ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Петросян Г. А., Хачатрян А.М.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, смешанные условия, асимптотический метод, внутренняя задача, пограничный слой.
Key words: anisotropic plate, mixed conditions, asymptotic method, interior problem, doundary layer.

Գ.Ա.Պետրոսյան, Ա.Մ.Խաչատրյան

Անիզոտրոպ սալի մի խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը

Քննարկվում է անիզոտրոպ սալի եռաչափ խնդրի լարված-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը: Սալի դիմային հարթությունների վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ: Ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդի կիրառմամբ կառուցված են ներքին խնդրի և սահմանային շերտի տիպի խնդրի լուծումները: Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ:

A.M.Khachatryan, G.A.Petrosyan

Asymptotic solution of one mixed boundary problem of anisotropic plate

Consider a question of solution stress-strain state in three dimention problem for an asymptotic plate, in the surface of which are given mixed conditions of theory of elasticity. With appliance of asymptotic method of integration are built solutions of the interior problem and boundary layer. Consider concrete examples.

Обсуждается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в трехмерной задаче для анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. С применением асимптотического метода интегрирования построены решения внутренней задачи, пограничного слоя. Рассмотрены конкретные примеры.

1. В работе [1] асимптотическим методом построена приближенная теория изгиба пластин из изотропных материалов. В [2] тем же методом определено напряженно-деформированное состояние пластин в случае общей анизотропии. Было показано, что решение пограничного слоя, в отличие от изотропного и ортотропного случаев, не распадается на плоский и антиплоский погранслои, а описывается обыкновеннным дифференциальным уравнением шестого порядка. Классические статические краевые задачи полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [3]. Асимптотический метод использован для решения второй и смешанных краевых задач в [4, 5]. Смешанная краевая задача в плоской задаче для анизотропной полосы-прямоугольника решена в [6].

Рассматривается трехмерная задача теории упругости для анизотропной пластинки: $\Omega = \{(x, y, z): 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, |z| \le h, h << a\}$. На лицевых плоскостях пластинки заданы следующие условия теории упругости:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{-}\left(x, y\right),\ \ \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^{-}\left(x, y\right),\ \ w = \frac{l}{h} w^{-}\left(x, y\right) \quad \text{при} \ \ z = -h$$
$$u = \frac{l}{h} u^{+}\left(x, y\right), \quad v = \frac{l}{h} v^{+}\left(x, y\right), \quad \sigma_{z} = \frac{l}{h} \sigma_{Z}^{+}\left(x, y\right) \quad \text{при} \ \ z = h. \tag{1.1}$$

Краевые условия на торцах $x = 0,\ a$ пока произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из трехмерных уравнений теории упругости [7]. Вводя безразмерную координатную систему $\xi = x/l$, $\eta = y/l,\ \zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U = u/l$, $V = v/l$, $W = w/l$, получим систему, которая содержит малый геометрический параметр $\varepsilon = h/l$, где $l = \max(a, b)$. Решение этой системы состоит из решений внутренней задачи и пограничного слоя. Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде рядов [1-4]:

$$Q = \varepsilon^{q} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{s} Q^{(s)} \tag{1.2}$$

где Q – любое из напряжений или безразмерных перемещений.

Значения для q подбираются таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(s)}$. Для рассматриваемой задачи эта цель достигается лишь при [5]:

$$q = -1 \ \text{äëÿ} \quad \sigma_{x}, \sigma_{y}, \sigma_{xy}, \sigma_{z}, U, V, W, \qquad q = 0 \ \ \text{äëÿ} \ \ \sigma_{\mathrm{xz}}, \sigma_{yz} \tag{1.3}$$

Подставляя (1.2), с учетом (1.3), в преобразованные уравнения теории упругости и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_{x}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\
\frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{y}^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\
\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{zy}^{(s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{z}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\
\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \xi} = a_{11}\sigma_{x}^{(s)} + a_{12}\sigma_{y}^{(s)} + a_{13}\sigma_{z}^{(s)} + a_{14}\sigma_{yz}^{(s-1)} + a_{15}\sigma_{xz}^{(s-1)} + a_{16}\sigma_{xy}^{(s)}, \\
\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \eta} = a_{12}\sigma_{x}^{(s)} + a_{22}\sigma_{y}^{(s)} + a_{23}\sigma_{z}^{(s)} + a_{24}\sigma_{yz}^{(s-1)} + a_{25}\sigma_{xz}^{(s-1)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s)}, \\
\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13}\sigma_{x}^{(s-1)} + a_{22}\sigma_{y}^{(s-1)} + a_{33}\sigma_{z}^{(s-1)} + a_{34}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{35}\sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{36}\sigma_{xy}^{(s-1)}, \\
\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{15}\sigma_{x}^{(s-1)} + a_{25}\sigma_{y}^{(s-1)} + a_{35}\sigma_{z}^{(s-1)} + a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)} + a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)} + \\
+ a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)}, \ \ \left(u, v; \xi, \eta; 5, 4; 1, 2; x, y\right)
\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\xi}=a_{16}\sigma_x^{(s)}+a_{26}\sigma_y^{(s)}+a_{36}\sigma_z^{(s)}+a_{46}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{56}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s)}.$$

