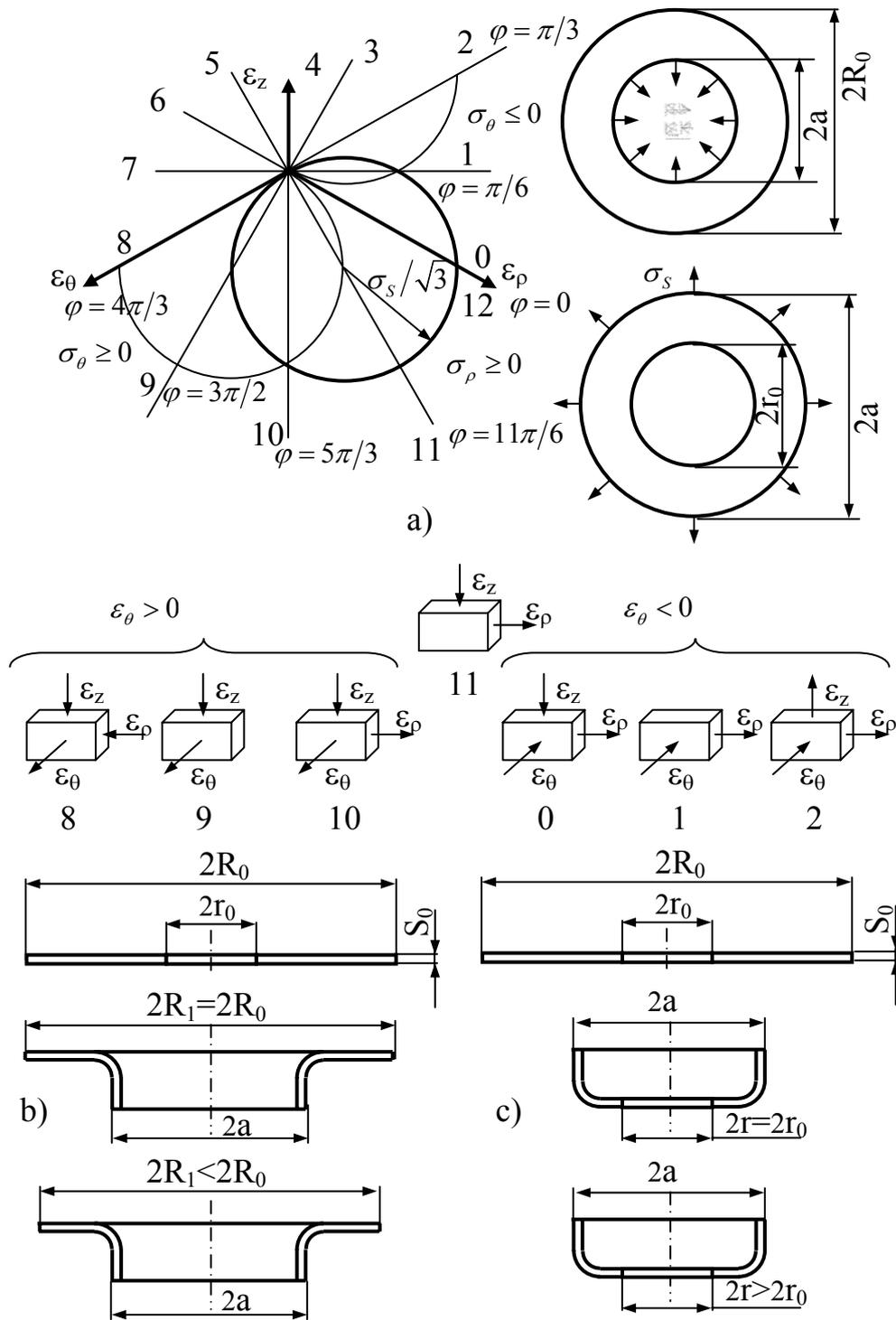
Из графиков следуют некоторые характерные особенности формоизменения кольцевых пластин. Для внешней кольцевой пластины эквивалентная деформация и радиальная компонента отличаются незначительно. На краевом участке внешняя пластина испытывает деформацию утолщения, а окружная деформация на некотором удалении от внутреннего контура достигает по абсолютной величине наибольшей величины.

Для внутренней кольцевой пластины эквивалентная деформация и деформация по толщине по абсолютной величине отличаются незначительно. Вблизи внутреннего контура внутренняя пластина испытывает деформацию радиального сжатия, а окружная деформация на некотором удалении от внешнего контура достигает наибольшей величины. Деформационное упрочнение, качественно не меняя деформированное состояние, существенно влияет на напряженное состояние. Координаты материальных частиц, разграничивающие характерные виды деформации, можно определить из зависимостей (18), (19).