Интегрируя полученную систему по ζ, получим

$$\sigma_z^{(s)}=\sigma_z^{*(s)}+\sigma_{z0}^{(s)},\qquad \sigma_x^{(s)}=\sigma_x^{*(s)}+\tau_{x0}^{(s)}+a_3\sigma_{z0}^{(s)},\ \left(x,y;a,b\right),$$

$$U^{(s)}=u^{*(s)}+u_0^{(s)}\ \left(U,V,W\right), \tag{1.5}$$

$$\sigma_{xy}^{(s)}=\sigma_{xy}^{*(s)}+\tau_{xy0}^{(s)}+c_3\sigma_{z0}^{(s)},\qquad \sigma_{xz}^{(s)}=\sigma_{xz}^{*(s)}+\tau_{xz1}^{(s)}\zeta+\sigma_{xz0}^{(s)},$$

где

$$\tau_{x0}^{(s)}=B_{11}\varepsilon_1^{(s)}+B_{12}\varepsilon_2^{(s)}+B_{16}\omega^{(s)},\left(1,2;\ x,y\right),\quad \tau_{xy0}^{(s)}=B_{16}\varepsilon_1^{(s)}+B_{26}\varepsilon_2^{(s)}+B_{66}\omega^{(s)}$$

$$\tau_{xz1}^{(s)}=-\left(\frac{\partial\tau_{x0}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{xy0}^{(s)}}{\partial\eta}+a_3\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\xi}+c_3\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\eta}\right),\ \left(x,y;\ \xi,\eta;\ a,b\right) \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_1^{(s)}=\frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial\xi},\qquad \varepsilon_2^{(s)}=\frac{\partial v_0^{(s)}}{\partial\eta},\qquad \omega^{(s)}=\frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v_0^{(s)}}{\partial\xi}.$$

Коэффициенты B_{ij}, a_i,b_i,c_i известны и определяются по формулам [3,7]:

$$B_{11}=\left(a_{22}a_{66}-a_{26}^2\right)/\Omega,\ B_{12}=\left(a_{16}a_{26}-a_{12}a_{66}\right)/\Omega,\ B_{16}=\left(a_{12}a_{26}-a_{16}a_{22}\right)/\Omega$$

$$B_{22}=\left(a_{11}a_{66}-a_{16}^2\right)/\Omega,\ B_{26}=\left(a_{12}a_{16}-a_{11}a_{26}\right)/\Omega,\ B_{66}=\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)/\Omega,$$

$$\Omega=\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)a_{66}+2a_{12}a_{16}a_{26}-a_{11}a_{26}^2-a_{22}a_{16}^2, \tag{1.7}$$

$$a_i=-\left(a_{1i}B_{11}+a_{2i}B_{12}+a_{i6}B_{16}\right),\quad b_i=-\left(a_{1i}B_{12}+a_{2i}B_{22}+a_{i6}B_{26}\right),$$

$$c_i=-\left(a_{1i}B_{61}+a_{2i}B_{26}+a_{i6}B_{66}\right),\left(i=3,4,5\right)$$

$\sigma_{xz0}^{(s)},\sigma_{yz0}^{(s)},\sigma_{z0}^{(s)},u_0^{(s)},v_0^{(s)},w_0^{(s)}$ – неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже с помощью условий (1.1).

Величины со звездочками, входящие в уравнения (1.5), как обычно, известны для каждого приближения s и определяются по следующим формулам:

$$\sigma_z^{*(s)}=-\int_0^\zeta\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial\eta}\right)d\zeta,$$

$$u^{*(s)}=\int_0^\zeta\left(a_{15}\sigma_x^{(s-1)}+a_{25}\sigma_y^{(s-1)}+a_{35}\sigma_z^{(s-1)}+a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)d\zeta\quad\left(u,v;1,2;5,4;\xi,\eta;x,y\right)$$

$$w^{*(s)}=\int_0^\zeta\left(a_{13}\sigma_x^{(s-1)}+a_{23}\sigma_y^{(s-1)}+a_{33}\sigma_z^{(s-1)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{36}\sigma_{xy}^{(s-1)}\right)d\zeta,$$

$$\sigma_x^{*(s)}=B_{11}\varepsilon_1^{*(s)}+B_{12}\varepsilon_2^{*(s)}+B_{16}\omega^{*(s)}+a_3\sigma_z^{*(s)}+a_4\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_5\sigma_{xz}^{(s-1)}, \tag{1.8}$$

$$\sigma_y^{*(s)}=B_{12}\varepsilon_1^{*(s)}+B_{22}\varepsilon_2^{*(s)}+B_{26}\omega^{*(s)}+b_3\sigma_z^{*(s)}+b_4\sigma_{yz}^{(s-1)}+b_5\sigma_{xz}^{(s-1)},$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)}=B_{16}\varepsilon_1^{*(s)}+B_{26}\varepsilon_2^{*(s)}+B_{66}\omega^{*(s)}+c_3\sigma_z^{*(s)}+c_4\sigma_{yz}^{(s-1)}+c_5\sigma_{xz}^{(s-1)},$$

$$\sigma_{xz}^{*(s)}=-\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_x^{*(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial\eta}\right)d\zeta,\left(x,y;\,\xi,\eta\right)$$

$$\varepsilon_1^{*(s)}=\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi},\qquad \varepsilon_2^{*(s)}=\frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\eta},\qquad \omega^{*(s)}=\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\xi}.$$

Предполагается, что $Q^{(s-k)}\equiv 0$, если $s<k$.

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования:

$$u_0^{(s)}=u^{+(s)}-u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right),\ \left(u,v\right)\qquad w_0^{(s)}=w^{-(s)}-w^{*(s)}\left(\xi,\eta,-1\right),$$

$$\sigma_{z0}^{(s)}=\sigma_z^{+(s)}-\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right),\tag{1.9}$$

$$\sigma_{xz0}^{(s)}=\sigma_{xz}^{-}-L_{11}\left(B_{ij}\right)u^{+}-L_{12}\left(B_{ij}\right)v^{+}-a_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\xi}-c_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\eta}+L_{11}\left(B_{ij}\right)u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)+$$

$$+L_{12}\left(B_{ij}\right)v^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)+a_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\xi}+c_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\eta}-\sigma_{xz}^{*(s)}\left(\xi,\eta,-1\right)$$

$$\sigma_{yz0}^{(s)}=\sigma_{yz}^{-}-L_{12}\left(B_{ij}\right)u^{+}-L_{22}\left(B_{ij}\right)v^{+}-c_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\xi}-b_3\frac{\partial\sigma_z^{+}}{\partial\eta}+L_{12}\left(B_{ij}\right)u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)+$$

$$+L_{22}\left(B_{ij}\right)v^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)+c_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\xi}+b_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\eta}-\sigma_{yz}^{*(s)}\left(\xi,\eta,-1\right)$$

Здесь $L_{ij}\left(B_{ij}\right)$–известные дифференциальные операторы второго порядка [7]

$$L_{11}\left(B_{ij}\right)=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},\ \left(1,2;\xi,\eta\right)$$

$$L_{12}\left(B_{ij}\right)=B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+B_{26}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\tag{1.10}$$

С учетом (1.10) окончательное решение внутренней задачи представим в виде:

$$U^{(s)}=u^{+(s)}+u^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)-u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right),\left(u,v\right),$$

$$W^{(s)}=w^{-(s)}+w^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)-w^{*(s)}\left(\xi,\eta,-1\right)$$

$$\sigma_z^{(s)}=\sigma_z^{+}+\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)-\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right),\tag{1.11}$$

$$\sigma_x^{(s)}=B_{11}\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\xi}+B_{12}\frac{\partial v^{+(s)}}{\partial\eta}+B_{16}\left(\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{+(s)}}{\partial\xi}\right)+a_3\sigma_z^{+(s)}-$$

$$-B_{11}\frac{\partial u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\xi}-B_{12}\frac{\partial v^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\eta}-B_{16}\left(\frac{\partial u^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right)}{\partial\xi}\right)+$$