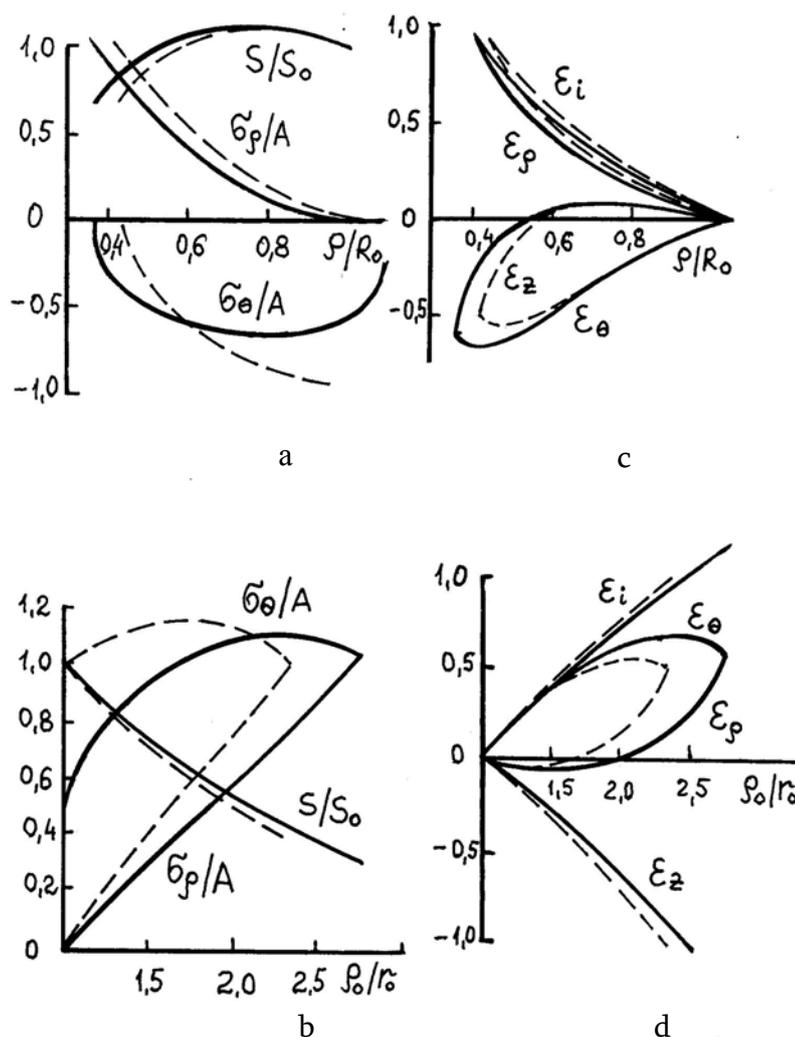
Установленное распределение деформаций может быть использовано как для определения исходных размеров кольцевых пластин по заданным размерам изделия, так и для оптимизации параметров процесса формоизменения.

#### Выводы.

1. Получено аналитическое решение задачи формоизменения кольцевых пластин для двухосно одноименного и разноименного напряженных состояний при взаимосвязанном изменении толщины материала и деформационного упрочнения.
2. Установлено, что относительный размер пластической области кольцевых пластин при указанных напряженных состояниях для идеально жестко-пластической модели деформируемого материала равен 2,35.
3. Показано, что деформационное упрочнение, качественно не меняя деформированное состояние, существенно влияет на напряженное состояние.



Фиг.1. Виды деформаций и напряженное состояние на  $\pi$ -плоскости (a)  
(b – отбортовка, c – вытяжка)



Фиг.2. Распределение главных напряжений и толщины (а, б), эквивалентной и главных деформаций (с, д) для внешней и внутренней кольцевых пластин

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е.А. Основы теории листовой штамповки. М.: Машиностроение, 1977. 278 с.
2. Marciniak Z., Duncan J.L., Hu S.J. Mechanics of Sheet Metal Forming, published by Butterworth-Heinemann, 2002, 205 pp.
3. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford Classic Texts, 1998. 362 pp.
4. Назарян Э.А., Константинов В.Ф. Кинематика деформирования в формоизменяющих операциях листовой штамповки. //Вестник машиностроения. 1999. №2. С.35-41.
5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию  
26.03.2009