$$+\sigma_x^{*(s)}\left(\xi,\eta,\zeta\right)-a_3\sigma_z^{*(s)}\left(\xi,\eta,1\right),\ \left(x,y;1,2;u,v;\xi,\eta;a_3,b_3\right)$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = B_{16}\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\xi} + B_{26}\frac{\partial v^{+(s)}}{\partial\eta} + B_{66}\left(\frac{\partial u^{+(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial v^{+(s)}}{\partial\xi}\right) + c_3\sigma_z^{+(s)} -$$

$$- B_{16}\frac{\partial u^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi} - B_{26}\frac{\partial v^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta} - B_{66}\left(\frac{\partial u^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta} + \frac{\partial v^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi}\right) +$$

$$+ \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta) - c_3\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)$$

$$\sigma_{xz}^{(s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} + \Big[-L_{11}(B_{ij})u^{+(s)} - L_{12}(B_{ij})v^{+(s)} - a_3\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\xi} - c_3\frac{\partial\sigma_z^{+(s)}}{\partial\eta} +$$

$$+L_{11}(B_{ij})u^{*(s)}(\xi,\eta,1) + L_{12}(B_{ij})v^{*(s)}(\xi,\eta,1) + a_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\xi} - \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta) +$$

$$+c_3\frac{\partial\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1)}{\partial\eta}\Big](\zeta+1) - \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,-1), \quad (x,y;1,2;u,v;\xi,\eta;a_3,b_3) \qquad (1.12)$$

В формулх (1.12) необходимо учитывать, что

$$u^{+(0)} = u^+,\ v^{+(0)} = v^+,\ w^{-(0)} = w^-,\ \sigma_z^{+(0)} = \sigma_z^+,\ \sigma_{xz}^{-(0)} = \sigma_{xz}^-,\ \sigma_{yz}^{-(0)} = \sigma_{yz}^-$$

$$u^{+(s)} = v^{+(s)} = w^{-(s)} = 0\ ,\quad \sigma_z^{+(s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} = \sigma_{yz}^{-(s)} = 0, \qquad \text{при}\ \ s > 0$$

В качестве иллюстрации рассмотрим частные примеры.

а) Пусть

$$\sigma_z^+ = -q,\ u^+ = v^+ = 0, \qquad \sigma_{xz}^- = \sigma_{yz}^- = 0,\ w^- = 0$$

В рассматриваемой задаче асимптотический процесс обрывается при $s = 2$.

С помощью решений (1.12) и рекуррентных формул (1.9) определим все величины внутренней задачи. Точное решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = -a_3 q,\ \ \sigma_y = -b_3 q,\ \ \sigma_{xy} = -c_3 q\ ,\\
&\sigma_{xz} = 0,\ \ \sigma_{yz} = 0,\ \ \sigma_z = -q\ ,\\
&u = (a_{15}a_3 + a_{25}b_3 + a_{56}c_3 + a_{35})(h-y)q\ ,\\
&v = (a_{14}a_3 + a_{24}b_3 + a_{46}c_3 + a_{34})(h-y)q\ ,\\
&w = -(a_{13}a_3 + a_{23}b_3 + a_{36}c_3 + a_{33})(y+h)q\ .
\end{aligned} \qquad (1.13)$$

б) Рассмотрим другой пример. Допустим

$$\sigma_z^+ = 0,\ u^+ = v^+ = 0,\ \sigma_{xz}^- = \tau_1,\ \sigma_{yz}^- = \tau_2,\ w^- = 0$$

В данной задаче отличны от нуля лишь первые три приближения. В результате получим

$$\sigma_x = \frac{h}{l}(a_4\tau_2 + a_5\tau_1), \quad \sigma_y = \frac{h}{l}(b_4\tau_2 + b_5\tau_1), \quad \sigma_{xy} = \frac{h}{l}(c_4\tau_2 + c_5\tau_1),$$

$$\sigma_{xz} = \tau_1, \qquad \sigma_{yz} = \tau_2, \qquad \sigma_z = 0, \qquad (1.14)$$

$$u = \frac{h}{l}\big[(a_{15}a_5 + a_{25}b_5 + a_{56}c_5 + a_{55})\tau_1 + (a_{15}a_4 + a_{25}b_4 + a_{56}c_4 + a_{45})\tau_2\big](\zeta-1),$$

$$v = \frac{h}{l}\big[(a_{14}a_5 + a_{24}b_5 + a_{46}c_5 + a_{45})\tau_1 + (a_{14}a_4 + a_{24}b_4 + a_{46}c_4 + a_{44})\tau_2\big](\zeta-1),$$

$$w=\frac{h}{l}\Big[\left(a_{13}a_5+a_{23}b_5+a_{36}c_5+a_{35}\right)\tau_1+\left(a_{13}a_4+a_{23}b_4+a_{36}c_4+a_{34}\right)\tau_2\Big]\left(\zeta+1\right).$$

2. Для построения решения типа пограничного слоя на торце $x=0$, в преобразованных уравнениях теории упругости, написанных в безразмерных координатах ξ,η,ζ, вводим новую переменную t по формуле $t=\xi/\varepsilon$. Вновь полученные уравнения решаются с помощью функций типа погранслоя [3,4]

$$R_p=\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{\chi_p+s}R_p^{(s)}\left(\eta,\zeta\right)\exp\left(-\lambda t\right) \tag{2.1}$$

где R_p – любое из напряжений и перемещений, при этом $\operatorname{Re}\lambda>0$. Непротиворечивые значения для χ_p получим, если $\chi_{\sigma_i}=\chi,\ \chi_{u_i}=\chi+1$ [2,3,4].

Все неизвестные величины пограничного слоя выражаются через напряжения $\sigma_{yzp}^{(s)}$ и $\sigma_{zp}^{(s)}$ [3]:

$$\sigma_{xp}^{(s)}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+R_x^{(s-1)},\quad \sigma_{xyp}^{(s)}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta}+R_{xy}^{(s-1)},\quad \sigma_{xzp}^{(s)}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta}+R_{xz}^{(s-1)},$$

$$\sigma_{yp}^{(s)}=-\frac{1}{a_{22}}\left(\frac{a_{12}}{\lambda^2}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{a_{25}}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{a_{26}}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta}+a_{23}\sigma_{zp}^{(s)}+a_{24}\sigma_{yzp}^{(s)}\right)+R_y^{(s-1)},$$

$$u_p^{(s)}=-\frac{A_{11}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\frac{A_{15}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{A_{16}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{A_{13}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(s)}-\frac{A_{14}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(s)}+R_u^{(s-1)}, \tag{2.2}$$

$$v_p^{(s)}=-\frac{A_{16}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\frac{A_{25}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{A_{26}}{\lambda^2}\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{A_{23}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(s)}-\frac{A_{24}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(s)}+R_v^{(s-1)},$$

$$w_p^{(s)}=-\frac{A_{11}}{\lambda^4}\frac{\partial^3\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^3}-\frac{A_{16}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{\lambda^2}\left(A_{13}+A_{35}\right)\frac{\partial\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{2A_{15}}{\lambda^3}\frac{\partial^2\sigma_{zp}^{(s)}}{\partial\zeta^2}-$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}\left(A_{14}+A_{25}\right)\frac{\partial\sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{A_{33}}{\lambda}\sigma_{zp}^{(s)}-\frac{A_{34}}{\lambda}\sigma_{yzp}^{(s)}+R_w^{(s-1)}$$

где использованы следующие обозначения:

$$A_{k1}=\left(a_{22}a_{kk}-a_{k2}^2\right)a_{22}^{-1},\ \left(k=1,4\right),\ \ A_{4k}=\left(a_{3k}a_{22}-a_{23}a_{2k}\right)a_{22}^{-1},\ \left(k=3,4\right),$$

$$A_{1k}=\left(a_{1k}a_{22}-a_{12}a_{2k}\right)a_{22}^{-1},\ \ A_{2k}=\left(a_{k6}a_{22}-a_{2k}a_{26}\right)a_{22}^{-1},\left(k=3,4,5,6\right), \tag{2.3}$$

$$A_{3k}=\left(a_{k5}a_{22}-a_{2k}a_{25}\right)a_{22}^{-1},\ \ \left(k=3,4,5\right)$$

Величины $R_k^{(s-1)}$ известны и определяются по рекуррентным формулам [3].

Функции $\sigma_{yzp}^{(s)}$ и $\sigma_{zp}^{(s)}$ определяются из уравнений [3]

$$\begin{aligned}&L_1\sigma_{zp}^{(s)}+L_2\sigma_{yzp}^{(s)}=R_1^{(s-1)},\\&L_2\sigma_{zp}^{(s)}+L_3\sigma_{yzp}^{(s)}=R_2^{(s-1)}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Дифференциальные операторы L_i и обобщенные нагрузки $R_1^{(s-1)},R_2^{(s-1)}$ определяются известным образом [3]:

$$L_1 = A_{11}\frac{\partial^4}{\partial\zeta^4} + 2A_{15}\lambda\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3} + \left(2A_{13} + A_{35}\right)\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2A_{45}\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{43}\lambda^4,$$

$$L_2 = A_{16}\lambda\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3} + \left(A_{14} + A_{25}\right)\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \left(A_{23} + A_{34}\right)\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{44}\lambda^4, \qquad (2.5)$$

$$L_3 = A_{26}\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2A_{24}\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{41}\lambda^4,$$

$$R_1^{(s-1)} = -\left(\frac{\partial R_w^{(s-1)}}{\partial\zeta} + a_{13}R_x^{(s-1)} + a_{23}R_y^{(s-1)} + a_{35}R_{xz}^{(s-1)} + a_{36}R_{xy}^{(s-1)}\right)\lambda^4,$$

$$R_2^{(s-1)} = -\left(\frac{\partial R_v^{(s-1)}}{\partial\zeta} - \frac{\partial w_p^{(s-1)}}{\partial\eta} + a_{14}R_x^{(s-1)} + a_{24}R_y^{(s-1)} + a_{45}R_{xz}^{(s-1)} + a_{46}R_{xy}^{(s-1)}\right)\lambda^4.$$

При $s = 0$ решение системы (2.4) можно определить при помощи функции напряжений Φ

$$\sigma_{yzp}^{(s)} = L_1\Phi, \qquad \sigma_{zp}^{(s)} = -L_2\Phi \qquad (2.6)$$

которая является решением краевой задачи

$$\left(L_1L_3 - L_2^2\right)\Phi = 0 \qquad (2.7)$$

$$A_{11}L_2\Phi''\left(\zeta = 1\right) + \lambda\left(A_{15}L_2 - A_{16}L_1\right)\Phi'\left(\zeta = 1\right) + \lambda^2\left(A_{13}L_2 - A_{14}L_1\right)\Phi\left(\zeta = 1\right) = 0,$$

$$A_{16}L_2\Phi''\left(\zeta = 1\right) + \lambda\left(A_{25}L_2 - A_{26}L_1\right)\Phi'\left(\zeta = 1\right) + \lambda^2\left(A_{23}L_2 - A_{24}L_1\right)\Phi\left(\zeta = 1\right) = 0$$

$$L_2\Phi\left(\zeta = 1\right) = 0, \quad L_2\Phi'\left(\zeta = -1\right) = 0, \quad L_1\Phi\left(\zeta = -1\right) = 0 \qquad (2.8)$$

$$A_{11}L_2\Phi'''\left(\zeta = -1\right) + \lambda\left(2A_{15}L_2 - A_{16}L_1\right)\Phi''\left(\zeta = -1\right) + \lambda^2\left(\left(A_{13} + A_{51}\right)L_2 -\right.$$
$$\left. - \left(A_{14} + A_{25}\right)L_1\right)\Phi'\left(\zeta = -1\right) + \lambda^3\left(A_{33}L_2 - A_{34}L_1\right)\Phi\left(\zeta = -1\right) = 0$$

Условия (2.8) являются следствием однородных поверхностных условий

$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0,\ w = 0$ при $\zeta = -1,\quad u = v = 0,\ \sigma_z = 0$ при $\zeta = 1$.

Краевая задача (2.7), (2.8) – обобщенная задача на собственные значения.

Уравнение (2.7) является обыкновенным дифференциальным уравнением шестого порядка, в котором η входит как параметр. Решая уравнение (2.7) и удовлетворив условиям (2.8), получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных констант $C_i\ \left(i = 1, 2, ..., 6\right)$. Приравнивая к нулю определитель этой системы, получим трансцендентное уравнение для определения λ.

Решение поставленной смешанной задачи будет иметь следующий окончательный вид

$$J = Q + R_p^{[1]} + R_p^{[2]}$$

где Q – решение внутренней задачи, а $R_p^{[1]}$ и $R_p^{[2]}$ – решения типа пограничного слоя при $x = 0$ и $x = a$, соответственно.

В заключение отметим, что для ортотропных материалов уравнения (2.4) распадаются на два уравнения, первое из которых четвертого порядка и определяет решение плоского погранслоя, а второе – второго порядка и определяет антиплоский погранслой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686.
2. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией // В сб.:“XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин”. Тезисы докладов. М.: 1977. С.5.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука,1997. 415с.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд.“Гитутюн” НАН РА, 2005. 468с.
5. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.3-11.
6. Петросян Г.А. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной полосы-прямоугольника //Уч. записки АрГУ. №1(14). 2007. С.36-42.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1967. 268с.

Арцахский государственный
университет

Поступила в редакцию
24.03.2009